ACTA ARITHMETICA
LIV (1989)

О представлении чисел суммами квадратичных форм $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$

Г. А. Ломадзе (Тбилиси)

Введение

1. На протяжении всего 19-го и начала 20-го столетия математики усердно занимались нахождением формул для арифметической функции $r_{2k}(n)$ — числа представлений натурального числа n суммой $2k$ квадратов целых чисел, т.е. суммой k простейших бинарных квадратичных форм $x_1^2+x_2^2$. К настоящему времени вычисления доведены до 32-х квадратов включительно.

Пусть $n = 2^\alpha u$ (α — целое $\geqslant 0$, u — нечетное),

$$\sigma_h(u) = \sum_{d|u} d^h, \quad \varrho_h(u) = \sum_{\delta d = n} (-1)^{(\delta-1)/2} d^h,$$

$$G(x_1, x_2) = x_1^4-3x_1^2x_2^2, \quad H(x_1, x_2) = x_1^8-28x_1^6x_2^2+35x_1^4x_2^4,$$

$$J(x_1, x_2) = x_1^{12}-66x_1^{10}x_2^2+495x_1^8x_2^4-462x_1^6x_2^6.$$

Известно (см., напр., [1], [10], [4], [5]), что

$$r_2(n) = 4\varrho_0(u),$$

$$r_4(n) = 8(2+(-1)^n)\sigma_1(u),$$

$$r_6(n) = 4(2^{2\alpha+2}-(-1)^{(u-1)/2})\varrho_2(u),$$

$$r_8(n) = (-1)^n 16\frac{2^{3\alpha+3}-15}{7}\sigma_3(u),$$

$$r_{10}(n) = \frac{4}{5}(2^{4\alpha+4}+(-1)^{(u-1)/2})\varrho_4(u)+\frac{16}{5}\sum_{x_1^2+x_2^2=n} G(x_1, x_2),$$

$$r_{12}(n) = 8(2+(-1)^n)\frac{2^{5\alpha+1}\cdot 5+21}{31}\sigma_5(u)+8\sum_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=n} G(x_1, x_2),$$

$$r_{14}(n) = \frac{4}{61}(2^{6\alpha+6}-(-1)^{(u-1)/2})\varrho_6(u)+\frac{728}{61}\sum_{x_1^2+\ldots+x_6^2=n} G(x_1, x_2),$$

$$r_{16}(n)=(-1)^n\frac{32}{17}\frac{2^{7\alpha+7}-255}{127}\sigma_7(u)+\frac{256}{17}\sum_{x_1^2+\ldots+x_8^2=n}G(x_1,x_2),$$

$$r_{18}(n)=\frac{4}{1385}\left(2^{8\alpha+8}+(-1)^{(u-1)/2}\right)\varrho_8(u)+\frac{4896}{277}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{10}^2=n}G(x_1,x_2)$$

$$-\frac{64}{1385}\sum_{x_1^2+x_2^2=n}H(x_1,x_2),$$

$$r_{20}(n)=\frac{8}{31}(2+(-1)^n)\frac{2^{9\alpha+1}\cdot 85+341}{511}\sigma_9(u)+\frac{648}{31}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{12}^2=n}G(x_1,x_2)$$

$$-\frac{32}{31}\sum_{x_1^2+\ldots+x_4^2=n}H(x_1,x_2),$$

$$r_{22}(n)=\frac{4}{50521}\left(2^{10\alpha+10}-(-1)^{(u-1)/2}\right)\varrho_{10}(u)$$

$$+\frac{1345608}{50521}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{14}^2=n}G(x_1,x_2)-\frac{236192}{50521}\sum_{x_1^2+\ldots+x_6^2=n}H(x_1,x_2),$$

$$r_{24}(n)=(-1)^n\frac{16}{691}\frac{2^{11\alpha+11}-4095}{2047}\sigma_{11}(u)$$

$$+\frac{24768}{691}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{16}^2=n}G(x_1,x_2)-\frac{8192}{691}\sum_{x_1^2+\ldots+x_8^2=n}H(x_1,x_2),$$

$$r_{26}(n)=\frac{4}{2702765}\left(2^{12\alpha+12}+(-1)^{(u-1)/2}\right)\varrho_{12}(u)$$

$$+\frac{2019888}{41581}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{18}^2=n}G(x_1,x_2)-\frac{938912}{41581}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{10}^2=n}H(x_1,x_2)$$

$$+\frac{256}{2702765}\sum_{x_1^2+x_2^2=n}J(x_1,x_2),$$

$$r_{28}(n)=\frac{8}{5461}(2+(-1)^n)\frac{2^{13\alpha+1}\cdot 1365+5461}{8191}\sigma_{13}(u)$$

$$+\frac{349128}{5461}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{20}^2=n}G(x_1,x_2)-\frac{196352}{5461}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{12}^2=n}H(x_1,x_2)$$

$$+\frac{128}{5461}\sum_{x_1^2+\ldots+x_4^2=n}J(x_1,x_2),$$

$$r_{30}(n)=\frac{4}{199360981}\left(2^{14\alpha+14}-(-1)^{(u-1)/2}\right)\varrho_{14}(u)$$

$$+\frac{14744511288}{199360981}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{22}^2=n}G(x_1,x_2)$$

$$-\frac{8840242112}{199360981}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{14}^2=n}H(x_1,x_2)$$

$$+\frac{76527488}{199360981}\sum_{x_1^2+\ldots+x_6^2=n}J(x_1,x_2),$$

$$r_{32}(n)=\frac{64}{929569}(-1)^n\frac{2^{15\alpha+15}-65535}{32767}\sigma_{15}(u)$$

$$+\frac{46605312}{929569}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{24}^2=n}G(x_1,x_2)$$

$$-\frac{18956288}{929569}\sum_{x_1^2+\ldots+x_{16}^2=n}H(x_1,x_2)$$

$$+\frac{2097152}{929569}\sum_{x_1^2+\ldots+x_8^2=n}J(x_1,x_2).$$

Эти 16 формул подчиняются вполне определенной закономерности. Они образуют 4 группы, каждая из которых содержит по 4 формулы. В первой группе каждая формула состоит лишь из главного члена, выражающегося или через функцию $\sigma_h(u)$ или $\varrho_h(u)$. Во второй группе появляется еще дополнительный член, являющийся простой суммой, взятой по всем представлениям числа n суммой $2k-8$ квадратов целых чисел и члены которой — однородные полиномы четвертой степени. В третьей группе появляется еще и вторая сумма, взятая по всем представлениям числа n суммой $2k-16$ квадратов целых чисел и члены которой — однородные полиномы восьмой степени. В четвертой группе появляется еще и третья сумма, взятая по всем представлениям числа n суммой $2k-24$ квадратов целых чисел и члены которой — однородные полиномы двенадцатой степени.

2. Естественно, возникает вопрос об исследовании арифметической функции $r(n, F_k)$ — числа представлений натурального числа n квадратичной формой

$$F_k=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\ \ldots\ +x_{2k-1}^2+x_{2k-1}x_{2k}+x_{2k}^2,$$

т.е. суммой k бинарных квадратичных форм

$$F_1=x_1^2+x_1x_2+x_2^2.$$

Целью настоящей работы является нахождение формул для функции $r(n, F_k)$, которые также подчинялись бы вполне определенной закономерности.

Положим

$$\sigma_h^*(n) = \begin{cases} \sigma_h(n), & \text{если } 3\nmid n, \\ \sigma_h(n)+(-1)^{(h+1)/2}\,3^{(h+1)/2}\,\sigma_h\left(\dfrac{n}{3}\right), & \text{если } 3|n; \end{cases}$$

$$\varrho_h^*(n) = 3^{h/2}\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^h+(-1)^{h/2}\sum_{d|n}\left(\frac{d}{3}\right)d^h.$$

Полученные нами формулы имеют следующий вид:(1)

(I) $$r(n, F_2) = 12\sum_{d|n,\,3\nmid d} d,$$

(II) $$r(n, F_3) = 9\varrho_2^*(n),$$

(III) $$r(n, F_4) = 24\sigma_3^*(n),$$

(IV) $$r(n, F_5) = 3\varrho_4^*(n),$$

(V) $$r(n, F_6) = \frac{252}{13}\sigma_5^*(n)+\frac{18}{13}\sum_{F_2=n}9x_1^4-9nx_1^2+n^2,$$

(VI) $$r(n, F_7) = \frac{3}{7}\varrho_6^*(n)+\frac{36}{5\cdot 7}\sum_{F_3=n}15x_1^4-12nx_1^2+n^2,$$

(VII) $$r(n, F_8) = \frac{240}{41}\sigma_7^*(n)+\frac{16}{41}\sum_{F_4=n}45x_1^4-30nx_1^2+2n^2,$$

