since $\exp C_K \leqslant 2$, K is unramified over k. In particular, $f_K = f_k$ and therefore the proposition is completely proved.

Remark. By means of Theorem 2 of [9], we can obtain for each $\nu \in \{1, 2, 3, 4\}$, an upper bound of D_K for the CM-fields K which have the properties of Theorem ν but are not contained in any biquadratic field. However the estimates are complicated; so we omit the details here.

References

[1] D. W. Boyd and H. Kisilevsky, *On the exponent of the ideal class group of complex quadratic fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1971), 433–436.

[2] R. Brauer, *On the zeta-functions of algebraic number fields*, Amer. J. Math. 69 (1947), 243–250.

[3] S. Chowla, *An extension of Heilbronn's class-number theorem*, Quart. J. Math. Oxford 2, 5 (1934), 304–307.

[4] A. G. Earnest and O. H. Körner, *On ideal class group of 2-power exponent*, Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), 196–198.

[5] A. G. Earnest, *Exponents of class groups of imaginary abelian number fields*, Bull. Austral. Math. Soc. 35 (1987), 231–245.

[6] M. Hamamura, *On absolute class fields of certain algebraic number fields*, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 32 (1981), 23–34.

[7] K. Horie, *On the index of the Stickelberger ideal and the cyclotomic regulator*, J. Number Theory 20 (1985), 238–253.

[8] Y. Kida, *l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants*, ibid. 12 (1980), 519–528.

[9] H. M. Stark, *Some effective cases of Brauer–Siegel theorem*, Invent. Math. 23 (1974), 135–152.

[10] T. Tatuzawa, *On a theorem of Siegel*, Japanese J. Math. 21 (1951), 163–178.

[11] K. Uchida, *Class numbers of imaginary abelian number fields II*, Tôhoku Math. J. 23 (1972), 487–499.

[12] P. J. Weinberger, *Exponents of the class groups of complex quadratic fields*, Acta Arith. 22 (1973), 117–124.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
YAMAGUCHI UNIVERSITY
Yoshida, Yamaguchi 753
Japan

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
KYUSHU UNIVERSITY
Hakozaki, Fukuoka 812
Japan

Received on 27.9.1988 (1872)

ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

Darstellung total positiver ganzer algebraischer Zahlen als Summe N-freier Zahlen

von

ROTRAUT LAUN (Marburg)*

1. Einleitung. Evelyn und Linfoot untersuchten in einer Reihe von Arbeiten [2]–[6] das asymptotische Verhalten der Anzahl $A_m(\nu)$ der Darstellungen einer natürlichen Zahl ν als Summe von m N-freien Zahlen für $\nu \to \infty$. Eine natürliche Zahl heißt N-frei, falls sie nicht durch die N-te Potenz einer Primzahl teilbar ist. Barham und Estermann [1] verbesserten die von ihnen erzielte Asymptotik für $m \geqslant 4$. Mit Hilfe der Hardy–Littlewoodschen Methode erhielten sie

$$A_m(\nu) = \frac{\nu^{m-1}}{(m-1)!\,\zeta^m(N)} \cdot S(\nu) + O(\nu^{m-2+1/N} \log^\alpha \nu) \quad (m \geqslant 4) \tag{1.1}$$

mit

$$S(\nu) := \prod_{p^N \nmid \nu} \left(1 + \frac{(-1)^{m+1}}{(p^N-1)^m}\right) \prod_{p^N \mid \nu} \left(1 + \frac{(-1)^m}{(p^N-1)^{m-1}}\right)$$

und

$$\alpha := \begin{cases} 3, & \text{falls } N = 2,\, m = 4, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.2}$$

In [7] verallgemeinerten Evelyn und Linfoot die Fragestellung, indem sie für $\nu \to \infty$ das asymptotische Verhalten der Anzahl $A_m(\nu; b, a)$ der Darstellungen einer natürlichen Zahl ν als Summe von m N-freien Zahlen untersuchten, welche in einer festen Restklasse $b \pmod a$ liegen. Man setzt voraus, daß (a, b) N-frei ist und daß $\nu \equiv mb \pmod a$ ist, da andernfalls $A_m(\nu; b, a) = 0$ ist. Mirsky [12] verbesserte ihre Asymptotik für $m \geqslant 3$.

Setzt man $a = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{\beta_j}$, so erhielt er mit elementaren Methoden

$$A_m(\nu; b, a) = S(\nu; b, a)\left(\left(\frac{\nu}{a}\right)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} + O(\nu^{m-2+\frac{m}{(m-1)N+1}+\varepsilon})\right) \quad (m \geqslant 3) \tag{1.3}$$

* Diese Arbeit ist eine gekürzte Fassung meiner Dissertation. Herrn Prof. Dr. W. Schaal, der diese Arbeit anregte, bin ich für seine vielfältige Unterstützung und Betreuung aufrichtig dankbar. Auch Herrn Prof. Dr. J. Hinz danke ich für viele anregende Gespräche.

mit

$$S(\nu; b, a) := \prod_{p_j \nmid \frac{a}{(a,b)}} \left(1 - \frac{1}{p_j^{N-\beta_j}}\right)^m \prod_{\substack{p_j^N \nmid \nu \\ p_j \nmid \frac{a}{(a,b)}}} \left(1 + \frac{(-1)^{m+1}}{(p_j^{N-\beta_j}-1)^m}\right) \prod_{\substack{p_j^N \mid \nu \\ p_j \nmid \frac{a}{(a,b)}}} \left(1 + \frac{(-1)^m}{(p_j^{N-\beta_j}-1)^{m-1}}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$, wobei die O-Konstante nur von ε, N, m und a abhängt. Für den Fall $m = 2$ sei auf [16] verwiesen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Ergebnis (1.1), (1.2) auf algebraische Zahlkörper zu übertragen. In einem Zahlkörper K vom Grad n wird das asymptotische Verhalten der Anzahl der Darstellungen einer ganzen algebraischen total positiven Zahl ν für $N(\nu) \to \infty$ als Summe von m total positiven N-freien Zahlen untersucht. Eine ganze algebraische Zahl ξ heißt N-frei, falls das Hauptideal (ξ) nicht durch die N-te Potenz eines Primideals teilbar ist. Ich erweitere die Untersuchungen von Barham und Estermann dahingehend, daß die N-freien Summanden ν_j noch in Restklassen eines festgewählten Moduls $\mathfrak{a}$ liegen.

Wichtig für den Beweis von Barham und Estermann ist die Abschätzung (hier im Spezialfall $N = 2$)

$$\sum_{b=0}^{q-1} \int_0^T |\zeta(1/2+\varepsilon+it; b, q)|\, dt \ll \frac{q^{1/2}\, T}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (0 < \varepsilon < 1/6)$$

mit

$$\zeta(s; b, q) := \sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv b \,(\mathrm{mod}\, q)}}^{\infty} \frac{1}{l^s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1).$$

Bei der Übertragung auf Zahlkörper macht diese Abschätzung große Schwierigkeiten, da der Modul nicht schlechter als mit $q^{1/2}$ eingehen darf. Daher wird in § 3 anstelle von $\zeta(s; b, q)$ eine Verallgemeinerung der Funktion

$$\psi(s; b, q) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e(bl/q)}{l^s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1), \qquad e(x) := e^{2\pi i x},$$

betrachtet.

Diese wird mit Hilfe einer weiteren Funktion abgeschätzt, welche im Spezialfall $K = \boldsymbol{Q}$ definiert ist durch

$$\Phi(s; b, q, y) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e(bl/q)}{l^s} \cdot \exp(-l/y),$$

wobei $y > 0$ ein geeignet zu wählender Parameter ist (vgl. die Hilfssätze 3.3 und 4.9).

Bezeichnungen. Es sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $n = r_1 + 2r_2$ (mit der üblichen Bezeichnung) über dem Körper der rationalen Zahlen. $\mathfrak{E}$ sei die Gruppe der Einheiten von K. Ist γ eine Zahl aus K, so werden mit $\gamma^{(p)}$, $p = 1, \dots, n$, die n Konjugierten von γ bezeichnet. Mit $N(\gamma) = \gamma^{(1)} \cdot \ldots \cdot \gamma^{(n)}$ werde die Norm, mit $\mathrm{Sp}(\gamma) = \gamma^{(1)} + \ldots + \gamma^{(n)}$ die Spur von γ bezeichnet. $\gamma \succ 0$ bedeute im Falle $r_1 > 0$, daß $\gamma^{(p)} > 0$ ist für $p = 1, \dots, r_1$; im Falle $r_1 = 0$ bedeute es $\gamma \neq 0$. Für ganze Ideale $\mathfrak{f}$ in K bezeichnet $N(\mathfrak{f})$ die Norm, $\varphi(\mathfrak{f})$ die Eulersche Funktion, $\mu(\mathfrak{f})$ die Möbiusfunktion und $q(\mathfrak{f})$ den quadratfreien Kern von $\mathfrak{f}$. Für eine ganze algebraische Zahl ξ aus K werde $\mu(\xi) = \mu((\xi))$ gesetzt. Unter $\mathfrak{p}$ verstehe man stets ein Primideal. Dem Körper K ordne man in der von Hecke [9], § 2, beschriebenen Weise einen Bereich $\mathfrak{Z}$ idealer Zahlen zu. Ist $\hat{\Omega} \in \mathfrak{Z}$, so werden wie bei Hecke mit $\hat{\Omega}^{(p)}$, $p = 1, \dots, n$, die n Konjugierten von $\hat{\Omega}$ bezeichnet. Mit $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}, \dots$ werden stets ganze ideale Zahlen bezeichnet. $\mathfrak{Z}$ zerfällt, den Idealklassen entsprechend, in h Klassen der Gestalt $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\hat{\Omega}) = \{\hat{\Omega}\varrho \mid \varrho \in K\}$ $(\hat{\Omega} \neq 0)$. Es seien $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_h \in \mathfrak{Z} - \{0\}$ festgewählte Repräsentanten der h Idealklassen. d sei die Diskriminante und $\mathfrak{d} = (\delta)$ die Differente in K. Für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n$ und $\xi \in K$ setze man $N(z) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_n$, $\mathrm{Sp}(\xi z) = \xi^{(1)} z_1 + \ldots + \xi^{(n)} z_n$ und $\mathrm{Sp}(|\xi| z) = |\xi^{(1)}| z_1 + \ldots + |\xi^{(n)}| z_n$. Die durch die Symbole O und $\ll$ implizierten Konstanten, sowie die positiven Konstanten $c, c_1, c_2, \dots$ hängen, soweit nicht anders vermerkt, nur vom Körper K und dem in § 2 festgewählten Ideal $\mathfrak{a}$ ab.

