References

[1] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, Cambridge 1957.
[2] H. Davenport and W. M. Schmidt, *Approximation to real numbers by quadratic irrationals*, Acta Arith. 13 (1967), 169–176.
[3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford 1968.
[4] G. Harman, Ph. D. Thesis, London 1982.
[5] C. A. Rogers, *The signatures of errors of simultaneous diophantine approximations*, Proc. London Math. Soc. (2) 52 (1951), 186–190.
[6] W. M. Schmidt, *Two questions in diophantine approximation*, Monatsh. Math. 82 (1976), 237–245.
[7] V. G. Sprindžuk, *Metric Theory of Diophantine Approximations*, Winson/Wiley, 1979.
[8] P. Thurnheer, *Zur diophantischen Approximation von zwei reellen Zahlen*, Acta Arith. 44 (1984), 201–206.

EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE – ZÜRICH
CH-8092 Zürich
Schweiz

Received on 20.4.1988 (1816)

ACTA ARITHMETICA
LIV (1990)

Über die Anzahl quadratvoller Zahlen in kurzen Intervallen und ein verwandtes Gitterpunktproblem Corrigendum zu Acta Arithmetica L(1988), 195–201 (¹)

von

PETER GEORG SCHMIDT (Marburg)

6. Vorbemerkungen. Wie ich in §7 darlegen werde, ist der auf B. R. Srinivasan zurückgehende Hilfssatz 2 nicht gesichert. Darauf beruhen aber die Sätze 1 und 2 und (1.1)–(1.2). Statt dessen werde ich in §8 das etwas schwächere Resultat $\Delta_{2,3,6}(x) \ll (x\log^{16}x)^{1/7}$ erzielen, also (1.1) für $1/7 < \theta < 1/2$ beweisen. Herr H. Menzer (Jena) hat mir in einem Brief vom 27.3.88 mitgeteilt, daß er $\Delta_{2,3,6}(x) \ll x^{7/48}\log^3 x$ zeigen kann.

7. Srinivasansche Exponentenpaare. B. R. Srinivasan [8] verallgemeinerte die Phillipssche Theorie der Exponentenpaare zur Abschätzung eindimensionaler Exponentialsummen [4] auf den mehrdimensionalen Fall.

W. G. Nowak [13] äußerte, ohne jedoch konkrete Fehlerhinweise zu geben, Zweifel an der Korrektheit der Srinivasanschen Theorie. Ich teile seine Auffassung:

Srinivasan übersieht, daß die in [15] auf Seite 333 auftretenden Größen ξ_1' im allgemeinen von x_2 abhängen: $\xi_1' = \xi_1'(x_2)$. Statt $|(\partial/\partial x_2)^2 f(x_1, x_2)| \geqslant r_2$ bräuchte er $|(d/dx_2)^2 f(\xi_1'(x_2), x_2)| \gg r_2$. Gravierender dürfte diese Ungenauigkeit in den Beweisen der Lemmata 4, 5 und 6 in [16] sein (siehe etwa [16], Seite 181, Zeilen 10–17). Sie wird sich meines Erachtens, wenn überhaupt, nur mit großem Aufwand beheben lassen. Auf den Lemmata 4, 5 und 6 in [16] basieren aber die dortigen Theoreme 1 und 2 und darauf die in [8] entwickelte Theorie der Exponentenpaare. Daher ist auch [9], Theorem 5 und folglich Hilfssatz 2 nicht gesichert.

8. Corrigendum.

SATZ 4. *Für* $x \to \infty$ *gilt* $\Delta_{2,3,6}(x) \ll x^{1/7}(\log x)^{2+2/7}$.

Satz 4 folgt unmittelbar aus Hilfssatz 3 und dem Korollar zu

(¹) In dieser Arbeit finden sich die §§ 1–5, Sätze 1–3, Hilfssätze 1–4, Formeln (1.1)–(5.3) und Literaturhinweise [1]–[11].