(VIII) $$r(n, F_9) = \frac{27}{809}\varrho_8^*(n)+\frac{1728}{7\cdot 809}\sum_{F_5=n}63x_1^4-36nx_1^2+2n^2,$$

(IX) $$r(n, F_{10}) = \frac{12}{11}\sigma_9^*(n)+\frac{27}{5\cdot 11}\sum_{F_6=n}42x_1^4-27nx_1^2+n^2,$$

(X) $$r(n, F_{11}) = \frac{3}{1847}\varrho_{10}^*(n)+\frac{748}{1847}\sum_{F_7=n}54x_1^4-24nx_1^2+n^2,$$

(XI) $$r(n, F_{12}) = \frac{6552}{73\cdot 691}\sigma_{11}^*(n)+\frac{291096}{5\cdot 7\cdot 73\cdot 691}\sum_{F_8=n}135x_1^4-54nx_1^2+2n^2$$
$$+\frac{864}{73\cdot 691}\sum_{F_6=n}162x_1^6-162nx_1^4+36n^2x_1^2-n^3$$
$$+\frac{360}{73\cdot 691}\sum_{F_4=n}1215x_1^8-2268nx_1^6+1260n^2x_1^4-210n^3x_1^2+5n^4,$$

(1) Формулы (I)–(V) в несколько ином виде получены Петерссоном ([9], с. 90).

(XII) $$r(n, F_{13}) = \frac{3}{7\cdot 13^2\cdot 47}\varrho_{12}^*(n)+\frac{269232}{5\cdot 7^2\cdot 13^2\cdot 47}\sum_{F_9=n}165x_1^4-60nx_1^2+2n^2$$
$$+\frac{7296}{5\cdot 7^2\cdot 13^2\cdot 47}\sum_{F_7=n}891x_1^6-810nx_1^4+162n^2x_1^2-4n^3$$
$$+\frac{1520}{7^2\cdot 13^2\cdot 47}\sum_{F_5=n}2673x_1^8-4536nx_1^6+2268n^2x_1^4$$
$$-336n^3x_1^2+7n^4,$$

(XIII) $$r(n, F_{14}) = \frac{12}{1093}\sigma_{13}^*(n)+\frac{188954}{3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 1093}\sum_{F_{10}=n}99x_1^4-33nx_1^2+n^2$$
$$+\frac{1728}{5\cdot 7^2\cdot 1093}\sum_{F_8=n}594x_1^6-495nx_1^4+90n^2x_1^2-2n^3$$
$$+\frac{288}{5^2\cdot 7\cdot 1093}\sum_{F_6=n}8019x_1^8-12474nx_1^6+5670n^2x_1^4$$
$$-756n^3x_1^2+14n^4,$$

(XIV) $$r(n, F_{15}) = \frac{9}{419\cdot 16519}\varrho_{14}^*(n)+\frac{111448201932}{5^3\cdot 7^2\cdot 13\cdot 419\cdot 16519}\sum_{F_{11}=n}117x_1^4-36nx_1^2$$
$$+n^2+\frac{9396432}{5^2\cdot 7^2\cdot 419\cdot 16519}\sum_{F_9=n}3861x_1^6-2970nx_1^4$$
$$+495n^2x_1^2-10n^3+\frac{3132144}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 419\cdot 16519}\sum_{F_7=n}11583x_1^8$$
$$-16632nx_1^6+6930n^2x_1^4-840n^3x_1^2+14n^4,$$

(XV) $$r(n, F_{16}) = \frac{480}{193\cdot 3617}\sigma_{15}^*(n)+\frac{84270688}{5^3\cdot 11\cdot 193\cdot 3617}\sum_{F_{12}=n}273x_1^4-78nx_1^2+2n^2$$
$$+\frac{1167232}{5^3\cdot 7\cdot 193\cdot 3617}\sum_{F_{10}=n}2457x_1^6-1755nx_1^4+270n^2x_1^2-5n^3$$
$$+\frac{159168}{5^2\cdot 7\cdot 193\cdot 3617}\sum_{F_8=n}11583x_1^8-15444nx_1^6+5940n^2x_1^4$$
$$-660n^3x_1^2+10n^4,$$

(XVI) $$r(n, F_{17}) = \frac{3}{23\cdot 401\cdot 13687}\varrho_{16}^*(n)+\frac{25478625152}{3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 23\cdot 401\cdot 13687}\sum_{F_{13}=n}315x_1^4$$
$$-84nx_1^2+2n^2+\frac{320577024}{5^2\cdot 7^2\cdot 23\cdot 401\cdot 13687}\sum_{F_{11}=n}2457x_1^6-1638nx_1^4$$

$$+234n^2x_1^2-4n^3+\frac{60108192}{5\cdot 7\cdot 13\cdot 23\cdot 401\cdot 13687}\sum_{F_9=n}15795x_1^8$$

$$-19656nx_1^6+7020n^2x_1^4-720n^3x_1^2+10n^4.$$

Эти 16 формул так же, как и формулы для $r_{2k}(n)$, подчиняются вполне определенной закономерности. Они образуют 3 группы, первая группа содержит 4 формулы, а следующие две по 6 формул. В первой группе каждая формула состоит лишь из главного члена, выражающегося или через функцию $\sigma_h^*(n)$ или $\varrho_h^*(n)$. Во второй группе появляется еще дополнительный член, являющийся суммой, взятой по всем представлениям числа n квадратичной формой F_{k-4} и члены которой — однородные полиномы четвертой степени, ибо $n = F_{k-4}$. В третьей группе появляются еще две новые суммы; одна из них взята по всем представлениям числа n квадратичной формой F_{k-6} и члены которой — однородные полиномы шестой степени, а другая взята по всем представлениям числа n квадратичной формой F_{k-8} и члены которой — однородные полиномы восьмой степени.

О результатах настоящей работы доложено на конференции в г. Тбилиси [7].

1. Некоторые известные результаты. Мы всюду будем придерживаться терминологии Э. Гекке [3]. Пусть

$$Q(x)=Q(x_1,\ldots,x_f)=\sum_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant f}b_{rs}x_rx_s$$

— положительная квадратичная форма от f (f —четное) переменных с целыми коэффициентами b_{rs}; D — определитель квадратичной формы

$$2Q(x)=\sum_{r,s=1}^{f}a_{rs}x_rx_s\qquad (a_{rr}=2b_{rr};\ a_{rs}=a_{sr}=b_{rs},\ r<s);$$

A_{rs} — алгебраические дополнения элементов a_{rs} в D; Δ — дискриминант квадратичной формы $Q(x)$, т.е.

$$\Delta=(-1)^{f/2}D;\qquad \delta=\text{о.н.д. }(A_{rr}/2,\ A_{rs})_{(r,s=1,2,\ldots,f)};$$

$N=D/\delta$ — ступень квадратичной формы $Q(x)$; $\chi(d)$ — характер квадратичной формы $Q(x)$, т.е. если Δ — квадрат, то $\chi(d)=1$, если же Δ не является квадратом и $2\nmid\Delta$, то $\chi(d)=(d/|\Delta|)$ при $d>0$ и $\chi(d)=(-1)^{f/2}\chi(-d)$ при $d<0$ (здесь $(d/|\Delta|)$ обозначает обобщенный символ Якоби). Положительная квадратичная форма размерности $f/2$, ступени N и с характером χ называется квадратичной формой типа $(-f/2, N, \chi)$. Пусть, наконец, $P_\nu(x)=P_\nu(x_1,\ldots,x_f)$ — шаровая функция ν-го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$. Всюду в дальнейшем q обозначает нечетное простое число, а $z=\exp(2\pi i\tau)$, $\operatorname{Im}\tau>0$.