2. Formulierung der Ergebnisse. Es seien $m \geqslant 3$ und $N \geqslant 2$ natürliche Zahlen. Es sei $\mathfrak{a} = (\hat{\alpha}) \neq (0)$ ein ganzes Ideal, und es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ganze algebraische Zahlen, für die $(\alpha_j, \mathfrak{a})$ N-frei ist $(j = 1, \dots, m)$. Man setze

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_u^{\beta_u}, \quad u \in \boldsymbol{N}_0, \quad \beta_l \geqslant 1 \quad (l = 1, \dots, u),$$

wobei für $u = 0$ $\mathfrak{a} = (1)$ gelten soll.

Bei festem $l \in \{1, \dots, u\}$ sei g_l die Anzahl derjenigen α_j $(j = 1, \dots, m)$, welche durch $\mathfrak{p}_l^{\beta_l}$ teilbar sind.

Es seien die Heckeschen Größencharaktere $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m \bmod \mathfrak{a}$ durch

$$\Lambda_j(\hat{\mu}) := \prod_{p=1}^{n} |\hat{\mu}^{(p)}|^{-iV_{pj}}, \quad \hat{\mu} \neq 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

gegeben. Es sei ν eine total positive ganze algebraische Zahl mit

$$\nu \equiv \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{a}).$$

Man definiere

$$T_m := \prod_{p=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(1 - iV_{pj})}{\Gamma(m - i \sum_{j=1}^{m} V_{pj})};$$

$$S_N(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) := \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p}^N | \nu}} \left(1 + \frac{(-1)^m}{(N(\mathfrak{p})^N - 1)^{m-1}}\right) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a} \\ \mathfrak{p}^N \nmid \nu}} \left(1 + \frac{(-1)^{m+1}}{(N(\mathfrak{p})^N - 1)^m}\right)$$

$$\times \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{a}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^N}\right)^{-m} \prod_{\substack{l=1 \\ \mathfrak{p}_l^N | \nu \\ g_l \neq 0}}^{u} \left(1 + \frac{(-1)^{g_l}}{(N(\mathfrak{p}_l)^{N-\beta_l} - 1)^{g_l - 1}}\right)$$

$$\times \prod_{\substack{l=1 \\ \mathfrak{p}_l^N \nmid \nu,\, \mathfrak{p}_l^{\beta_l} | \nu \\ g_l \neq 0}}^{u} \left(1 + \frac{(-1)^{g_l + 1}}{(N(\mathfrak{p}_l)^{N-\beta_l} - 1)^{g_l}}\right) \prod_{\substack{l=1 \\ g_l \neq 0}}^{u} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p}_l)^{N-\beta_l}}\right)^{g_l}.$$

Der Term $S_N(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a})$ wird in den folgenden Fällen gleich Null:

1. Fall: Es existiert ein $\mathfrak{p}_l$ mit $N(\mathfrak{p}_l) = 2$, $\mathfrak{p}_l^{N-1} \| \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_l^{N-1} \| \nu$ und g_l gerade.

2. Fall: Es existiert ein $\mathfrak{p}_l$ mit $N(\mathfrak{p}_l) = 2$, $\mathfrak{p}_l^{N-1} \| \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_l^N | \nu$ und g_l ungerade.

3. Fall: Es existiert ein $\mathfrak{p}_l$ mit $\mathfrak{p}_l^{\beta_l} \| \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_l^N | \nu$ und $g_l = 1$.

Der dritte Fall kann nicht eintreten, wenn $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m$ ist.

SATZ 1. *Es sei K ein total reeller Zahlkörper. Für $N(\nu) \geq 2$ gilt:*

$$A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) := \sum_{\substack{(\nu_1, \ldots, \nu_m) \\ \nu_j \succ 0,\ N\text{-frei} \\ \nu_j \equiv \alpha_j (\operatorname{mod} \mathfrak{a}) \\ \nu = \nu_1 + \cdots + \nu_m}} \Lambda_1(\nu_1) \cdot \ldots \cdot \Lambda_m(\nu_m)$$

$$= \left(\frac{N(\nu)}{N(\mathfrak{a})}\right)^{m-1} \cdot \frac{T_m}{|\sqrt{d}|^{m-1} \zeta_K^m(N)} \cdot \prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu) \cdot S_N(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) + O\left(N(\nu)^{\beta_1} (\log N(\nu))^{\beta_2}\right)$$

mit

$$\beta_1 := \begin{cases} 3/2 + 1/2N, & \text{falls } m = 3, \\ m - 2 + 1/N, & \text{falls } m \geq 4; \end{cases} \qquad \beta_2 := \begin{cases} 2 \cdot \left(\dfrac{1 - 1/N}{2 - 1/N}\right), & \text{falls } m = 4, \\ \dfrac{1 - 1/N}{2 - 1/N}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die O-Konstante hängt nur vom Körper, von m, von N und vom Ideal $\mathfrak{a}$ ab.

Bemerkungen: 1. Die Exponenten im Restglied hängen nicht vom Körper ab.

2. Der Exponent des Logarithmus ist für $m \geq 4$ besser als derjenige von Barham und Estermann in (1.1) bzw. (1.2), wenn man $K = \mathbf{Q}$ wählt.

3. Für $m \geq 4$ ist im Falle $K = \mathbf{Q}$ das Restglied besser als dasjenige von Mirsky in (1.3). Für $m = 3$ liefert die Methode von Mirsky im Zahlkörper vom Grad $n \geq 2$ ein schlechteres Restglied als in Satz 1, da bei der Übertragung der elementaren Methoden im Exponenten von $N(\nu)$ der Körpergrad eingeht.

4. Offenbar ist $A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) = 0$, wenn $(\alpha_j, \mathfrak{a})$ nicht N-frei $(j = 1, \ldots, m)$ oder $\nu \not\equiv \alpha_1 + \ldots + \alpha_m (\operatorname{mod} \mathfrak{a})$ ist.

Im beliebigen Zahlkörper gilt:

SATZ 2. *Mit denselben β_1, β_2 und derselben Summationsbedingung wie in Satz 1 gilt für $N(\nu) \geq 2$:*

$$\sum \exp\left(-\sum_{q=1}^{n} \frac{|\nu_1^{(q)}| + \ldots + |\nu_m^{(q)}|}{|\nu^{(q)}|}\right)$$

$$= \left(\frac{N(\nu)}{N(\mathfrak{a})}\right)^{m-1} \cdot \frac{\pi^{(m-1)r_2}}{e^{r_1}((m-1)!)^{r_1}} \cdot \frac{1}{|\sqrt{d}|^{m-1} \zeta_K^m(N)} \cdot \left(\frac{K_{3m/2-1}(2)}{\Gamma(3m/2)}\right)^{r_2} \cdot S_N(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a})$$

$$+ O\left(N(\nu)^{\beta_1} (\log N(\nu))^{\beta_2(1+r_2)}\right),$$

wobei K_l die l-te Besselsche Funktion dritter Art rein imaginären Argumentes ist.

Bemerkungen. 1. Man beachte, daß im nicht total reellen Zahlkörper die Menge $\{(\nu_1, \ldots, \nu_m) | \ \nu_j \succ 0,\ \nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m\}$ nicht endlich zu sein braucht.

2. $K_{3m/2-1}(2)$ ist positiv (man vgl. z.B. [17], 6.22).

In dieser Arbeit wird nur der Beweis von Satz 1 ausgeführt, da die entsprechenden Beweismethoden im beliebigen Zahlkörper wesentlich komplizierter werden. Aus Gründen der Übersicht wird Satz 1 für den Fall $N = 2$ bewiesen. Für $N \geq 3$ verläuft der Beweis analog.

Im folgenden sei K ein total reeller Zahlkörper.