HILFSSATZ 5. *Sind ϱ, σ, y, z, M, $N > 0$; $\omega := 1+\varrho+\sigma$; M und N durch $M^{1+\varrho} N^{\sigma} = z$ verknüpft; $z \leqslant y$ und*

$$D_1 := \{(m, n) \in N^2 |\ z/2 < m^{1+\varrho} n^{\sigma} \leqslant z,\ N < n \leqslant 2N,\ m > n\} \neq \emptyset;$$

so gilt $1/2 \leqslant N < M$, $z > 2$ und mit nur von ϱ und σ abhängiger $\ll$-Konstanten

$$S := \sum_{(m,n)\in D_1} \psi\left(\frac{y}{m^{\varrho} n^{\sigma}}\right) \ll \{ y^2 z^{11/\omega - 2} (N/M)^{6 - 11\sigma/\omega} \log^2 y\}^{1/7}.$$

KOROLLAR. *Sei (α, β, γ) eine Permutation von $(2, 3, 6)$. Setzt man $\varrho := \beta/\alpha$, $\sigma := \gamma/\alpha$, $y := x^{1/\alpha}$, $z := \xi^{1/\alpha}$, so ist $11/\omega = \alpha$, $4 < \xi \leqslant x$ und*

$$S = \sum_{\substack{2^{-\alpha}\xi < m^{\alpha+\beta} n^{\gamma} \leqslant \xi \\ N < n \leqslant 2N, m > n}} \psi\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^{\beta} n^{\gamma}}}\right) \ll \{(x^2 \xi^{\alpha-2})^{1/\alpha} (N/M)^{6-\gamma} \log^2 x\}^{1/7} \leqslant (x \log^2 x)^{1/7}.$$

Bemerkung. Die unkonventionelle Aufspaltung der in Hilfssatz 3 definierten Summen $S_{\alpha,\beta,\gamma}(x)$ in je $O(\log^2 x)$ Teilsummen S bewirkt, daß die Summationsbereiche D_2 und D_3 der weiter unten auftretenden Summen S_2 und S_3 bis auf $O(\log x)$ Ausnahmen Intervalle des $\boldsymbol{R}^2$ sind

Beweis des Hilfssatzes 5. Aus $D_1 \neq \emptyset$ folgt zunächst $1/2 \leqslant N < M \ll m < M$ und

$$M^{\omega} > z > 2. \tag{8.1}$$

I. Dieser erste Abschnitt des Beweises ist analog zu [14], Seite 408, Zeilen 14 bis 18 und Seite 411, Zeile 22 bis Seite 413, Zeile 3. Statt [14], (2) hat man jetzt

$$S \ll K^{-1} MN + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \min(1/\varkappa, K/\varkappa^2) |S_1| \quad \text{für } K > 0 \tag{8.2}$$

mit

$$S_1 := \sum_{(m,n)\in D_1} e(-f_1), \quad f_1 := \varkappa y m^{-\varrho} n^{-\sigma} \gg \ll \varkappa y M/z\ (^2),$$

statt [14], (20), wenn man abkürzend $\underline{\mu} := \varrho \varkappa y/z$ setzt und $u, v \in]1, 2]$ geeignet wählt,

$$S_1 \ll (\underline{\mu}^{-1} M)^{1/2} (|S_2| + N) + (\underline{\mu} M)^{1/3} N \tag{8.3}$$

mit

$$S_2 := \sum_{(\mu,n)\in D_2} e(-f_2), \quad f_2 := (1+\varrho)(\varrho^{-\varrho} \varkappa y \mu^{\varrho} n^{-\sigma})^{1/(1+\varrho)} \gg \ll \underline{\mu} M,$$

$$D_2 := \{(\mu, n) \in N^2 |\ \underline{\mu} \leqslant \mu < \underline{\mu} \min(u, zn^{-\omega}),\ N < n \leqslant vN\}$$

([2]) Freie Parameter (hier ϱ, σ, y, z, M, N, $\varkappa$, K) mögen ihrer letzten Vereinbarung oder Verwendung entsprechend eingeschränkt sein ($\varkappa$ also auf $\varkappa \in N$).

und statt [14], (22) und [14], (24)

$$S_2 \ll Q^{-1/2} \underline{\mu} N + \{Q^{-1} \underline{\mu} N \sum_{1 \leqslant q < Q} |S_3|\}^{1/2} \quad \text{für } 0 < Q \leqslant \underline{\mu} \tag{8.4}$$

mit

$$S_3 := \sum_{(\mu,n)\in D_3} e(-f_3), \quad D_3 := \{(\mu, n) \in D_2 |\ (\mu+q, n) \in D_2\} \subset D_2,$$

$$f_3(\mu, n) := q(\varrho \varkappa y n^{-\sigma})^{1/(1+\varrho)} \int_0^1 (\mu+qt)^{-1/(1+\varrho)}\, dt \gg \ll qM.$$

II. Sei $L := \log(\varkappa y)$. Geeignete Abschätzungen von S_3 gelingen mit zwei Sätzen von E. Krätzel: [12], Satz 2([3]), angewandt mit $a_1 := N$, $a_2 := \underline{\mu}$, $D := \{(n_1, n_2) |\ (n_2, n_1) \in D_3\}$, $f(t_1, t_2) := f_3(t_2, t_1)$, $\lambda := qM$ und $k := 3$, liefert

$$S_3 \ll (q\underline{\mu}^3 MN^2)^{1/4} L, \quad \text{falls } qM > \underline{\mu}.$$