Если $Q(x)$ — квадратичная форма типа $(-2, q, 1)$, то ([3], с. 874, 817), ее дискриминант $\Delta=q^2$ и ей соответствует ряд Эйзенштейна

(1.1) $$E(\tau, Q(x))=1+\frac{24}{q-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n,\,q\nmid d}d\Big)z^n.$$

Если $Q(x)$ — примитивная квадратичная форма типа $(-k, q, 1)$, $2|k$, $k>2$, то ([3], с. 874, 875, 817) ее дискриминант

(1.2) $$\Delta=q^{2l},\qquad 1\leqslant l\leqslant k-1$$

и ей соответствует ряд Эйзенштейна

(1.3) $$E(\tau, Q(x))=1+\sum_{n=1}^{\infty}\big(\alpha\sigma_{k-1}(n)z^n+\beta\sigma_{k-1}(n)z^{qn}\big),$$

где

(1.4) $$\alpha=\frac{i^k}{\varrho_k}\frac{q^{k-l}-i^{-k}}{q^k-1},\qquad \beta=\frac{1}{\varrho_k}\frac{q^k-i^kq^{k-l}}{q^k-1},$$

(1.5) $$\varrho_k=(-1)^{k/2}\frac{(k-1)!}{(2\pi)^k}\zeta(k)\qquad (\zeta(k)\ \text{— дзета-функция Римана}).$$

Если же $Q(x)$ — квадратичная форма типа $(-k, q, \chi)$, $2\nmid k$, $k>2$, $\chi(-1)=-1$, то ([3], с. 877, 818) ее дискриминант

(1.6) $$\Delta=(-1)^{(q-1)/2}q^{2l+1},\qquad 0\leqslant l\leqslant k-1$$

и ей соответствует ряд Эйзенштейна

(1.7) $$E(\tau, Q(x))$$
$$=1+\frac{1}{A_k(q)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big((-1)^{[k/2]}q^{k-l-1}\sum_{\delta d=n}\chi(\delta)d^{k-1}+\sum_{d|n}\chi(d)d^{k-1}\Big)z^n,$$

где

$$A_k(q)=(-1)^{[k/2]}\frac{q^{k-1/2}}{(2\pi)^k}(k-1)!\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-k}.$$

Пусть (см., напр., [3], с. 823)

$$g_k(x)=\frac{x^k}{k!}-\frac{1}{2}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}-4\sum_{1\leqslant r\leqslant k/2}\frac{r\varrho_{2r}x^{k-2r}}{(k-2r)!\,(2r)!}\qquad (k=1, 2, \ldots)$$

— полиномы Бернулли, определенные в интервале $0<x<1$, а величины ϱ_{2r} определены формулой (1.5); из (1.5) следует, что

(1.8) $$\varrho_2=-\frac{1}{24},\quad \varrho_4=\frac{1}{240},\quad \varrho_6=-\frac{1}{504},\quad \varrho_8=\frac{1}{480},\quad \varrho_{10}=-\frac{1}{264},$$
$$\varrho_{12}=\frac{691}{65520},\quad \varrho_{14}=-\frac{1}{24},\quad \varrho_{16}=\frac{3617}{16320}.$$

Вычислив величины $A_k(q)$ по формуле ([3], с. 827)

$$A_k(3) = -3^{k-1}(k-1)!\,g_k(\tfrac{1}{3}),$$

получим:

$$(1.9)\quad \begin{gathered} A_3(3) = -\frac{1}{9},\quad A_5(3) = \frac{1}{3},\quad A_7(3) = -\frac{7}{3},\quad A_9(3) = \frac{809}{27},\quad A_{11}(3) = -\frac{1847}{3},\\ A_{13}(3) = \frac{55601}{3},\quad A_{15}(3) = -\frac{6921461}{9},\quad A_{17}(3) = \frac{126235201}{3}. \end{gathered}$$

Любой положительной квадратичной форме $Q(x)$, как хорошо известно, соответствует тэта-ряд

$$(1.10)\qquad \vartheta(\tau, Q(x)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n, Q(x)) z^n,$$

где $r(n, Q(x))$ обозначает число представлений натурального числа n формой $Q(x)$.

Лемма 1([3], с. 874, 875, 895). *Если $Q(x)$ — примитивная квадратичная форма типа $(-k, q, 1)$, $2|k$ или квадратичная форма типа $(-k, q, \chi)$, $2\nmid k$, $\chi(-1) = -1$, то разность*

$$\vartheta(\tau, Q(x)) - E(\tau, Q(x))$$

будет параболической формой типа $(-k, q, 1)$ или типа $(-k, q, \chi)$ соответственно.

Примечание. Известно (см., напр., [3], с. 899, 900), что не существуют параболические формы типа $(-k, 3, 1)$ при $k = 2, 4$ и типа $(-k, 3, \chi)$ при $k = 3, 5$. Следовательно, для таких параболических форм, согласно лемме 1,

$$(1.11)\qquad \vartheta(\tau, Q(x)) = E(\tau, Q(x)).$$

Лемма 2 (см., напр., [3], с. 855). *Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма типа $(-f/2, N, \chi)$ и $P_v(x)$ — шаровая функция v-го порядка относительно $Q(x)$. Тогда при $v > 0$ обобщенный f-кратный тэта-ряд*

$$(1.12)\qquad \vartheta(\tau, Q(x), P_v(x)) = \sum_{x\in \mathbf{Z}^f} P_v(x) z^{Q(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q(x)=n} P_v(x)\Big) z^n$$

будет параболической формой типа $(-(f/2+v), N, \chi)$.

Здесь и всюду в дальнейшем $\sum_{Q(x)=n} P_v(x)$ обозначает сумму, взятую по всем целочисленным решениям $(x_1, \ldots, x_f)$ уравнения $Q(x_1, \ldots, x_f) = n$.

Лемма 3 ([6], с. 63, 65). *Однородные полиномы v-той степени от f переменных*

$$\varphi_v^{(f/2)} = x_1^v + \sum_{1\le h\le v/2} (-1)^h \frac{(f/2+v-h-2)!\,v!}{(f/2+v-2)!\,(v-2h)!\,h!}\left(\frac{A_{11}Q(x)}{2D}\right)^h x_1^{v-2h}$$

являются шаровыми функциями v-го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Лемма 4 ([3], с. 846). *Если квадратичные формы $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ имеют одну и ту же ступень N и характеры $\chi_1(d)$ и $\chi_2(d)$ соответственно, то квадратичная форма $Q_1(x)+Q_2(y)$ будет иметь ступень N и характер $\chi_1(d)\chi_2(d)$.*

Всюду в дальнейшем, как обычно, $S_k(N, \chi)$ обозначает пространство параболических форм типа $(-k, N, \chi)$.

2. Некоторые вспомогательные результаты

1. Лемма 5. *Уравнение $F_k = n$*

1) *при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$;*

2) *при $n = 2$ имеет $24(k-1)$ решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$;*

3) *при $n = 3$ имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и $72(k-1)(k-2)+4$ решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$;*

4) *при $n = 4$ имеет $4(3k-2)$ решений с $x_1 = \pm 2$ и $48(k-1)\times(3(k-2)(k-3)+1)$ решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$.*

Доказательство. В нижеследующих таблицах выписаны все решения уравнения $F_k = n$ при $n = 1, 2, 3, 4$, за исключением решений с $x_1 = 0$, ибо знание числа таких решений в дальнейшем не потребуется. Подсчитав по этим таблицам число соответствующих решений, получим утверждаемое.

Предварительные замечания. 1. Очевидно, что при $n = 1$ и 2 во всех решениях $|x_i| \le 1$, а при $n = 3, 4$ во всех решениях $|x_i| \le 2$.

2. Если значения обеих переменных с соседними индексами отличны от 0, то следует брать или одновременно верхние, или одновременно нижние знаки; в противном случае следует брать всевозможные комбинации знаков.

3. Всюду предположено, что индексы обозначенные буквами h, l, s зафиксированы в указанных промежутках.

4. Запись $x_i = 0$ обозначает: „все остальные $x_i = 0$".

$n = 1$

Вид решений	Число решений
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_i = 0$	4

$n = 2$

Вид решений	Число решений
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \leqslant 2k),\ x_i = 0$	$2\cdot 4(2k-2)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0$, $x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$2\cdot 4(k-1)$

$n = 3$

Вид решений	Число решений
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 1,\ x_i = 0$	2
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 2,\ x_i = 0$	2
$x_1 = x_2 = \pm 1,\ x_i = 0$	2
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0$, $x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \leqslant k)$, $x_l = \pm 1\ (2 < l \leqslant 2k$, но $l \neq 2h-1, 2h),\ x_i = 0$	$2\cdot 8(k-1)(2k-4)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1 (1 < h \leqslant k)$, $x_{2l-1} = \pm 1,\ x_{2l} = \mp 1\ (1 < l \leqslant k$, но $l \neq h),\ x_i = 0$	$2\cdot 8C_{k-1}^2$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \leqslant 2k)$, $x_l = \pm 1\ (2 < l \leqslant 2k$, но $l \neq h, h-(-1)^h),\ x_i = 0$	$2\cdot 8(C_{2k-2}^2 - (k-1))$

$n = 4$

Вид решений	Число решений
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 2$ или $x_2 = 0,\ x_i = 0$	4
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 1,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$4k-1$
$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \mp 1,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \leqslant 2k),\ x_i = 0$	$4(2k-2)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 2,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \leqslant 2k),\ x_i = 0$	$4(2k-2)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 2,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$4(k-1)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1,\ x_{2h-1} = \pm 2,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$4(k-1)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 2\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$4(k-1)$
$x_1 = \pm 1,\ x_{2h-1} = \pm 2,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$4(k-1)$
$x_1 = \pm 1,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 2\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$4(k-1)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = x_{2h} = \pm 1\ (1 < h \leqslant k)$, $x_i = 0$	$2\cdot 4(k-1)$
$x_1 = x_2 = \pm 1,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1\ (1 < h \leqslant k),\ x_i = 0$	$4(k-1)$
$x_1 = x_2 = \pm 1,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \leqslant 2k),\ x_i = 0$	$4(2k-2)$