3. Heckesche Größencharaktere. Es sei $\mathfrak{c} = (\xi) \neq (0)$ ein ganzes Ideal. Die Gruppe der Einheiten mod $\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{c}) := \{\eta \in \mathfrak{E} | \ \eta \succ 0,\ \eta \equiv 1 \ (\operatorname{mod} \mathfrak{c})\}$$

ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $n-1$. Sind $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ Grundeinheiten mod $\mathfrak{c}$, so ist der Regulator mod $\mathfrak{c}$ gegeben durch

$$R(\mathfrak{c}) := \left|\det(\log|\eta_1^{(p)}|, \ldots, \log|\eta_{n-1}^{(p)}|)_{p=1,\ldots,n-1}\right|.$$

Für $n = 1$ werde $R(\mathfrak{c}) = 1$ gesetzt. Es sei $e(\mathfrak{c}) := [\mathfrak{E} : \mathfrak{E}(\mathfrak{c})]$. $\hat{\alpha} \neq 0$ und $\hat{\beta} \neq 0$ heißen "assoziiert mod $\mathfrak{c}$", wenn $\hat{\alpha}\hat{\beta}^{-1} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{c})$ ist. Zu $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbf{Z}^{n-1}$ definiere man die Zahlen $E_1(b), \ldots, E_n(b)$ durch

(3.1) $$\sum_{q=1}^{n} E_q(b) = 0, \qquad \sum_{q=1}^{n} E_q(b) \log|\eta_p^{(q)}| = 2\pi b_p \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

Die Heckeschen Größencharaktere λ mod $\mathfrak{c}$ und die 2^n Vorzeichencharaktere sind für $\hat{\mu} \neq 0$ definiert durch

(3.2) $$\lambda(\hat{\mu}) = \lambda_b(\hat{\mu}) := \prod_{p=1}^{n} |\hat{\mu}^{(p)}|^{-iE_p(b)};$$

$$v(\hat{\mu}) := \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}.$$

Es sei $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(\xi\delta)$, wenn $\mathfrak{R}$ die Klasse von $\hat{\varkappa}$ ist. Im Falle $\hat{\varkappa} = 0$ ist die Klasse $\mathfrak{R}$ noch zusätzlich festzulegen; dies wird im folgenden stets aus dem Zusammenhang hervorgehen.

$y > 0$ sei ein Parameter, der später geeignet gewählt wird. Mit $s = \sigma + it$ definiere man

$$\psi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) := \sum_{\substack{(\hat{\mu})_{\mathfrak{c}} \\ \hat{\mu}\in\mathfrak{R}'}}' e\left(\mathrm{Sp}\left(\frac{\hat{\varkappa}\hat{\mu}}{\xi\delta}\right)\right)\cdot\frac{(\lambda v)(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} \qquad (\sigma > 1);$$

$$\Phi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y) := \sum_{\substack{(\hat{\mu})_{\mathfrak{c}} \\ \hat{\mu}\in\mathfrak{R}'}}' e\left(\mathrm{Sp}\left(\frac{\hat{\varkappa}\hat{\mu}}{\xi\delta}\right)\right)\cdot\frac{(\lambda v)(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s}\cdot\exp\left(-\frac{|N(\hat{\mu})|}{y}\right);$$

$$\Omega(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y) := \psi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) - \Phi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y).$$

Hierin durchläuft $\hat{\mu}$ ein volles System mod $\mathfrak{c}$ nicht-assoziierter ganzer Zahlen aus der Klasse $\mathfrak{R}'$, wobei $\hat{\mu} = 0$ ausgeschlossen ist (was durch den Strich am Summenzeichen angedeutet wird). Wegen des Faktors $\exp(-|N(\hat{\mu})|/y)$ ist $\Phi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y)$ eine ganze Funktion. Ferner definiere man

$$\zeta(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) := \sum_{\substack{(\hat{\mu})_{\mathfrak{c}} \\ \hat{\mu}\equiv\hat{\varkappa}\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c})}}' \frac{(\lambda v)(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} \qquad (\sigma > 1).$$

Ziel dieses Paragraphen ist es, die in Hilfssatz 3.3 angegebene Entwicklung für $\Omega(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y)$ zu beweisen.

Wie man leicht sieht, besteht die Beziehung

$$\psi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) = \sum_{\substack{\hat{\varrho}\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c}) \\ \hat{\varrho}\in\mathfrak{R}'}} e\left(\mathrm{Sp}\left(\frac{\hat{\varkappa}\hat{\varrho}}{\xi\delta}\right)\right)\cdot\zeta(s;\, \hat{\varrho},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) \qquad (\sigma > 1). \tag{3.3}$$

Bekanntlich gilt:

$$\sum_{\substack{\hat{\varrho}\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c}) \\ \hat{\varrho}\in\mathfrak{R}'}} e\left(\mathrm{Sp}\left(\frac{\hat{\varkappa}\hat{\varrho}}{\xi\delta}\right)\right) = \begin{cases} N(\mathfrak{c}), & \text{falls } \hat{\varkappa} \equiv 0 \;(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c}) \\ 0, & \text{falls } \hat{\varkappa} \not\equiv 0 \;(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c}). \end{cases} \tag{3.4}$$

Analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung von $\zeta(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c})$ ergeben sich aus [9], §§ 5–6, wie von Friedrich in [8], § 3, skizziert wurde. Man vergleiche hierzu auch Rausch [15], § 5. Wendet man diese Ergebnisse auf (3.3) an, und beachtet man noch (3.4), so erhält man

Hilfssatz 3.1. *Die $\psi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c})$ sind ganze Funktionen, wenn $\lambda v \not\equiv 1$, oder wenn $\lambda v \equiv 1$ (d.h. alle $E_p(b)$ und $a_p = 0$) und $\hat{\varkappa} \not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c})$ ist. Im Falle $\lambda v \equiv 1$ und $\hat{\varkappa} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{c})$ besitzt ψ als einzige Singularität im Endlichen einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit dem Residuum*

$$2^n R(\mathfrak{c})/|\sqrt{d}|.$$

Es gilt die Gleichung

$$\psi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) = \frac{i^{\Sigma a_p}\, v^2(\hat{\varkappa})}{(\bar{\lambda} v)(\xi\delta)}\cdot\frac{\Gamma(1-s;\, \bar{\lambda} v)}{\Gamma(s;\, \lambda v)}\cdot A^{1-2s}\cdot N(\mathfrak{c})^{1-s}\cdot\zeta(1-s;\, \hat{\varkappa},\, \bar{\lambda} v,\, \mathfrak{c})$$

mit

$$A := (|d|\pi^{-n})^{1/2}, \qquad \Gamma(s;\, \lambda v) := \prod_{p=1}^{n} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}(s + iE_p(b) + a_p)\right).$$

Im Falle $\hat{\varkappa} = 0$ ist $v^2(\hat{\varkappa}) := v^2(\mathfrak{R})$ zu setzen.

Auf dem Rademacherschen Wege [14] erhält man mit Hilfe von Hilfssatz 3.1 ähnlich wie bei Rausch [15]:

Hilfssatz 3.2. *Es sei $0 < \varepsilon_0 \leqslant 3/2$. Für $-\varepsilon_0 \leqslant \sigma \leqslant 1 + \varepsilon_0$, $|s-1| \geqslant 1/4$ gilt:*

$$\psi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) \ll N(\mathfrak{c})^{1+\varepsilon_0}\cdot\zeta_K(1+\varepsilon_0)\cdot\prod_{p=1}^{n} |a_p + 3 + s + iE_p(b)|^{(1+\varepsilon_0-\sigma)/2}.$$

Hilfssatz 3.3. *Für $0 < \varepsilon < 1/4$ und $s = (1+\varepsilon)/2 + it$ gilt:*

$$\Omega(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y) = \Gamma(1-s)\, y^{1-s} \operatorname*{Res}_{z=1} \psi(z;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c})$$

$$+ O\left(\frac{N(\mathfrak{c})^{3/2}}{y} \prod_{p=1}^{n} (1 + |t + E_p(b)|)^{1-\varepsilon/2}\right) + O\left(\frac{N(\mathfrak{c})^2}{y^{3/2}} \prod_{p=1}^{n} (1 + |t + E_p(b)|)^{(3-\varepsilon)/2}\right).$$

Beweis. Die Mellinsche Umkehrformel liefert:

$$\exp\left(-\frac{|N(\hat{\mu})|}{y}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{3/2-i\infty}^{3/2+i\infty} \Gamma(w)\cdot\frac{y^w}{|N(\hat{\mu})|^w}\, dw.$$

Summation über $\hat{\mu}$ und Vertauschung von Summation und Integration ergibt:

$$\Phi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{3/2-i\infty}^{3/2+i\infty} \Gamma(w)\, y^w\, \psi(s+w;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c})\, dw.$$

Berücksichtigt man die Residuen des Integranden bei $w = 1-s,\, 0,\, -1$, so erhält man

$$\Phi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c},\, y) = \psi(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) + \Gamma(1-s)\, y^{1-s} \operatorname*{Res}_{z=1} \psi(z;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c})$$

$$-\frac{1}{y}\psi(s-1;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-3/2-i\infty}^{-3/2+i\infty} \Gamma(w)\, y^w\, \psi(s+w;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{c})\, dw.$$

Wendet man Hilfssatz 3.2 auf den dritten Summanden der rechten Seite mit $\varepsilon_0 = (1-\varepsilon)/2$ und auf den vierten Summanden mit $\varepsilon_0 = 1 - \varepsilon/2$ an, so folgt die Behauptung. ■

Bemerkung. In jeder Schar mod $\mathfrak{a}$ assoziierter Zahlen $\nu \succ 0$ gibt es ein Element mit

$$N(\nu)^{1/n} \ll \nu^{(p)} \ll N(\nu)^{1/n} \quad (p = 1, \ldots, n). \tag{3.5}$$

Wegen $A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) = A_m(\eta\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a})$ für alle $\eta \in \mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ wird daher o.B.d.A. vorausgesetzt, daß die Zahl $\nu \succ 0$ (3.5) erfüllt.