Ist aber $qM \leqslant \underline{\mu}$, so folgt aus [12], Satz 1 in der Fassung [12], (10) $S_3 \ll \underline{\mu} L$. Daher ist([4])

$$\sum_{1 \leqslant q < Q} |S_3| \ll \sum_{1 \leqslant q \leqslant \underline{\mu}/M} \underline{\mu} L + \sum_{\underline{\mu}/M < q < Q} (q\underline{\mu}^3 MN^2)^{1/4} L$$
$$\ll \underline{\mu}^2 M^{-1} L + (Q^5 \underline{\mu}^3 MN^2)^{1/4} L,$$

und (8.4) ergibt

$$S_2 \ll Q^{-1/2} \{\underline{\mu} N + (\underline{\mu}^3 M^{-1} NL)^{1/2}\} + (Q\underline{\mu}^7 MN^6 L^4)^{1/8}.$$

Setzt man $\tilde{Q} := (\underline{\mu} M^{-1} N^2 L^{-4})^{1/5}$, so ist $\tilde{Q}^{-1/2} \underline{\mu} N = (\tilde{Q} \underline{\mu}^7 MN^6 L^4)^{1/8}$, und mit $Q := \min(\tilde{Q}, \underline{\mu})$ folgt

$$S_2 \ll (\tilde{Q}^{-1/2} + \underline{\mu}^{-1/2}) \{\underline{\mu} N + (\underline{\mu}^3 M^{-1} NL)^{1/2}\}$$
$$= (\underline{\mu}^9 MN^8 L^4)^{1/10} + (\underline{\mu}^{14} M^{-4} N^3 L^9)^{1/10} + \underline{\mu}^{1/2} N + (\underline{\mu}^2 M^{-1} NL)^{1/2}.$$

Verwendet man diese Abschätzung in (8.3), so erhält man

$$S_1 \ll (\underline{\mu}^2 M^3 N^4 L^2)^{1/5} + (\underline{\mu}^9 MN^3 L^9)^{1/10} + M^{1/2} N + (\underline{\mu} NL)^{1/2}, \tag{8.5}$$

da $(\underline{\mu}^2 M^3 N^4 L^2)^{1/5} \gg (\underline{\mu} M)^{1/3} N$ äquivalent ist zu der stets erfüllten Ungleichung $\underline{\mu}(M/N)^3 ML^6 \gg 1$.

Ist $1 < K \ll y$, so gilt

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varkappa^a \log^a(\varkappa y) \min(1/\varkappa, K/\varkappa^2) \ll \begin{cases} \log y & \text{für } a = 0, \\ \dfrac{1}{a(1-a)^2} K^a \log^a y & \text{für } 0 < a < 1. \end{cases}$$

([3]) In der dortigen Voraussetzung über H muß das Produkt entfallen.

([4]) Leere Summen mögen den Wert Null haben.

Daher folgt für diese K mit $\eta := z^{-1} y \log y$ aus (8.2) and (8.5)

$$S \ll K^{-1} MN + (K^2\eta^2 M^3 N^4)^{1/5} + (K^9\eta^9 MN^3)^{1/10} + M^{1/2} N \log y + (K\eta N)^{1/2}.$$

Setzt man $K := (\eta^{-2} M^2 N)^{1/7}$, so ist $0 < K \ll M^{3/7} \ll y$ und $K^{-1}MN = (K^2\eta^2 M^3 N^4)^{1/5}$, und mit $A := (\eta^2 M^5 N^6)^{1/14}$, $B := M^{1/2} N \log y$ und $C := (\eta^5 M^2 N^8)^{1/14}$ gilt

$$S \ll A^2 + A\eta^{1/2} + B + C \quad \text{für } K > 1. \tag{8.6}$$

Ferner gilt

$$S \ll A^2 \quad \text{für } K \leqslant 1, \tag{8.7}$$

da $S \ll MN$ und $A^2 = K^{-1}MN$ ist. Ich zeige nun

$$A\eta^{1/2} \gg C, \quad A^2 \gg B, \quad A \gg \eta^{1/2} \quad \text{für } K > 1. \tag{8.8}$$