$n = 4$ (продолжение)

Вид решений	Число решений
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1$ $(1 < h \leqslant k),\ x_{2l-1} = \pm 1,\ x_{2l} = \mp 1\ (1 < l \leqslant k,\ l \neq h)$, $x_{2s-1} = \pm 1,\ x_{2s} = \mp 1\ (1 < s \leqslant k;\ s \neq h, l),\ x_i = 0$	$2\cdot 16C_{k-1}^3$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1$ $(1 < h \leqslant k),\ x_{2l-1} = \pm 1,\ x_{2l} = \mp 1\ (1 < l \leqslant k,\ l \neq h)$, $x_s = \pm 1\ (2 < s \leqslant 2k;\ s \neq 2h-1, 2h, 2l-1, 2l),\ x_i = 0$	$2\cdot 16C_{k-1}^2(2k-6)$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_{2h-1} = \pm 1,\ x_{2h} = \mp 1$ $(1 < h \leqslant k),\ x_l = \pm 1\ (2 < l \leqslant 2k;\ l \neq 2h-1, 2h)$, $x_s = \pm 1\ (2 < s \leqslant 2k;\ s \neq 2h-1, 2h, l, l-(-1)^l),\ x_i = 0$	$2\cdot 16(k-1)(C_{2k-4}^2 - (k-2))$
$x_1 = \pm 1,\ x_2 = \mp 1$ или $x_2 = 0,\ x_h = \pm 1\ (2 < h \leqslant 2k)$, $x_l = \pm 1\ (2 < l \leqslant 2k;\ l \neq h, h-(-1)^h),\ x_s = \pm 1$ $(2 < s \leqslant 2k;\ s \neq h, h-(-1)^h, l, l-(-1)^l),\ x_i = 0$	$2\cdot 16(C_{2k-2}^3 - (k-1)(2k-4))$

2. Известно (см., напр., [2], с. 167), что

$$r(n, F_1) = r(2^\alpha u, F_1) = \begin{cases} 6\sum\limits_{d\mid u}\left(\dfrac{d}{3}\right) & \text{при } 2\mid\alpha, \\ 0 & \text{при } 2\nmid\alpha. \end{cases}$$

Вычислив по этой формуле значения функции $r(n, F_1)$ при $n = 1, 2, 3, 4$, согласно (1.10), получим разложение:

(2.1) $\qquad \vartheta(\tau, F_1) = 1 + 6z + 6z^3 + 6z^4 + \ldots$

Отсюда следуют разложения:

(2.2) $\qquad \vartheta(\tau, F_2) = \vartheta^2(\tau, F_1) = 1 + 12z + 36z^2 + 12z^3 + 84z^4 + \ldots,$

(2.3) $\qquad \vartheta(\tau, F_3) = \vartheta(\tau, F_2)\vartheta(\tau, F_1) = 1 + 18z + 108z^2 + 234z^3 + 234z^4 + \ldots,$

(2.4) $\qquad \vartheta(\tau, F_4) = 1 + 24z + 216z^2 + 888z^3 + 1752z^4 + \ldots,$

(2.5) $\qquad \vartheta(\tau, F_5) = 1 + 30z + 360z^2 + 2190z^3 + 7230z^4 + \ldots,$

(2.6) $\qquad \vartheta(\tau, F_6) = 1 + 36z + 540z^2 + 4356z^3 + 20556z^4 + \ldots,$

(2.7) $\qquad \vartheta(\tau, F_7) = 1 + 42z + 756z^2 + 7602z^3 + 46914z^4 + \ldots,$

(2.8) $\qquad \vartheta(\tau, F_8) = 1 + 48z + 1008z^2 + 12144z^3 + 92784z^4 + \ldots,$

(2.9) $\qquad \vartheta(\tau, F_9) = 1 + 54z + 1296z^2 + 18198z^3 + 165942z^4 + \ldots,$

(2.10) $\qquad \vartheta(\tau, F_{10}) = 1 + 60z + 1620z^2 + 25980z^3 + 275460z^4 + \ldots,$

$$\vartheta(\tau, F_{11}) = 1+66z+1980z^2+35706z^3+431706z^4+\dots, \tag{2.11}$$

$$\vartheta(\tau, F_{12}) = 1+72z+2376z^2+47592z^3+646344z^4+\dots, \tag{2.12}$$

$$\vartheta(\tau, F_{13}) = 1+78z+2808z^2+61854z^3+932334z^4+\dots, \tag{2.13}$$

$$\vartheta(\tau, F_{14}) = 1+84z+3276z^2+78708z^3+1303932z^4+\dots, \tag{2.14}$$

$$\vartheta(\tau, F_{15}) = 1+90z+3780z^2+98370z^3+1776690z^4+\dots, \tag{2.15}$$

$$\vartheta(\tau, F_{16}) = 1+96z+4320z^2+121056z^3+2367456z^4+\dots, \tag{2.16}$$

$$\vartheta(\tau, F_{17}) = 1+102z+4896z^2+146982z^3+3094374z^4+\dots, \tag{2.17}$$

3. Очевидно, что F_1 является квадратичной формой типа $(-1, 3, \chi)$, $\chi = \chi(d) = (d/3)$ при $d > 0$. Следовательно, согласно лемме 4, форма F_{k-2m} $(m = 0, 1, \dots, [k/2]-1)$ будет квадратичной формой типа $(-(k-2m), 3, 1)$, если $2|k$ и типа $(-(k-2m), 3, \chi)$, $\chi = \chi(d) = (d/3)$ при $d > 0$, если $2\nmid k$. Для квадратичной формы F_{k-2m} также имеем: $D = 3^{k-2m}$, $A_{11} = 2\cdot 3^{k-2m-1}$. Итак, положив в лемме 3

$$f = 2(k-2m), \quad \nu = 2m, \quad Q(x) = F_{k-2m},$$

получим:

$$\varphi_{2m}^{(k-2m)} = x_1^{2m} + \sum_{h=1}^{m} (-1)^h \frac{(k-h-2)!\,(2m)!}{(k-2)!\,(2m-2h)!\,h!\,3^h} F_{k-2m}^h x_1^{2m-2h}. \tag{2.18}$$

Так как F_k при $2|k$ является квадратичной формой типа $(-k, 3, 1)$ с дискриминантом $\Delta = 3^k$, т.е., в силу (1.2), $l = k/2$, то формулы (1.4) принимают вид:

$$\alpha = \frac{1}{\varrho_k}\frac{1}{3^{k/2}+1} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{\varrho_k}\frac{3^{k/2}}{3^{k/2}+1}, \quad \text{если } 4|k,$$

$$\alpha = -\frac{1}{\varrho_k}\frac{1}{3^{k/2}-1} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{\varrho_k}\frac{3^{k/2}}{3^{k/2}-1}, \quad \text{если } 2\|k.$$

Следовательно, квадратичной форме F_k при $2|k$, согласно (1.3), соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau, F_k) = 1+(-1)^{k/2}\frac{1}{\varrho_k(3^{k/2}+(-1)^{k/2})}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_{k-1}(n)z^n+(-1)^{k/2}3^{k/2}\sigma_{k-1}(n)z^{3n}\right). \tag{2.19}$$

Если же $2\nmid k$, то F_k будет квадратичной формой типа $(-k, 3, \chi)$, $\chi(d) = (d/3)$ при $d > 0$ с дискриминантом $\Delta = -3^k$, т.е., в силу (1.6), $l = (k-1)/2$ и следовательно, согласно (1.7), ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau, F_k) = 1+\frac{(-1)^{(k-1)/2}}{A_k(3)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{(k-1)/2}\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^{k-1}+(-1)^{(k-1)/2}\sum_{d|n}\left(\frac{d}{3}\right)d^{k-1}\right)z^n. \tag{2.20}$$

3. Формулы для $r(n, F_k)$ при $k = 2, 3, 4, 5$. Согласно примечанию к лемме 1, приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях тождества (1.11) и принимая во внимание (1.10) и (1.1), получаем формулу (I); затем, принимая во внимание (1.10), (2.19) и (1.8), получаем формулу (III) и наконец, принимая во внимание (1.10), (2.20) и (1.9), получаем формулы (II) и (IV).