4. Asymptotische Entwicklung der erzeugenden Funktion. Es sei $\gamma \in K$, und $\mathfrak{f} = (\hat{\varphi})$ sei der Nenner von $(\gamma)\mathfrak{d}$. Man setze

$$\gamma = \hat{\beta}/\hat{\varphi}\delta, \quad (\hat{\beta}, \hat{\varphi}) = 1. \tag{4.1}$$

Die ganzen Ideale $\mathfrak{f}_1 = (\hat{\varphi}_1)$ und $\mathfrak{f}_2 = (\hat{\varphi}_2)$ seien durch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}$ bestimmt durch $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2$, $q(\mathfrak{f}_1)|\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{f}_2, \mathfrak{a}) = 1$. α sei eine ganze algebraische Zahl mit $(\alpha, \mathfrak{a})$ quadratfrei. Λ sei ein Größencharakter mod $\mathfrak{a}$, gegeben durch

$$\Lambda(\hat{\mu}) = \prod_{p=1}^{n} |\hat{\mu}^{(p)}|^{-i\nu_p}, \quad \hat{\mu} \neq 0.$$

Man setze

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{f}\cdot(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})^{-1} = (\hat{\xi}) \quad \text{mit } \hat{\xi} := \hat{\alpha}\hat{\varphi}(\hat{\alpha}, \hat{\varphi})^{-1}.$$

$w = (w_1, \ldots, w_n) \in \boldsymbol{C}^n$ sei durch $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ und ν definiert durch

$$w_p := x_p + i\frac{1}{\nu^{(p)}} \quad (p = 1, \ldots, n).$$

Man definiere $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \boldsymbol{R}^n$ als

$$\theta_p := \pi/2 - |\operatorname{Arg}(-iw_p)| > 0 \quad (p = 1, \ldots, n),$$

ferner

$$L_\theta(\varepsilon) := \max_{1 \leq p \leq n} \frac{1}{\theta_p} |\log|\varepsilon^{(p)}|| \quad \text{für } \varepsilon \in \mathfrak{E}.$$

$\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ seien Grundeinheiten mod $\mathfrak{c}$, welche die Bedingung von Hilfssatz 1.1 bei Rausch, [15], erfüllen. Bezüglich derselben seien die Zahlen $E_p(b)$ gemäß (3.1) gebildet.

Mit obigem w (in Abhängigkeit von x) erkläre man als erzeugende Funktion

$$F(x, \Lambda, \alpha) := \sum_{\substack{\xi \succ 0 \\ \xi \equiv \alpha (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a})}} \Lambda(\xi)\mu^2(\xi)e(\operatorname{Sp}(\xi w)).$$

Ziel dieses Paragraphen ist es, die Asymptotik für $F(x+\gamma, \Lambda, \alpha)$ in Hilfssatz 4.10 zu beweisen.

Bekannten Eigenschaften der Gammafunktion entnimmt man

Hilfssatz 4.1. *Im Streifen $1/2 \leq \sigma \leq 2$ gilt für $u_1, \ldots, u_n \in \boldsymbol{R}$:*

$$\prod_{p=1}^{n} (-iw_p)^{-(s+iu_p)}\Gamma(s+iu_p) \ll |N(w)|^{-\sigma} \exp\left(-\sum_{q=1}^{n} \theta_q|t+u_q|\right) \prod_{p=1}^{n} (1+|t+u_p|)^{\sigma-1/2}.$$

Hilfssatz 4.2. *Es seien $1/2 \leq \sigma_0 \leq 2$ und $0 \leq \sigma_1 \leq 3$. Mit $s = \sigma_0 + it$ gilt:*

$$G(\sigma_0, \sigma_1; w) := \sum_b \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} |P_b(s, \sigma_1; w)ds| \ll R(\mathfrak{c})|N(w)|^{-\sigma_0}(\theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_n)^{-(\sigma_0+\sigma_1+1/2)},$$

$$P_b(s, \sigma_1; w) := \prod_{p=1}^{n} (1+|t+E_p(b)|)^{\sigma_1} \cdot \frac{\Gamma(s+iE_p(b))}{(-2\pi i w_p)^{s+iE_p(b)}},$$

wobei die Summation über alle $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \boldsymbol{Z}^{n-1}$ läuft.

Bemerkung. Im Falle $n = 1$ ist, wie auch in den folgenden Hilfssätzen, die Summation über b wegzulassen.

Beweis. Mit Hilfssatz 4.1 folgt:

$$G(\sigma_0, \sigma_1; w)$$
$$\ll |N(w)|^{-\sigma_0} \sum_b \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{n} (1+|t+E_p(b)|)^{\sigma_0+\sigma_1-1/2} \exp\left(-\sum_{q=1}^{n} \theta_q|t+E_q(b)|\right)dt.$$

Analog zu [15], Hilfssatz 2.1, folgt für $n > 1$ mit einer Körperkonstanten $c > 0$:

$$\exp\left(-\tfrac{1}{4}\sum_{q=1}^{n} \theta_q|t+E_q(b)|\right) \leq \exp\left(-c\sum_{q=1}^{n-1} \frac{|b_q|}{L_\theta(\eta_q)}\right).$$

Wie in [15], Hilfssatz 2.2, erhält man:

$$\sum_b \exp\left(-c\sum_{q=1}^{n-1} \frac{|b_q|}{L_\theta(\eta_q)}\right) \ll \frac{\theta_{q_0}}{\theta_1 \cdot \ldots \cdot \theta_n} \cdot R(\mathfrak{c}),$$

mit $\theta_{q_0} := \max\limits_{1 \leq q \leq n} \theta_q$.

Wegen $\exp(-yz)z^u \ll y^{-u}$ für $y > 0$, $z \geq 0$, $0 \leq u \leq 10$ folgt:

$$\exp\left(-\tfrac{1}{4}\sum_{q=1}^{n} \theta_q|t+E_q(b)|\right) \cdot \prod_{p=1}^{n} (1+|t+E_p(b)|)^{\sigma_0+\sigma_1-1/2} \ll \prod_{p=1}^{n} \theta_p^{-(\sigma_0+\sigma_1-1/2)}.$$

Mit Hilfe der Substitution $\theta_{q_0}(t+E_{q_0}(b)) \to t$ erkennt man, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{q=1}^{n} \theta_q|t+E_q(b)|\right)dt \ll 1/\theta_{q_0}.$$

Insgesamt folgt die Behauptung. ■

Die folgende Transformationsformel stammt von Hecke [10], §4, und Rademacher [13], §3.

HILFSSATZ 4.3. *Es sei* $z = (z_1, \dots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n$ *mit* $\operatorname{Re} z_p > 0$ $(p = 1, \dots, n)$. *Für* $\sigma_0 > 0$ *gilt*:

$$\sum_{\eta \in \mathfrak{E}(\mathfrak{c})} \exp(-\operatorname{Sp}(\eta z)) = \frac{1}{2\pi i R(\mathfrak{c})} \sum_b \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} P_b(s, 0; z)\, ds,$$

wobei die Summation über alle $b = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in \boldsymbol{Z}^{n-1}$ *läuft.*

Im folgenden sei

$$M_j(\hat{\tau}) := \{\hat{\varrho} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j^{-2});\ \hat{\tau}^2 \hat{\varrho} \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{a}}\}; \qquad M_j^+(\hat{\tau}) := \{\hat{\varrho} \in M_j(\hat{\tau});\ \hat{\tau}^2 \hat{\varrho} \succ 0\}$$

und

$$c(\hat{\varkappa}) := (\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\varphi}\hat{\varkappa})/(\hat{\alpha}, \hat{\varphi}).$$

Man definiere außerdem:

$$P_\Lambda(s; w) := \prod_{p=1}^{n} \frac{\Gamma(s - iV_p)}{(-2\pi i w_p)^{s - iV_p}} \qquad (\sigma > 0).$$