$A\eta^{1/2} \gg C$ ist zu $\eta^4 M^3 \gg N^2$ äquivalent und daher erfüllt. $A^2 \gg B$ ist zu $(y/z)^4 (M/N)^2 M \gg \log^{10} y$ äquivalent. Aus (8.1) folgt aber $(y/z)^4 (M/N)^2 M > (y/z)^{1/\omega} \cdot 1^2 \cdot z^{1/\omega} = y^{1/\omega} \gg \log^{10} y$. Schließlich ist $A \gg \eta^{1/2}$ zu $M^5 N^6 \gg \eta^5$ äquivalent. Wegen $K > 1$ ist $M^2 N > \eta^2$, und daher $M^5 N^6 \gg (M^2 N)^{5/2} > \eta^5$. (8.6)–(8.8) ergeben

$$S \ll A^2 = \{y^2 z^{11/\omega - 2} (N/M)^{6 - 11\sigma/\omega} \log^2 y\}^{1/7},$$

und Hilfssatz 5 ist bewiesen.

Weitere Literatur

[12] E. Krätzel, *Zweifache Exponentialsummen und dreidimensionale Gitterpunktprobleme*, Banach Center Publ. 17 (1985), 337–369.
[13] W. G. Nowak, *Ein Satz zur Behandlung dreidimensionaler Gitterpunktprobleme*, J. Reine Angew. Math. 329 (1981), 125–142.
[14] P. G. Schmidt, *Zur Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung II*, Acta Arith. 13 (1968), 405–417.
[15] B. R. Srinivasan, *Lattice points in a circle*, Proc. Nat. Inst. Sc. India 29, A, No 3 (1963), 332–346.
[16] — *The lattice point problem of many-dimensional hyperboloids II*, Acta Arith. 8 (1963), 173–204.

Received on 22.11.1988 (1886)

ACTA ARITHMETICA
LIV (1990)

On linear recurrence relations satisfied by Pisot sequences
Addenda and errata

by

DAVID W. BOYD (Vancouver, B.C.)

The proof of Theorem 4 of [1] contains the incorrect inequality $t! < t^t e^{1-t}$. If this is replaced by the correct $t! < t^{t+1} e^{-t}$ the method of proof yields a weaker theorem, namely that θ is recurrent if $\theta > 11d \log d$. We present here a corrected proof of a stronger assertion, giving more details than presented in [1]. I would like to thank Mustapha Ben Amri Bettaieb for pointing out this error.

THEOREM 4. *Let θ be a Pisot or Salem number of degree d. If $\theta > 5d \log d$ then θ is recurrent. In fact, as $d \to \infty$, the assumption that $\theta > (2+o(1))\, d \log d$ implies that θ is recurrent. Furthermore the set of K admissible for θ is finite and effectively determinable.*

Proof. By Theorem 2 of [1], θ is recurrent if $\theta > 2^{d-2}$. Since $2^{d-2} < 5d \log d$ for $d \leqslant 8$ this implies Theorem 4 for these values of d, so we may assume $d \geqslant 9$. By Lemma 2 and Theorem 1 (a), θ will be recurrent if we can determine positive integers t and L so that $L^{t-d} > t!\, 3^d \theta^t$ and $L < (\theta - 1)^2$.

Choosing $L = [(\theta-1)^2]$ the second inequality holds and, since $L > (\theta-1)^2 - 1 = \theta(\theta-2)$, it suffices for the first inequality that $(\theta-2)^{t-d} > t!\, 3^d \theta^d$. Taking logarithms, it suffices to have $F(\theta, t, d) > 0$, where

$$F(\theta, t, d) = (t-d)\log(\theta-2) - d\log\theta - \log(t!) - d\log 3.$$

Differentiating F with respect to θ we find that $F_\theta > 0$ if $\theta > 2$ and $t \geqslant 2d$. Thus, for each $t \geqslant 2d$ there is a unique solution θ_0 of $F(\theta, t, d) = 0$ and $\theta > \theta_0$ implies $F(\theta, t, d) > 0$. For given d, it is natural to choose t so as to minimize θ_0. For large d, t and θ, $F \approx (t-2d)\log\theta - t\log t$, so that $\theta = t \log t/(t-2d)$. An elementary calculation shows that the minimum of θ occurs for $t = (2+o(1))\, d\log d$ as $d \to \infty$ with the corresponding value of $\theta_0 = (2+o(1))\, d \log d$. This suggests the second assertion of the Theorem. A more precise analysis is given below.

To obtain results valid for all $d \geqslant 9$, we first examine $F(\theta, t, d)$ numerically for small d. For example, we find that, for $d = 9$, the minimum value of θ_0 occurs for $t = 95$ giving $\theta_0 = 97.2978 = 4.920\, d \log d$. For $d = 10$, the minimum