4. Формулы для $r(n, F_k)$ при $k = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

ТЕОРЕМА 1. *Обобщенный четырехкратный тэта-ряд*

$$\vartheta(\tau, F_2, \varphi_4^{(2)}) = \tfrac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_2=n} 9x_1^4-9nx_1^2+n^2\Big)z^n \tag{4.1}$$

является базисом пространства $S_6(3, 1)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 6$ и $m = 2$ следует, что

$$\varphi_4^{(2)} = x_1^4 - F_2x_1^2 + \tfrac{1}{6}F_2^2.$$

Так как F_2 является квадратичной формой типа $(-2, 3, 1)$, а $\varphi_4^{(2)}$ — относящаяся к ней шаровая функция четвертого порядка, то, согласно лемме 2, ряд (4.1) будет параболической формой типа $(-6, 3, 1)$. В силу леммы 5, уравнение $F_2 = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех его остальных решениях $x_1 = 0$. Следовательно, принимая во внимание, что коэффициент при z в разложении (2.2) равен 12, получаем:

$$\vartheta(\tau, F_2, \varphi_4^{(2)}) = \tfrac{1}{9}\{(9-9)4+12)z+\dots\} = \tfrac{4}{3}z+\dots \tag{4.2}$$

Этот ряд тождественно не исчезает. Следовательно, теорема доказана, ибо известно ([3], с. 899), что $\dim S_6(3, 1) = 1$.

Форма F_6 является квадратичной формой типа $(-6, 3, 1)$. Ввиду этого, из (2.19) и (1.8) следует, что

$$E(\tau, F_6) = 1+\frac{252}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_5(n)z^n - 27\sigma_5(n)z^{3n}\right) = 1+\frac{252}{13}z+\dots \tag{4.3}$$

Согласно лемме 1, разность $\vartheta(\tau, F_6)-E(\tau, F_6)$ является параболической формой типа $(-6, 3, 1)$. Следовательно, согласно теореме 1, существует число c такое, что

$$\vartheta(\tau, F_6)-E(\tau, F_6) = c\vartheta(\tau, F_2, \varphi_4^{(2)}).$$

Приравнивая коэффициенты при z в обеих частях этого равенства и принимая во внимание (2.6), (4.3) и (4.2), получаем, что $c = \dfrac{18\cdot 9}{13}$. Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau, F_6) = E(\tau, F_6)+\frac{18\cdot 9}{13}\vartheta(\tau, F_2, \varphi_4^{(2)}). \tag{4.4}$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и принимая во внимание (1.10), (4.3) и (4.1), получаем формулу (V).

Теорема 2. *Обобщенный шестикратный тэта-ряд*

$$\vartheta(\tau, F_3, \varphi_4^{(3)}) = \tfrac{1}{15}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_3=n} 15x_1^4-12nx_1^2+n^2\Big)z^n \tag{4.5}$$

является базисом пространства $S_7(3, \chi)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 7$ и $m = 2$ следует, что

$$\varphi_4^{(3)} = x_1^4-\tfrac{4}{5}F_3x_1^2+\tfrac{1}{15}F_3^2.$$

F_3 является квадратичной формой типа $(-3, 3, \chi)$, а $\varphi_4^{(3)}$ — относящаяся к ней шаровая функция четвертого порядка. Поэтому, согласно лемме 2, ряд (4.5) будет параболической формой типа $(-7, 3, \chi)$. В силу леммы 5, уравнение $F_3 = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех других решениях $x_1 = 0$. Следовательно, приняв во внимание, что коэффициент при z в разложении (2.3) равен 18, получаем

$$\vartheta(\tau, F_3, \varphi_4^{(3)}) = \tfrac{1}{15}\{((15-12)4+18)z+\ldots\} = 2z+\ldots$$

Этот ряд тождественно не исчезает. Следовательно, теорема доказана, ибо известно ([3], с. 900), что $\dim S_7(3, \chi) = 1$.

Форма F_7 является квадратичной формой типа $(-7, 3, \chi)$. Ввиду этого, из (2.20) и (1.9), следует, что

$$E(\tau, F_7) = 1+\frac{3}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\left(27\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^6-\sum_{d|n}\left(\frac{d}{3}\right)d^6\right)z^n = 1+\frac{3\cdot 26}{7}z+\ldots$$

Далее, рассуждая так же, как и выше, получаем тождество

$$\vartheta(\tau, F_7) = E(\tau, F_7)+\frac{36\cdot 3}{7}\vartheta(\tau, F_3, \varphi_4^{(3)}), \tag{4.6}$$

откуда следует формула (VI).

Теорема 3. *Обобщенный восьмикратный тэта-ряд*

$$\vartheta(\tau, F_4, \varphi_4^{(4)}) = \frac{1}{45}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_4=n} 45x_1^4-30nx_1^2+2n^2\Big)z^n \tag{4.7}$$

является базисом пространства $S_8(3, 1)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 8$ и $m = 2$ следует, что

$$\varphi_4^{(4)} = x_1^4-\tfrac{2}{3}F_4x_1^2+\tfrac{2}{45}F_4^2.$$

Так как F_4 является квадратичной формой типа $(-4, 3, 1)$, а $\varphi_4^{(4)}$ — относящаяся к ней шаровая функция четвертого порядка, то, согласно лемме 2, ряд (4.7) является параболической формой типа $(-8, 3, 1)$. В силу леммы 5, уравнение $F_4 = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех

остальных решениях $x_i = 0$. Следовательно, принимая во внимание, что коэффициент при z в разложении (2.4) равен 24, так же, как и выше получаем, что

$$\vartheta(\tau, F_4, \varphi_4^{(4)}) = \tfrac{12}{5}z+\ldots$$

Таким образом, получаем утверждаемое, ибо $\dim S_8(3, 1) = 1$.

Форма F_8 является квадратичной формой типа $(-8, 3, 1)$. Ввиду этого, из (2.19) и (1.8) следует, что

$$E(\tau, F_8) = 1+\frac{240}{41}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_7(n)z^n+81\sigma_7(n)z^{3n}\right) = 1+\frac{240}{41}z+\ldots$$

Далее, так же, как и выше, получаем тождество

$$\vartheta(\tau, F_8) = E(\tau, F_8)+\frac{16\cdot 45}{41}\vartheta(\tau, F_4, \varphi_4^{(4)}), \tag{4.8}$$

откуда следует формула (VII).

Теорема 4. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_5, \varphi_4^{(5)}) = \frac{1}{63}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_5=n} 63x_1^4-36nx_1^2+2n^2\Big)z^n, \tag{4.9}$$

$$\vartheta(\tau, F_3, \varphi_6^{(3)}) = \frac{1}{189}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_3=n} 189x_1^6-270nx_1^4+90n^2x_1^2-4n^3\Big)z^n \tag{4.10}$$

является базисом пространства $S_9(3, \chi)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 9$ и $m = 2, 3$ следует:

$$\varphi_4^{(5)} = x_1^4-\frac{4}{7}F_5x_1^2+\frac{2}{63}F_5^2,$$

$$\varphi_6^{(3)} = x_1^6-\frac{10}{7}F_5x_1^4+\frac{10}{21}F_3^2x_1^2-\frac{4}{189}F_3^3.$$

Так как F_5 является квадратичной формой типа $(-5, 3, \chi)$ и $\varphi_4^{(5)}$ — относящаяся к ней шаровая функция четвертого порядка, а F_3 является квадратичной формой типа $(-3, 3, \chi)$ и $\varphi_6^{(3)}$ — относящаяся к ней шаровая функция шестого порядка, то, согласно лемме 2, тэта-ряды (4.9) и (4.10) будут параболическими формами типа $(-9, 3, \chi)$.

В силу леммы 5, уравнение $F_5 = n$ при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ имеет 96 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех других решениях $x_1 = 0$. Следовательно, приняв во внимание, что коэффициенты при z и z^2 в разложении (2.5) равны 30 и 360 соответственно, получим

$$\vartheta(\tau, F_5, \varphi_4^{(5)}) \tag{4.11}$$
$$= \tfrac{1}{63}\{((63-36)4+2\cdot 30)z+((63-72)96+8\cdot 360)z^2+\ldots\} = \tfrac{8}{3}z+32z^2+\ldots$$

Уравнение $F_3 = n$ при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ имеет 48 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Следовательно, приняв во внимание, что коэффициенты при z и z^2 в разложении (2.3) равны 18 и 108 соответственно, получим

$$\vartheta(\tau, F_3, \varphi_6^{(3)}) = -\tfrac{4}{21}z - 16z^2 + \ldots \tag{4.12}$$

Система тэта-рядов (4.9) и (4.10) линейно независима, ибо определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{4}{21} \\ 32 & -16 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, получаем утверждаемое, ибо $\dim S_9(3, \chi) = 2$.