HILFSSATZ 4.4. *Für* $0 < \varepsilon < 1/4$ *gilt*:

$$F(x+\gamma, \Lambda, \alpha) = Z(x+\gamma, \Lambda, \alpha) + U_1(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y) + U_2(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y)$$

mit

$$(4.2)\quad Z(x+\gamma, \Lambda, \alpha) := \frac{1}{|\sqrt{d}|\, N(\mathfrak{a})} \cdot P_\Lambda(1; w) \cdot \sum_{\substack{\hat{\varkappa} \pmod{\mathfrak{a}} \\ \hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}\hat{\delta})}} e\left(\operatorname{Sp}\left(\frac{\alpha\hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}\hat{\delta}}\right)\right) \sum_{\substack{\mathfrak{t} \\ \mathfrak{c} \mid \mathfrak{t}^2 c(\hat{\varkappa})}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N(\mathfrak{t})^2};$$

$$U_1(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y) := \sum_{j=1}^{h} \sum_{\substack{(\hat{\tau}) \\ \hat{\tau} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j)}}' \mu(\hat{\tau}) \sum_{\hat{\varrho} \in M_j^+(\hat{\tau})}' \Lambda(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho})\, e\big(\operatorname{Sp}(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho}(w+\gamma))\big) \exp\left(-\frac{|N(\hat{\varrho})|}{y}\right);$$

$$U_2(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y) := \frac{1}{2\pi i\, 2^n N(\mathfrak{a})\, R(\mathfrak{c})\, e(\mathfrak{c})} \sum_v \sum_b \sum_{\substack{\hat{\varkappa} \pmod{\mathfrak{a}} \\ \hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}\hat{\delta})}} e\left(\operatorname{Sp}\left(\frac{\alpha\hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}\hat{\delta}}\right)\right)$$

$$\times \int_{(1+\varepsilon)/2 - i\infty}^{(1+\varepsilon)/2 + i\infty} \sum_{(\hat{\tau})_{\mathfrak{c}}}' \frac{(\Lambda\lambda_b v)(\hat{\tau}^2)\, \mu(\hat{\tau})}{|N(\hat{\tau})|^{2s}} \cdot \Omega(s; \hat{\tau}^2 c(\hat{\varkappa}), \Lambda\lambda_b v, \mathfrak{c}, y) \cdot P_b(s, 0; w)\, ds,$$

wobei die Summation über alle $b = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in \boldsymbol{Z}^{n-1}$ *läuft und* λ_b *durch* (3.2) *definiert ist.*

Beweis. Bekanntlich gilt: $\mu^2(\xi) = \sum_{\mathfrak{t}^2 \mid \xi} \mu(\mathfrak{t})$. Setzt man $\mathfrak{t} = (\hat{\tau})$, so gibt es wegen $\mathfrak{t}^2 \mid \xi$ ein ganzes $\hat{\varrho} \in \mathfrak{R}(\hat{\tau}^{-2})$ mit $\xi = \hat{\tau}^2 \hat{\varrho}$. Man erhält:

$$F(x+\gamma, \Lambda, \alpha) = U_1(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y) + \Sigma;$$

$$\Sigma := \sum_{j=1}^{h} \sum_{\substack{(\hat{\tau}) \\ \hat{\tau} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j)}}' \mu(\hat{\tau}) \sum_{\hat{\varrho} \in M_j^+(\hat{\tau})}' \Lambda(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho})\, e\big(\operatorname{Sp}(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho}(w+\gamma))\big) \left(1 - \exp\left(-\frac{|N(\hat{\varrho})|}{y}\right)\right).$$

Wegen $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{c}$ ist Λ auch ein Größencharakter mod $\mathfrak{c}$. Um die Beziehung $\Lambda(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho}) = \Lambda(\hat{\tau}^2)\Lambda(\hat{\varrho})$ ausnutzen zu können, muß man über alle mod $\mathfrak{c}$ nicht-assoziierten Zahlen von $\hat{\tau}$ summieren. Beachtet man (4.1) und zerlegt die Summe über $\hat{\varrho}$ in Restklassen $\hat{\varkappa} \pmod{\mathfrak{f}}$, so erhält man insgesamt:

$$(4.3)\qquad \Sigma = \frac{1}{e(\mathfrak{c})} \sum_{j=1}^{h} \sum_{\substack{\hat{\varkappa} \pmod{\mathfrak{f}} \\ \hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j^{-2})}} \sum_{\substack{(\hat{\tau})_{\mathfrak{c}} \\ \tau \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j)}}' \Lambda(\hat{\tau}^2)\, \mu(\hat{\tau})\, e\left(\operatorname{Sp}\left(\frac{\hat{\tau}^2 \hat{\varkappa}\hat{\beta}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)\right) \cdot f_j(\hat{\tau})$$

mit

$$f_j(\hat{\tau}) := \sum_{\substack{\hat{\varrho} \in M_j^+(\hat{\tau}) \\ \hat{\varrho} \equiv \hat{\varkappa} \pmod{\mathfrak{f}}}} \Lambda(\hat{\varrho}) \left(1 - \exp\left(-\frac{|N(\hat{\varrho})|}{y}\right)\right) e\big(\operatorname{Sp}(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho} w)\big).$$

Indem man in der absolut konvergenten Reihe $f_j(\hat{\tau})$ die mod $\mathfrak{c}$ assoziierten Zahlen $\hat{\varrho}$ zusammenfaßt und Hilfssatz 4.3 mit $z_p = -2\pi i \hat{\tau}^{(p)2} \hat{\varrho}^{(p)} w_p$ $(p = 1, \dots, n)$ anwendet, erhält man:

$$(4.4)\quad f_j(\hat{\tau}) = \frac{1}{2\pi i R(\mathfrak{c})} \sum_{\substack{(\hat{\varrho})_{\mathfrak{c}} \\ \hat{\varrho} \in M_j^+(\hat{\tau}) \\ \hat{\varrho} \equiv \hat{\varkappa} \pmod{\mathfrak{f}}}}' \Lambda(\hat{\varrho}) \left(1 - \exp\left(-\frac{|N(\hat{\varrho})|}{y}\right)\right)$$

$$\times \sum_b \int_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} \frac{\lambda_b(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho})}{|N(\hat{\tau}^2 \hat{\varrho})|^s} \cdot P_b(s, 0; w)\, ds.$$

Einsetzen von (4.4) in (4.3), Vertauschung von Summation und Integration und Auflösung der Bedingung $\hat{\tau}^2 \hat{\varrho} \succ 0$ durch Vorzeichencharaktere liefert:

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi i\, 2^n R(\mathfrak{c})\, e(\mathfrak{c})} \sum_{j=1}^{h} \sum_v \sum_b \int_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} \sum_{\substack{(\hat{\tau})_{\mathfrak{c}} \\ \hat{\tau} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j)}}' \frac{(\Lambda\lambda_b v)(\hat{\tau}^2)\, \mu(\hat{\tau})}{|N(\hat{\tau})|^{2s}} \cdot g_j(s, \hat{\tau}) \cdot P_b(s, 0; w)\, ds$$

mit

$$g_j(s, \hat{\tau}) := \sum_{\substack{(\hat{\varrho})_{\mathfrak{c}} \\ \hat{\varrho} \in M_j(\hat{\tau})}}' e\left(\operatorname{Sp}\left(\frac{\hat{\tau}^2 \hat{\varrho}\hat{\beta}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{|N(\hat{\varrho})|}{y}\right)\right) \cdot \frac{(\Lambda\lambda_b v)(\hat{\varrho})}{|N(\hat{\varrho})|^s}.$$

Auflösung der Kongruenz $\hat{\tau}^2 \hat{\varrho} \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{a}}$ mittels (3.4) ergibt

$$g_j(s, \hat{\tau}) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\hat{\varkappa} \pmod{\mathfrak{a}} \\ \hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}\hat{\delta})}} e\left(\operatorname{Sp}\left(\frac{\alpha\hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}\hat{\delta}}\right)\right) \cdot \Omega(s; \hat{\tau}^2 c(\hat{\varkappa}), \Lambda\lambda_b v, \mathfrak{c}, y).$$

Verschiebt man den Integrationsweg nach links auf die Gerade $\sigma = (1+\varepsilon)/2$ und beachtet nach Hilfssatz 3.1 das Residuum des Integranden bei $s = 1$, so folgt die Behauptung. ∎

Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{t} \neq (0)$ definiere man

$$E_2(\mathfrak{t}) := \begin{cases} 1, & \text{falls aus } \mathfrak{p}^l | \mathfrak{t} \text{ folgt: } 0 \leqslant l \leqslant 2, \text{ also } \mathfrak{t} \text{ 3-frei}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hilfssatz 4.5. *Für $\sigma > 1$ und $\hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}\hat{\delta})$ gilt:*

$$H(s, \hat{\varkappa}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \\ \mathfrak{c} | \mathfrak{t}^2 \mathfrak{c}(\hat{\varkappa})}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N(\mathfrak{t})^s} = \frac{E_2(\mathfrak{f}_2)\, \mu(q(\mathfrak{f}_2))}{\zeta_K(s) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_2} (N(\mathfrak{p})^s - 1) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})} \cdot \sum_{\substack{\mathfrak{m}|\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{f}_1 | \mathfrak{m}^2 (\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\varphi}\hat{\varkappa})}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{m})^s}.$$

Beweis. Mit Hilfe elementarer Umformungen zeigt man:

$$H(s, \hat{\varkappa}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}_2 | \mathfrak{t}^2 \\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{a}) = 1}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N(\mathfrak{t})^s} \cdot \sum_{\substack{\mathfrak{m}|\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{f}_1 | \mathfrak{m}^2 (\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\varphi}\hat{\varkappa})}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{m})^s}.$$

Die Behauptung folgt nun ähnlich wie im rationalen Fall [1], § 4. ■

Einsetzen der Gleichung von Hilfssatz 4.5 für $s = 2$ in (4.2) ergibt:

Hilfssatz 4.6. *Es gilt:*

$$Z(x+\gamma, \Lambda, \alpha) = \frac{E_2(\mathfrak{f}_2)\, \mu(q(\mathfrak{f}_2)) P_\Lambda(1; w)}{|\sqrt{d}|\, \zeta_K(2)\, N(\mathfrak{a}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_2} (N(\mathfrak{p})^2 - 1) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-2})}$$

$$\times \sum_{\substack{\hat{\varkappa} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a}) \\ \hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}\hat{\delta})}} e\left(\mathrm{Sp}\left(\frac{\alpha\hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}\hat{\delta}}\right)\right) \sum_{\substack{\mathfrak{m}|\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{f}_1 | \mathfrak{m}^2 (\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\varphi}\hat{\varkappa})}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{m})^2}.$$

Hilfssatz 4.7. *Es gilt:*

$$Z(x+\gamma, \Lambda, \alpha) \ll N(\nu)\, N(\mathfrak{f})^{-1} \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n} |x_p|)^{-1}.$$

Beweis. Aus $\mathfrak{m}|\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{f}_1 | \mathfrak{m}^2 (\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\varphi}\hat{\varkappa})$ folgt $\mathfrak{f}_1 | \mathfrak{m}\mathfrak{a}$, d.h. $N(\mathfrak{f}_1) \leqslant N(\mathfrak{a})^2$. Da die O-Konstante von $\mathfrak{a}$ abhängen darf, erhält man mit Hilfssatz 4.1:

$$Z(x+\gamma, \Lambda; \alpha) \ll |N(w)|^{-1} N(\mathfrak{f}_1)^{-1} E_2(\mathfrak{f}_2) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_2} (N(\mathfrak{p})^2 - 1)^{-1}.$$

Wegen $E_2(\mathfrak{f}_2) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_2} (N(\mathfrak{p})^2 - 1)^{-1} \leqslant \zeta_K(2) N(\mathfrak{f}_2)^{-1}$ und wegen (3.5) folgt die Behauptung. ■

Hilfssatz 4.8. *Für $0 < \varepsilon < 1/4$ gilt:*

$$U_2(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y)$$

$$\ll \frac{1}{|N(w)|^{(1+\varepsilon)/2}} \cdot \left\{ y^{(1-\varepsilon)/2} + \frac{N(\mathfrak{f})^{3/2}}{\varepsilon y (\Theta_1 \cdot \ldots \cdot \Theta_n)^2} \cdot \left(1 + \frac{N(\mathfrak{f})^{1/2}}{y^{1/2} (\Theta_1 \cdot \ldots \cdot \Theta_n)^{1/2}}\right)\right\}.$$

Beweis. Setzt man für $\Omega(s; \hat{\tau}^2 c(\hat{\varkappa}), \Lambda\lambda_b v, \mathfrak{c})$ die Entwicklung aus Hilfssatz 3.3 ein, so erhält man mit Hilfssatz 3.1:

$$U_2(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y) = U_3 + U_4$$

mit

$$U_3 := \frac{1}{2\pi i |\sqrt{d}|\, N(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\hat{\varkappa} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a}) \\ \hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}\hat{\delta})}} e\left(\mathrm{Sp}\left(\frac{\alpha\hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}\hat{\delta}}\right)\right) \int_{(1+\varepsilon)/2 - i\infty}^{(1+\varepsilon)/2 + i\infty} H(s, \hat{\varkappa})\, \Gamma(1-s)\, y^{1-s} P_\Lambda(s; w)\, ds;$$

$$U_4 := O\left(\frac{\zeta_K(1+\varepsilon) N(\mathfrak{c})^{3/2}}{R(\mathfrak{c}) y} \left(G((1+\varepsilon)/2, 1-\varepsilon/2, w) + \left(\frac{N(\mathfrak{c})}{y}\right)^{1/2} G((1+\varepsilon)/2, (3-\varepsilon)/2, w)\right)\right).$$

Bekanntlich gilt (vgl. [11]):

$$|\zeta_K(2s)|^{-1} \ll (\log(|2t|+2))^g \quad (\sigma > 1/2),$$

so daß mit Hilfssatz 4.5 und 4.1 folgt:

$$U_3 \ll |N(w)|^{-(1+\varepsilon)/2} y^{(1-\varepsilon)/2}.$$

Schätzt man U_4 mit Hilfe von Hilfssatz 4.2 weiter ab, und beachtet man $\zeta_K(1+\varepsilon) \ll 1/\varepsilon$, so folgt die Behauptung. ■

Hilfssatz 4.9. *Es gilt:*

$$U_1(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y) \ll y + y^{1/2} N(\nu)^{1/2}.$$

Beweis. Mit $\varrho \in (\hat{\alpha}_j^2)$ bzw. $\tau \in (\hat{\alpha}_j)^{-1}$ durchlaufen $\hat{\varrho} = \varrho\hat{\alpha}_j^{-2}$ bzw. $\hat{\tau} = \tau\hat{\alpha}_j$ alle ganzen ideale Zahlen aus $\mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j^{-2})$ bzw. $\mathfrak{R}(\hat{\alpha}_j)$. Ist A_K der Ring der ganzen algebraischen Zahlen in K und $c := \min_{1 \leqslant j \leqslant h} |N(\hat{\alpha}_j)|^2$, so folgt wegen $(\hat{\alpha}_j^2)$ ganz:

$$|U_1(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y)| \leqslant \sum_{j=1}^{h} \sum_{\substack{(\tau) \\ \tau \in (\hat{\alpha}_j)^{-1}}}' \sum_{\varrho \in A_K}' \exp\left(-\frac{|N(\varrho)|}{cy}\right) \cdot \exp(-2\pi \mathrm{Sp}(|\tau^2 \varrho| \nu^{-1}))$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \sum_{\substack{(\tau) \\ \tau \in (\hat{\alpha}_j)^{-1}}}' \sum_{\substack{(\varrho) \\ \varrho \in A_K}}' \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{E}} \exp\left(-\frac{|N(\varrho)|}{cy}\right) \cdot \exp(-2\pi \mathrm{Sp}(|\tau^2 \varepsilon\varrho| \nu^{-1})).$$

Sind $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ Grundeinheiten in K, so durchlaufen mit $m_q \in \mathbf{Z}$ und $s_q \in \{0, 1\}$ $\pm \varepsilon_1^{2m_1+s_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1}^{2m_{n-1}+s_{n-1}}$ alle Einheiten von K. Also folgt:

$$|U_1(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y)|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{h} \sum_{\substack{(\varrho) \\ \varrho \in A_K}}' \exp\left(-\frac{|N(\varrho)|}{cy}\right) \sum_{s_1, \ldots, s_{n-1} = 0}^{1} \sum_{\tau \in (\hat{\alpha}_j)^{-1}}' \exp(-2\pi \mathrm{Sp}(|\tau^2 \varepsilon_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1}^{s_{n-1}} \varrho| \nu^{-1})).$$

Da über (ϱ), $\varrho \neq 0$ summiert wird, kann man o.B.d.A. voraussetzen:

(4.5) $\quad c_1|N(\varrho)|^{1/n} N(\nu)^{-1/n} \leqslant |\varrho^{(q)} \nu^{(q)-1}| \leqslant c_2|N(\varrho)|^{1/n} N(\nu)^{-1/n} \quad (q = 1, \ldots, n),$

mit positiven Körperkonstanten c_1, c_2.

Stellt man τ mittels einer Basis von $(\hat{\alpha}_j)^{-1}$ dar, so erkennt man, daß $\mathrm{Sp}(|\tau^2 \varepsilon_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1}^{s_{n-1}}|)$ eine reelle positiv definite quadratische Form in ganzen $M_1, \ldots, M_n$ ist, deren Koeffizienten nur vom Körper abhängen. Also gibt es eine Konstante $c_3 > 0$, so daß für alle $s_1, \ldots, s_{n-1} \in \{0, 1\}$ gilt:

(4.6) $$\mathrm{Sp}(|\tau^2 \varepsilon_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1}^{s_{n-1}}|) \geqslant c_3(M_1^2 + \ldots + M_n^2).$$

Aus (4.5) und (4.6) folgt mit einer Körperkonstanten $c_4 > 0$:

$$U_1(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y)$$

$$\ll \sum_{\substack{(\varrho)\\ \varrho \in A_K}}' \exp\left(-\frac{|N(\varrho)|}{cy}\right) \sum_{M_1, \ldots, M_n = -\infty}^{\infty} \exp\left(-c_4|N(\varrho)|^{1/n} N(\nu)^{-1/n}(M_1^2 + \ldots + M_n^2)\right).$$

Aus dieser Ungleichung folgt nun leicht die Behauptung. ∎

Hilfssatz 4.10. *Für $N(\nu) > e^4$ gilt:*

$$F(x+\gamma, \Lambda, \alpha, y) = Z(x+\gamma, \Lambda, \alpha) + O\Big(N(\mathfrak{f})(\log N(\nu))^{2/3} \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n}|x_p|)$$

$$+ N(\mathfrak{f})^{1/2} N(\nu)^{1/2} (\log N(\nu))^{1/3} \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n}|x_p|)^{1/2}\Big).$$