Форма F_9 является квадратичной формой типа $(-9, 3, \chi)$. Ввиду этого из (2.20) и (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} E(\tau, F_9) &= 1 + \frac{27}{809} \sum_{n=1}^{\infty} \left(81 \sum_{\delta d = n} \left(\frac{\delta}{3}\right) d^8 + \sum_{d \mid n} \left(\frac{d}{3}\right) d^8 \right) z^n \\ &= 1 + \frac{27 \cdot 82}{809} z + \frac{27 \cdot 80 \cdot 255}{809} z^2 + \ldots \end{aligned} \tag{4.13}$$

Согласно лемме 1, разность $\vartheta(\tau, F_9) - E(\tau, F_9)$ является параболической формой типа $(-9, 3, \chi)$. Следовательно, согласно теореме 4, существуют числа c_1 и c_2 такие, что

$$\vartheta(\tau, F_9) - E(\tau, F_9) = c_1 \vartheta(\tau, F_5, \varphi_4^{(5)}) + c_2 \vartheta(\tau, F_3, \varphi_6^{(3)}).$$

Приравнивая коэффициенты при z и z^2 в обеих частях этого равенства и принимая во внимание разложения (2.9), (4.13), (4.11) и (4.12), получаем, что $c_1 = \dfrac{1728 \cdot 9}{809}$, $c_2 = 0$. Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau, F_9) = E(\tau, F_9) + \frac{1728 \cdot 9}{809} \vartheta(\tau, F_5, \varphi_4^{(5)}), \tag{4.14}$$

откуда следует формула (VIII).

Теорема 5. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_6, \varphi_4^{(6)}) = \frac{1}{42} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{F_6 = n} 42x_1^4 - 21nx_1^2 + n^2 \Big) z^n, \tag{4.15}$$

$$\vartheta(\tau, F_4, \varphi_6^{(4)}) = \frac{1}{756} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{F_4 = n} 756x_1^6 - 945nx_1^4 + 270n^2x_1^2 - 10n^3 \Big) z^n \tag{4.16}$$

является базисом пространства $S_{10}(3, 1)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 10$ и $m = 2, 3$ следует:

$$\varphi_4^{(6)} = x_1^4 - \frac{1}{2} F_6 x_1^2 + \frac{1}{42} F_6^2,$$

$$\varphi_6^{(4)} = x_1^6 - \frac{5}{4} F_4 x_1^4 + \frac{5}{14} F_4^2 x_1^2 - \frac{5}{378} F_4^3.$$

Согласно лемме 2, тэта-ряды (4.15) и (4.16) являются параболическими формами типа $(-10, 3, 1)$. Далее, принимая во внимание лемму 5, так же, как и выше получаем разложения:

$$\vartheta(\tau, F_6, \varphi_4^{(6)}) = \frac{20}{7} z + \frac{360}{7} z^2 + \ldots, \tag{4.17}$$

$$\vartheta(\tau, F_4, \varphi_6^{(4)}) = \frac{1}{9} z - \frac{52}{7} z^2 + \ldots \tag{4.18}$$

Система этих тэта-рядов линейно независима и $\dim S_{10}(3, 1) = 2$. Итак, теорема доказана.

Форма F_{10} является квадратичной формой типа $(-10, 3, 1)$. Ввиду этого, из (2.19) и (1.8) следует, что

$$\begin{aligned} E(\tau, F_{10}) &= 1 + \frac{12}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_9(n) z^n - 243 \sigma_9(n) z^{3n} \right) \\ &= 1 + \frac{12}{11} z + \frac{12 \cdot 513}{11} z^2 + \ldots \end{aligned} \tag{4.19}$$

Согласно лемме 1 и теореме 5, существуют числа c_1 и c_2 такие, что

$$\vartheta(\tau, F_{10}) - E(\tau, F_{10}) = c_1 \vartheta(\tau, F_6, \varphi_4^{(6)}) + c_2 \vartheta(\tau, F_4, \varphi_6^{(4)}).$$

Далее, принимая во внимание разложения (2.10), (4.19), (4.17) и (4.18), получаем:

$$c_1 = \frac{27 \cdot 42}{5 \cdot 11}, \quad c_2 = 0.$$

Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau, F_{10}) = E(\tau, F_{10}) + \frac{27 \cdot 42}{5 \cdot 11} \vartheta(\tau, F_6, \varphi_4^{(6)}), \tag{4.20}$$

откуда следует формула (IX).

Теорема 6. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_7, \varphi_4^{(7)}) = \frac{1}{54} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{F_7 = n} 54x_1^4 - 24nx_1^2 + n^2 \Big) z^n, \tag{4.21}$$

$$(4.22)\qquad \vartheta(\tau, F_5, \varphi_6^{(5)}) = \frac{1}{1134}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_5=n} 1134x_1^6-1260nx_1^4+315n^2x_1^2-10n^3\Big)z^n$$

является базисом пространства $S_{11}(3, \chi)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 11$ и $m = 2, 3$ следует:

$$\varphi_4^{(7)} = x_1^4-\frac{4}{9}F_7x_1^2+\frac{1}{54}F_7^2,$$

$$\varphi_6^{(5)} = x_1^6-\frac{10}{9}F_5x_1^4+\frac{5}{18}F_5^2x_1^2-\frac{5}{567}F_5^3.$$

Согласно лемме 2, тэта-ряды (4.21) и (4.22) являются параболическими формами типа $(-11, 3, \chi)$. Далее, принимая во внимание лемму 5, так же, как и выше, получаем разложения:

$$(4.23)\qquad \vartheta(\tau, F_7, \varphi_4^{(7)}) = 3z+72z^2+\dots,$$

$$(4.24)\qquad \vartheta(\tau, F_5, \varphi_6^{(5)}) = \frac{76}{7\cdot 27}z-\frac{3280}{7\cdot 9}z^2+\dots$$

Отсюда следует утверждаемое, ибо система этих тэта-рядов линейно независима и $\dim S_{11}(3, \chi) = 2$.

F_{11} является квадратичной формой типа $(-11, 3, \chi)$. Следовательно,

$$(4.25)\qquad E(\tau, F_{11}) = 1+\frac{3}{1847}\sum_{n=1}^{\infty}\left(243\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^{10}-\sum_{d\mid n}\left(\frac{d}{3}\right)d^{10}\right)z^n$$

$$= 1+\frac{3\cdot 242}{1847}z+\frac{3\cdot 244\cdot 1023}{1847}z^2+\dots$$

Согласно лемме 1 и теореме 6, существуют числа c_1 и c_2 такие, что

$$\vartheta(\tau, F_{11})-E(\tau, F_{11}) = c_1\vartheta(\tau, F_7, \varphi_4^{(7)})+c_2\vartheta(\tau, F_5, \varphi_6^{(5)}).$$

Принимая во внимание разложения (2.11), (4.25), (4.23) и (4.24), получаем:

$$c_1 = \frac{748\cdot 54}{1847},\qquad c_2 = 0.$$

Таким образом,

$$(4.26)\qquad \vartheta(\tau, F_{11}) = E(\tau, F_{11})+\frac{748\cdot 54}{1847}\vartheta(\tau, F_7, \varphi_4^{(7)}),$$

откуда следует формула (X).

5. Формулы для $r(n, F_k)$ при $k = 12, 13, 14, 15, 16, 17$.

Теорема 7. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$(5.1)\qquad \vartheta(\tau, F_8, \varphi_4^{(8)}) = \frac{1}{135}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_8=n} 135x_1^4-54nx_1^2+2n^2\Big)z^n,$$

$$(5.2)\qquad \vartheta(\tau, F_6, \varphi_6^{(6)}) = \frac{1}{162}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_6=n} 162x_1^6-162nx_1^4+36n^2x_1^2-n^3\Big)z^n,$$

$$(5.3)\qquad \vartheta(\tau, F_4, \varphi_8^{(4)})$$

$$= \frac{1}{1215}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_4=n} 1215x_1^8-2268nx_1^6+1260n^2x_1^4-210n^3x_1^2+5n^4\Big)z^n,$$

является базисом пространства $S_{12}(3, 1)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 12$ и $m = 2, 3, 4$ следует:

$$\varphi_4^{(8)} = x_1^4-\frac{2}{5}F_8x_1^2+\frac{2}{5\cdot 27}F_8^2,$$

$$\varphi_6^{(6)} = x_1^6-F_6x_1^4+\frac{2}{9}F_6^2x_1^2-\frac{1}{2\cdot 9^2}F_6^3,$$

$$\varphi_8^{(4)} = x_1^8-\frac{28}{15}F_4x_1^6+\frac{28}{27}F_4^2x_1^4-\frac{14}{81}F_4^3x_1^2+\frac{1}{243}F_4^4.$$