Beweis. Mit (3.5) folgt:

$$\theta_p = \arcsin(1/(\nu^{(p)}|w_p|)) \gg (1 + N(\nu)^{1/n}|x_p|)^{-1}.$$

Wählt man

$$y = N(\mathfrak{f})(\log N(\nu))^{2/3} \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n}|x_p|), \qquad \varepsilon = (\log N(\nu))^{-1},$$

so folgt die Behauptung mit (3.5) und den Hilfssätzen 4.4, 4.8 und 4.9. ∎

5. Beweis von Satz 1 für $N = 2$. Für die ganze algebraische Zahl $\nu \succ 0$ gelte:

$$N(\nu) > N(\mathfrak{d})^2 e^4.$$

Für $M \geqslant 1$ sei

$$L(M) := \{\gamma \in K |\ (\gamma)\mathfrak{d} \text{ hat einen Nenner } \mathfrak{f} \text{ mit } 1 \leqslant N(\mathfrak{f}) \leqslant M\}.$$

Bekanntlich gilt:

(5.1) $$\sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1})\\ (\gamma)\mathfrak{d} \text{ hat Nenner } \mathfrak{f}}} 1 = \varphi(\mathfrak{f}).$$

Zum Beweis von Satz 1 verwende man die Rademachersche Version der Siegelschen Fareyzerschneidung, [13], Hilfssätze 2–4:

Hilfssatz 5.1. *Es sei $M > N(\mathfrak{d})$. Für $\gamma \in L(M)$ sei $\mathfrak{G}_\gamma$ bzw. $\mathfrak{H}_\gamma$ die Menge aller $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ mit*

$$\prod_{p=1}^{n} (1 + M^{2/n}|z_p - \gamma^{(p)}|) \leqslant \frac{2^n M}{N(\mathfrak{f})} \quad \text{bzw.} \quad \leqslant \frac{M}{\sqrt{N(\mathfrak{d})}\, N(\mathfrak{f})}.$$

Der $\mathbf{R}^n$ läßt sich in Jordan-meßbare Bereiche $\mathfrak{F}_\gamma$ zerschneiden, $\gamma \in L(M)$, so daß gilt:

I. *γ ist der einzige Punkt aus $L(M)$, der im Inneren von $\mathfrak{F}_\gamma$ enthalten ist.*
II. *Ist $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \pmod{\mathfrak{d}^{-1}}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in L(M)$, so sind $\mathfrak{F}_{\gamma_1}$ und $\mathfrak{F}_{\gamma_2}$ kongruent.*
III. *Für jedes $\gamma \in L(M)$ gilt:*

$$\mathfrak{H}_\gamma \subseteq \mathfrak{F}_\gamma \subseteq \mathfrak{G}_\gamma.$$

Im folgenden wähle man

$$M = N(\nu)^{1/2}.$$

Es sei $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{d}^{-1}$. Man definiere $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ durch

$$z_q = \sum_{l=1}^{n} u_l \Omega_l^{(q)}, \qquad u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Durch die Transformation $z \to u$ gehe $\mathfrak{F}_\gamma$ in $\mathfrak{F}'_\gamma$ über. Es sei

$$\mathfrak{E}'_\gamma := \mathbf{R}^n - \mathfrak{F}'_\gamma.$$

$A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a})$ besitzt die Darstellung (vgl. [13], § 6.1)

(5.2) $$e^{-2\pi n} A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) = \int_0^1 \cdots \int \prod_{j=1}^{m} F(z, \Lambda_j, \alpha_j)\, e(-\mathrm{Sp}(\nu z))\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n.$$

Da der Integrand in (5.2) für mod $\mathfrak{d}^{-1}$ kongruente z jeweils denselben Wert hat, kann man nach Hilfssatz 5.1 das von z durchlaufene Fundamentalparallelotop mod $\mathfrak{d}^{-1}$ ersetzen durch die Vereinigung der $\mathfrak{F}_\gamma$, die zu einem vollen System mod $\mathfrak{d}^{-1}$ inkongruenter $\gamma \in L(M)$ gehören. Man erhält

(5.3) $$e^{-2\pi n} A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) = \sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1})\\ 1 \leqslant N(\mathfrak{f}) \leqslant M}} \int \cdots \int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \prod_{j=1}^{m} F(z, \Lambda_j, \alpha_j)\, e(-\mathrm{Sp}(\nu z))\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n.$$

Man zerlege den Ausdruck $A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a})$ in (5.3) wie folgt

(5.4) $$e^{-2\pi n} A_m(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}) = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

mit

$$L_1 := \sum_{\mathfrak{f}} \sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ (\gamma)\mathfrak{d} \text{ hat Nenner } \mathfrak{f}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} Z(z, \Lambda_j, \alpha_j) e(-\mathrm{Sp}(\nu z))\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n;$$

$$L_2 := - \sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ N(\mathfrak{f}) > M}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} Z(z, \Lambda_j, \alpha_j) e(-\mathrm{Sp}(\nu z))\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n;$$

$$L_3 := - \sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ 1 \le N(\mathfrak{f}) \le M}} \int_{\mathfrak{E}'_\gamma} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} Z(z, \Lambda_j, \alpha_j) e(-\mathrm{Sp}(\nu z))\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n;$$

$$L_4 := \sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ 1 \le N(\mathfrak{f}) \le M}} \int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \cdots \int \Big(\prod_{j=1}^{m} F(z, \Lambda_j, \alpha_j) - \prod_{j=1}^{m} Z(z, \Lambda_j, \alpha_j) \Big) \times e(-\mathrm{Sp}(\nu z))\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n.$$

Man definiere

$$x := (x_1, \ldots, x_n) := z - \gamma.$$

Analog wie in [13], § 6.5, zeigt man für eine Konstante $\beta > 1$:

$$(5.5) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n} |x_p|)^{-\beta}\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n \ll \frac{1}{N(\nu)};$$

$$(5.6) \qquad \int_{\mathfrak{E}'_\gamma} \cdots \int \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n} |x_p|)^{-\beta}\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n \ll_\varepsilon N(\nu)^{-(\beta+1)/2+\varepsilon} N(\mathfrak{f})^{\beta-1},$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Dabei bringt "$\ll_\varepsilon$" zum Ausdruck, daß die O-Konstante von $\varepsilon > 0$ abhängen darf. Setzt man in (5.5) bzw. (5.6) $\beta = m$, so erhält man mit Hilfssatz 4.7 und (5.1)

HILFSSATZ 5.2. *Mit dem in Satz 1 definierten β_1 gilt:*

$$L_j \ll N(\nu)^{\beta_1} \quad (j = 2, 3).$$

HILFSSATZ 5.3. *Für $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \boldsymbol{R}^n$ gilt:*

$$F(u, \Lambda_j, \alpha_j) \ll N(\nu).$$

Beweis. Wegen (3.5) folgt mit einer Konstanten $c > 0$:

$$F(u, \Lambda_j, \alpha_j) \le \sum_{\xi \succ 0} \exp\Big(- \frac{c}{N(\nu)^{1/n}} \cdot \mathrm{Sp}(|\xi|) \Big).$$

Zerlegt man den Bereich $\xi \succ 0$ in Bereiche $\{\xi \in A_K |\ P_q \le \xi^{(q)} < P_q + 1;\ q = 1, \ldots, n\}$, $(P_1, \ldots, P_n) \in N_0^n$, so folgt leicht die Behauptung. ∎

HILFSSATZ 5.4. *Es gilt:*

$$\sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ 1 \le N(\mathfrak{f}) \le M}} \int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \cdots \int |F(z, \Lambda_k, \alpha_k)|\, |F(z, \Lambda_l, \alpha_l)|\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n \ll N(\nu).$$

Beweis. Es ist

$$\int_0^1 \cdots \int |F(z, \Lambda_j, \alpha_j)|^2\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n = \sum_{\substack{\xi \succ 0 \\ \xi \equiv \alpha_j (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a})}} \mu^2(\xi) \exp(-2\pi\, \mathrm{Sp}(|\xi|\nu^{-1})) \ll N(\nu).$$

(Letztere Ungleichung folgt wie in Hilfssatz 5.3.)

Da der Integrand in Hilfssatz 5.4 für mod $\mathfrak{d}^{-1}$ kongruente z denselben Wert hat, folgt mit Hilfssatz 5.1 und Cauchy–Schwarz die Behauptung. ∎

HILFSSATZ 5.5. *Mit den in Satz 1 definierten β_1, β_2 gilt:*

$$L_4 \ll N(\nu)^{\beta_1} (\log N(\nu))^{\beta_2}.$$

Beweis. Hilfssatz 5.1 ergibt mit $z \in \mathfrak{F}_\gamma$:

$$(5.7) \qquad \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n} |x_p|) \le \frac{2^n N(\nu)^{1/2}}{N(\mathfrak{f})}.$$

Mit den Hilfssätzen 4.7, 4.10 und mit (5.7) erhält man

$$(5.8) \qquad F_j := F(x + \gamma, \Lambda_j, \alpha_j) \underset{\varepsilon}{=} Z_j + U_j$$

mit

$$(5.9) \qquad Z_j \ll Z := N(\nu) N(\mathfrak{f})^{-1} \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n} |x_p|)^{-1};$$

$$(5.10) \qquad U_j \ll U := N(\mathfrak{f})^{1/2} N(\nu)^{1/2} (\log N(\nu))^{1/3} \prod_{p=1}^{n} (1 + N(\nu)^{1/n} |x_p|)^{1/2}.$$

Aus (5.8), (5.9) und (5.10) folgt:

$$(5.11) \qquad \prod_{j=1}^{m} F_j - \prod_{j=1}^{m} Z_j \ll U \Big(\sum_{j=0}^{m-2} |F_1 \cdot \ldots \cdot F_{m-2-j}|\, |F_{m-1-j}|^{j+1} + Z^{m-1} \Big).$$

Mit (5.5) und (5.1) erhält man:

$$\sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ 1 \le N(\mathfrak{f}) \le M}} \int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \cdots \int U Z^{m-1}\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n \ll N(\nu)^{\beta_1} (\log N(\nu))^{1/3}.$$

Wegen (5.11) bleibt zu zeigen

$$(5.12) \qquad \sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ 1 \le N(\mathfrak{f}) \le M}} \int_{\mathfrak{F}'_\gamma} \cdots \int U \sum_{j=0}^{m-2} |F_1 \cdot \ldots \cdot F_{m-2-j}|\, |F_{m-1-j}|^{j+1}\, du_1 \cdot \ldots \cdot du_n \ll N(\nu)^{\beta_1} (\log N(\nu))^{\beta_2}.$$

Wegen (5.7) folgt:

$$(5.13) \qquad U \ll N(\nu)^{3/4} (\log N(\nu))^{1/3}.$$

Für $m = 3$ folgt (5.12) mit (5.13) und Hilfssatz 5.4.

Es sei $m = 4$. Sicherlich gilt:

$$U|F_j| \ll U^2 + UZ.$$

(5.9) bzw. (5.10) ergibt:

$$UZ \ll N(\nu)^{3/2}(\log N(\nu))^{1/3}.$$

Zusammen mit (5.13) erhält man

$$U|F_j| \ll N(\nu)^{3/2}(\log N(\nu))^{2/3}.$$

Mit Hilfssatz 5.4 folgt nun (5.12).

Es sei $m \geqslant 5$. Sicherlich gilt:

$$U|F_k||F_l| \ll U^3 + UZ^2.$$

Wegen (5.9) bzw. (5.10) ist

$$UZ^2 \ll N(\nu)^{5/2}(\log N(\nu))^{1/3}.$$

Zusammen mit (5.13) erhält man

$$U|F_k||F_l| \ll N(\nu)^{5/2}(\log N(\nu))^{1/3}. \tag{5.14}$$

Die Summe $\sum_{j=0}^{m-2} |F_1 \cdot \ldots \cdot F_{m-2-j}||F_{m-1-j}|^{j+1}$ besteht aus $m-1$ Summanden, welche das Produkt von $m-1$ F_j's sind. Von diesen $m-1$ F_j spalte man jeweils zwei ab, um $U|F_k||F_l|$ wie in (5.14) abzuschätzen. Von den restlichen $m-3$ F_j's schätze man $m-5$ mittels Hilfssatz 5.3 ab. Wendet man nun Hilfssatz 5.4 an, so folgt (5.12). ■

HILFSSATZ 5.6. *Es gilt:*

$$L_1 = \left(\frac{N(\nu)}{N(\mathfrak{a})}\right)^{m-1} \frac{e^{-2\pi n} \prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu)}{|\sqrt{d}|^{m-1} \zeta_K^m(2)} T_m \cdot S_2(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}).$$

Beweis. Wegen $z = x + \gamma$ folgt mit Hilfssatz 4.6:

$$L_1 = \frac{L_0}{|\sqrt{d}|^m \zeta_K^m(2) N(\mathfrak{a})^m \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-2})^m} \times \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} P_{\Lambda_j}(1; w) e(-\mathrm{Sp}(\nu x)) du_1 \cdot \ldots \cdot du_n$$

mit

$$L_0 := \sum_{\mathfrak{f}} E_2(\mathfrak{f}_2) \mu^m(q(\mathfrak{f}_2)) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}_2} (N(\mathfrak{p})^2 - 1)^{-m} \sum_{\substack{\gamma (\mathrm{mod}\, \mathfrak{d}^{-1}) \\ (\gamma)\mathfrak{d} \text{ hat Nenner } \mathfrak{f}}} e(-\mathrm{Sp}(\nu\gamma))$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{\substack{\hat{\varkappa} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a}) \\ \hat{\varkappa} \in \mathfrak{R}(\hat{\alpha}\hat{\delta})}} e\left(\mathrm{Sp}\left(\frac{\alpha_j \hat{\varkappa}}{\hat{\alpha}\hat{\delta}}\right)\right) \sum_{\substack{\mathfrak{m}|\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{f}_1 | \mathfrak{m}^2 (\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\phi}\hat{\varkappa})}} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{m})^2} \right).$$

Nach Rademacher [13], § 6.6, § 7.1, gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{j=1}^{m} P_{\Lambda_j}(1; w) e(-\mathrm{Sp}(\nu x)) du_1 \cdot \ldots \cdot du_n = e^{-2\pi n} N(\nu)^{m-1} |\sqrt{d}| T_m \prod_{j=1}^{m} \Lambda_j(\nu).$$

Nach einer etwas komplizierten, jedoch elementaren Rechnung erhält man

$$L_0 = N(\mathfrak{a}) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-2})^m \cdot S_2(\nu; \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathfrak{a}). \; ■$$

Satz 1 folgt aus (5.4) und den Hilfssätzen 5.2, 5.5, 5.6. ■

Literaturverzeichnis

[1] C. L. Barham und T. Estermann, *On the representations of a number as the sum of four or more N-numbers*, Proc. London Math. Soc. (2), 38 (1935), 340–353.

[2] C. J. A. Evelyn und E. H. Linfoot, *On a problem in the additive theory of numbers* (I), Math. Z. 30 (1929), 433–448.

[3] – – (II), J. Math. 164 (1931), 131–140.

[4] – – (III), Math. Z. 34 (1932), 637–644.

[5] – – (IV), Ann. Math. 32 (1931), 261–270.

[6] – – (V), Quart. J. Math. 3 (1932), 152–160.

[7] – – (VI), ibid. 4 (1933), 309–314.

[8] R. Friedrich, *Über die Zerfällung einer Zahl in Summanden in beliebigen algebraischen Zahlkörpern*, Mitt. Math. Ges. Hamburg 7 (1931), 31–58.

[9] E. Hecke, *Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen*, Zweite Mitteilung, Math. Z. 6 (1920), 11–51.

[10] – *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen*, Erster Teil, Abh. Math. Sem. Hamburg, Univ. 1 (1921), 102–126.

[11] E. Landau, *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes*, Math. Ann. 56 (1903), 645–670.

[12] L. Mirsky, *On a theorem in the additive theory of numbers due to Evelyn and Linfoot*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 44 (1948), 305–312.

[13] H. Rademacher, *Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper III. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen in beliebigen Zahlkörpern*, Math. Z. 27 (1927), 321–426.

[14] – *On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications*, ibid. 72 (1959), S. 192–204.

[15] U. Rausch, *Geometrische Reihen in algebraischen Zahlkörpern*, Acta Arith. 47 (1986), 313–345.

[16] R. Sita Rama Chandra Rao and G. Sri Rama Chandra Murty, *On Mirsky's generalisation of a problem of Evelyn–Linfoot and Page in additive theory of numbers*, J. Reine Angew. Math. 309 (1979), 92–99.
[17] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1966.

Eingegangen am 14.10.1988 (1879)

ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

On the greatest prime factor of $\prod_{k=1}^{x} f(k)$

by

P. Erdős (Budapest) and A. Schinzel (Warszawa)

In memory of Trygve Nagell

Let $P(n)$ denote the greatest prime factor of n. T. Nagell was the first to give a non-trivial lower bound for $P(\prod_{k=1}^{x} f(k))$, where f is an arbitrary irreducible polynomial of degree greater than 1. In [5] he proved

$$P(\prod_{k=1}^{x} f(k)) > c(f, \varepsilon)\, x(\log x)^{1-\varepsilon} \quad \text{for all } \varepsilon > 0.$$

In 1951 the first named author improved considerably the above inequality by proving that for $x > x_0(f)$

$$P(\prod_{k=1}^{x} f(k)) > x(\log x)^{c(f)\log\log\log x} \quad \text{with } c(f) > 0. \tag{1}$$

In the same paper [1] he has also claimed that

$$P(\prod_{k=1}^{x} f(k)) > x\exp((\log x)^{\delta(f)}) \quad \text{with } \delta(f) > 0. \tag{2}$$

Our efforts to reconstruct the proof of the latter estimate have been unsuccessful. Instead we have proved the following

THEOREM 1. *Let $f \in \mathbf{Z}[x]$ be an irreducible polynomial of degree $l > 1$. There exists an absolute constant $c_1 > 0$ such that for $x > x_1(f)$*

$$P(\prod_{k=1}^{x} f(k)) > x\exp\exp(c_1(\log\log x)^{1/3}).$$

In the sequel we shall denote the nth iterate of $\log x$ by $\log_n x$, the number of solutions of the congruence $f(k) \equiv 0 \pmod m$ in the interval $1 \leqslant k \leqslant x$ by