В силу леммы 5, уравнение $F_8 = n$ при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ имеет 1688 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и 3028 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех других решениях $x_1 = 0$. Следовательно, приняв во внимание, что коэффициенты при z, z^2 и z^3 в разложении (2.8) равны 48, 1008 и 12144 соответственно, получим:

$$(5.4)\qquad \vartheta(\tau, F_8, \varphi_4^{(8)}) = \frac{1}{135}\{((135-54)4+48\cdot 2)z+((135-108)168+1008\cdot 8)z^2$$

$$+((135\cdot 16-162\cdot 4)2+(135-162)3028+18\cdot 12144)z^3+\dots\}$$

$$= \frac{28}{9}z+\frac{280}{3}z^2+1036z^3+\dots$$

Уравнение $F_6 = n$ при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ имеет 120 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и 1444 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Следовательно, приняв во внимание, что коэффициенты при z, z^2 и z^3 в разложении (2.6) равны 36, 540 и 4356 соответственно, получим:

$$(5.5)\qquad \vartheta(\tau, F_6, \varphi_6^{(6)}) = \tfrac{2}{3}z-40z^2-678z^3+\dots$$

Уравнение $F_4 = n$ при $n = 1$ имеет 4 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$; при $n = 2$ имеет 72 решения с $x_1 = \pm 1$, а во всех других решениях $x_1 = 0$; при $n = 3$ имеет 2 решения с $x_1 = \pm 2$ и 436 решений с $x_1 = \pm 1$, а во всех остальных решениях $x_1 = 0$. Итак, приняв во внимание, что коэффициенты при z, z^2 и z^3 в разложении (2.4) равны 24, 216 и 888 соответственно, получим:

$$\vartheta(\tau, F_4, \varphi_8^{(4)}) = \frac{4}{45}z + \frac{248}{15}z^2 + \frac{1908}{5}z^3 + \ldots \tag{5.6}$$

Согласно лемме 2, тэта-ряды (5.1), (5.2) и (5.3) являются параболическими формами типа $(-12, 3, 1)$. Они образуют линейно независимую систему, ибо определитель третьего порядка, элементами которого являются коэффициенты разложений (5.4), (5.5) и (5.6) этих рядов, отличен от нуля. Таким образом, получаем утверждаемое, ибо известно ([3], с. 815, 817), что $\dim S_{12}(3, 1) = 3$.

Форма F_{12} является квадратичной формой типа $(-12, 3, 1)$. Ввиду этого,

$$\begin{aligned} E(\tau, F_{12}) &= 1 + \frac{6552}{691\cdot 73}\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_{11}(n)z^n + 729\sigma_{11}(n)z^{3n}) \\ &= 1 + \frac{6552}{691\cdot 73}z + \frac{6552\cdot 2049}{691\cdot 73}z^2 + \frac{6552\cdot 177877}{691\cdot 73}z^3 + \ldots \end{aligned} \tag{5.7}$$

Согласно лемме 1, разность $\vartheta(\tau, F_{12}) - E(\tau, F_{12})$ является параболической формой типа $(-12, 3, 1)$. Следовательно, согласно теореме 7, существуют числа c_1, c_2 и c_3 такие, что

$$\vartheta(\tau, F_{12}) - E(\tau, F_{12}) = c_1\vartheta(\tau, F_8, \varphi_4^{(8)}) + c_2\vartheta(\tau, F_6, \varphi_6^{(6)}) + c_3\vartheta(\tau, F_4, \varphi_8^{(4)}).$$

Приравняв коэффициенты при z, z^2 и z^3 в обеих частях этого равенства и приняв во внимание разложения (2.12), (5.7), (5.4)–(5.6), получим:

$$c_1 = \frac{291096\cdot 27}{7\cdot 73\cdot 691}, \quad c_2 = \frac{864\cdot 162}{73\cdot 691}, \quad c_3 = \frac{360\cdot 1215}{73\cdot 691}.$$

Таким образом, доказано тождество

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau, F_{12}) = E(\tau, F_{12}) &+ \frac{291096\cdot 27}{7\cdot 73\cdot 691}\vartheta(\tau, F_8, \varphi_4^{(8)}) \\ &+ \frac{864\cdot 162}{73\cdot 691}\vartheta(\tau, F_6, \varphi_6^{(6)}) + \frac{360\cdot 1215}{73\cdot 691}\vartheta(\tau, F_4, \varphi_8^{(4)}), \end{aligned} \tag{5.8}$$

откуда следует формула (XI).

Теорема 8. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_9, \varphi_4^{(9)}) = \frac{1}{5\cdot 33}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_9=n} 165x_1^4 - 60nx_1^2 + 2n^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_7, \varphi_6^{(7)}) = \frac{1}{891}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_7=n} 891x_1^6 - 810nx_1^4 + 162n^2x_1^2 - 4n^3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_5, \varphi_8^{(5)}) = \frac{1}{2673}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_5=n} 2673x_1^8 - 4536nx_1^6 + 2268n^2x_1^4 - 336n^3x_1^2 + 7n^4\Big)z^n$$

является базисом пространства $S_{13}(3, \chi)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 13$ и $m = 2, 3, 4$ следует:

$$\varphi_4^{(9)} = x_1^4 - \frac{4}{11}F_9x_1^2 + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 11}F_9^2,$$

$$\varphi_6^{(7)} = x_1^6 - \frac{10}{11}F_7x_1^4 + \frac{2}{11}F_7^2x_1^2 - \frac{4}{81\cdot 11}F_7^3,$$

$$\varphi_8^{(5)} = x_1^8 - \frac{56}{33}F_5x_1^6 + \frac{28}{33}F_5^2x_1^4 - \frac{112}{99\cdot 9}F_5^3x_1^2 + \frac{7}{99\cdot 27}F_5^4.$$

Далее, принимая во внимание лемму 5, так же, как и выше, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau, F_9, \varphi_4^{(9)}) = \frac{16}{5}z + \frac{576}{5}z^2 + \frac{8208}{5}z^3 + \ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_7, \varphi_6^{(7)}) = \frac{268}{27\cdot 11}z - \frac{1328}{3\cdot 11}z^2 - \frac{35124}{3\cdot 11}z^3 + \ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_5, \varphi_8^{(5)}) = \frac{2}{11}z + \frac{160}{11}z^2 + \frac{7410}{11}z^3 + \ldots$$

Система этих тэта-рядов линейно независима и $\dim S_{13}(3, \chi) = 3$. Следовательно, утверждаемое верно.

Форма F_{13} является квадратичной формой типа $(-13, 3, \chi)$. Ввиду этого,

$$\begin{aligned} E(\tau, F_{13}) &= 1 + \frac{3}{55601}\left(729\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^{12} + \sum_{d\mid n}\left(\frac{d}{3}\right)d^{12}\right)z^n \\ &= 1 + \frac{3\cdot 730}{55601}z + \frac{3\cdot 728\cdot 4095}{55601}z^2 + \frac{3\cdot 387420490}{55601}z^3 + \ldots \end{aligned}$$

Далее, рассуждая так же, как и выше, получаем тождество

$$(5.9)\quad \vartheta(\tau, F_{13}) = E(\tau, F_{13})+\frac{269232\cdot 33}{7^2\cdot 13^2\cdot 47}\vartheta(\tau, F_9, \varphi_4^{(9)})$$

$$+\frac{7296\cdot 891}{5\cdot 7^2\cdot 13^2\cdot 47}\vartheta(\tau, F_7, \varphi_6^{(7)})+\frac{1520\cdot 2673}{7^2\cdot 13^2\cdot 47}\vartheta(\tau, F_5, \varphi_8^{(5)}),$$

откуда следует формула (XII).

Теорема 9. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_4^{(10)}) = \frac{1}{99}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{10}=n} 99x_1^4-33nx_1^2+n^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_8, \varphi_6^{(8)}) = \frac{1}{594}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_8=n} 594x_1^6-495nx_1^4+90n^2x_1^2-2n^3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_6, \varphi_8^{(6)}) = \frac{1}{8019}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_6=n} 8019x_1^8-12474nx_1^6+5670n^2x_1^4$$

$$-756n^3x_1^2+14n^4\Big)z^n,$$

является базисом пространства $S_{14}(3, 1)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 14$ и $m = 2, 3, 4$ следует:

$$\varphi_4^{(10)} = x_1^4-\frac{1}{3}F_{10}x_1^2+\frac{1}{99}F_{10}^2,$$

$$\varphi_6^{(8)} = x_1^6-\frac{5}{6}F_8x_1^4+\frac{5}{33}F_8^2x_1^2-\frac{1}{297}F_8^3,$$

$$\varphi_8^{(6)} = x_1^8-\frac{14}{9}F_6x_1^6+\frac{70}{99}F_6^2x_1^4-\frac{28}{297}F_6^3x_1^2+\frac{14}{729\cdot 11}F_6^4.$$

Далее, принимая во внимание лемму 5, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_4^{(10)}) = \frac{36}{11}z+\frac{1512}{11}z^2+\frac{26244}{11}z^3+\dots,$$

$$\vartheta(\tau, F_8, \varphi_6^{(8)}) = \frac{10}{9}z-\frac{336}{9}z^2-\frac{13122}{9}z^3+\dots,$$

$$\vartheta(\tau, F_6, \varphi_8^{(6)}) = \frac{260}{891}z+\frac{9480}{891}z^2+\frac{831060}{891}z^3+\dots$$

Отсюда следует утверждаемое, ибо система этих тэта-рядов линейно независима и известно ([3], с. 815, 817), что $\dim S_{14}(3, 1) = 3$.

Из (2.19) и (1.8) следует, что

$$E(\tau, F_{14}) = 1+\frac{12}{1093}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\sigma_{13}(n)z^n-2187\sigma_{13}(n)z^{3n}\big)$$

$$= 1+\frac{12}{1093}z+\frac{12\cdot 8193}{1093}z^2+\frac{12\cdot 1592137}{1093}z^3+\dots$$

Далее, согласно лемме 1 и теореме 9, получаем тождество

$$(5.10)\quad \vartheta(\tau, F_{14}) = E(\tau, F_{14})+\frac{188954\cdot 33}{5\cdot 7^2\cdot 1093}\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_4^{(10)})$$

$$+\frac{1728\cdot 594}{5\cdot 7^2\cdot 1093}\vartheta(\tau, F_8, \varphi_6^{(8)})+\frac{288\cdot 8019}{5^2\cdot 7\cdot 1093}\vartheta(\tau, F_6, \varphi_8^{(6)}),$$

отсюда следует формула (XIII).

Теорема 10. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_4^{(11)}) = \frac{1}{9\cdot 13}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{11}=n} 117x_1^4-36nx_1^2+n^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_9, \varphi_6^{(9)}) = \frac{1}{3861}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_9=n} 3861x_1^6-2970nx_1^4+495n^2x_1^2-10n^3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_7, \varphi_8^{(7)}) = \frac{1}{11\cdot 1053}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_7=n} 11583x_1^8-16632nx_1^6$$

$$+6930n^2x_1^4-840n^3x_1^2+14n^4\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_5, \varphi_{10}^{(5)}) = \frac{1}{243\cdot 11\cdot 13}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_5=n} 34749x_1^{10}-80190nx_1^8+62370n^2x_1^6$$

$$-18900n^3x_1^4+1890n^4x_1^2-28n^5\Big)z^n$$

является базисом пространства $S_{15}(3, \chi)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 15$ и $m = 2, 3, 4, 5$ следует:

$$\varphi_4^{(11)} = x_1^4-\frac{4}{13}F_{11}x_1^2+\frac{1}{13\cdot 9}F_{11}^2,$$

$$\varphi_6^{(9)} = x_1^6-\frac{10}{13}F_9x_1^4+\frac{5}{3\cdot 13}F_9^2x_1^2-\frac{10}{27\cdot 11\cdot 13}F_9^3,$$

$$\varphi_8^{(7)} = x_1^8-\frac{56}{3\cdot 13}F_7x_1^6+\frac{70}{3^2\cdot 13}F_7^2x_1^4-\frac{280}{3^3\cdot 11\cdot 13}F_7^3x_1^2+\frac{14}{3^4\cdot 11\cdot 13}F_7^4,$$

$$\varphi_{10}^{(5)} = x_1^{10}-\frac{30}{13}F_5x_1^8+\frac{70}{3\cdot 13}F_5^2x_1^6-\frac{700}{9\cdot 11\cdot 13}F_5^3x_1^4$$

$$+\frac{70}{9\cdot 11\cdot 13}F_5^4x_1^2-\frac{28}{3^5\cdot 11\cdot 13}F_5^5.$$

Далее, принимая во внимание лемму 5, получаем разложения:

$$(5.11)\quad \vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_4^{(11)}) = \frac{10}{3}z + 160z^2 + 3270z^3 + \frac{109120}{3}z^4 + \ldots,$$

$$(5.12)\quad \vartheta(\tau, F_9, \varphi_6^{(9)}) = \frac{556}{3\cdot 11\cdot 13}z - \frac{13632}{3\cdot 11\cdot 13}z^2 - \frac{785124}{3\cdot 11\cdot 13}z^3 - \frac{11351168}{3\cdot 11\cdot 13}z^4 + \ldots,$$

$$(5.13)\quad \vartheta(\tau, F_7, \varphi_8^{(7)}) = \frac{16}{39}z + \frac{80}{13}z^2 + \frac{14544}{13}z^3 + \frac{762976}{39}z^4 + \ldots,$$

$$(5.14)\quad \vartheta(\tau, F_5, \varphi_{10}^{(5)}) = -\frac{388}{81\cdot 11\cdot 13}z - \frac{5024}{27\cdot 11\cdot 13}z^2 - \frac{47892}{11\cdot 13}z^3 - \frac{87380032}{81\cdot 11\cdot 13}z^4 + \ldots$$

Отсюда следует утверждаемое, ибо система этих тэта-рядов линейно независима и известно ([3], с. 817), что $\dim S_{15}(3, \chi) = 4$.

F_{15} является квадратичной формой типа $(-15, 3, \chi)$. Ввиду этого,

$$(5.15)\quad E(\tau, F_{15}) = 1 + \frac{9}{6921461}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2187\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^{14} - \sum_{d\mid n}\left(\frac{d}{3}\right)d^{14}\right)z^n$$

$$= 1 + \frac{2186\cdot 9}{6921461}z + \frac{2188\cdot 1638\cdot 9}{6921461}z^2 + \frac{10460353202\cdot 9}{6921461}z^3 + \frac{2186\cdot 268419073\cdot 9}{6921461}z^4 + \ldots$$

Согласно лемме 1 и теореме 10, существуют числа c_1, c_2, c_3 и c_4 такие, что

$$\vartheta(\tau, F_{15}) - E(\tau, F_{15}) = c_1\vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_4^{(11)}) + c_2\vartheta(\tau, F_9, \varphi_6^{(9)}) + c_3\vartheta(\tau, F_7, \varphi_8^{(7)}) + c_4\vartheta(\tau, F_5, \varphi_{10}^{(5)}).$$

Приравнивая коэффициенты при z, z^2, z^3 и z^4 в обеих частях этого равенства и принимая во внимание разложения (2.15), (5.15) и (5.11)–(5.14), получаем:

$$c_1 = \frac{111448201932\cdot 9}{5^3\cdot 7^2\cdot 419\cdot 16519},\quad c_2 = \frac{9396432\cdot 3861}{5^2\cdot 7^2\cdot 419\cdot 16519},\quad c_3 = \frac{3132144\cdot 1053}{5\cdot 7\cdot 419\cdot 16519},\quad c_4 = 0.$$

Таким образом, доказано тождество

$$(5.16)\quad \vartheta(\tau, F_{15}) = E(\tau, F_{15}) + \frac{111448201932\cdot 9}{5^3\cdot 7^2\cdot 419\cdot 16519}\vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_4^{(11)}) + \frac{9396432\cdot 3861}{5^2\cdot 7^2\cdot 419\cdot 16519}\vartheta(\tau, F_9, \varphi_6^{(9)}) + \frac{3132144\cdot 1053}{5\cdot 7\cdot 419\cdot 16519}\vartheta(\tau, F_7, \varphi_8^{(7)}),$$

откуда следует формула (XIV).

Теорема 11. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_{12}, \varphi_4^{(12)}) = \frac{1}{273}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{12}=n} 273x_1^4 - 78nx_1^2 + 2n^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_6^{(10)}) = \frac{1}{7\cdot 351}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{10}=n} 2457x_1^6 - 1755nx_1^4 + 270n^2x_1^2 - 5n^3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_8, \varphi_8^{(8)}) = \frac{1}{11583}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_8=n} 11583x_1^8 - 15444nx_1^6 + 5940n^2x_1^4 - 660n^3x_1^2 + 10n^4\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_6, \varphi_{10}^{(6)}) = \frac{1}{7\cdot 3861}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_6=n} 27027x_1^{10} - 57915nx_1^8 + 41580n^2x_1^6 - 11550n^3x_1^4 + 1050n^4x_1^2 - 14n^5\Big)z^n$$

является базисом пространства $S_{16}(3, 1)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 16$ и $m = 2, 3, 4, 5$ следует:

$$\varphi_4^{(12)} = x_1^4 - \frac{2}{7}F_{12}x_1^2 + \frac{2}{3\cdot 7\cdot 13}F_{12}^2,$$

$$\varphi_6^{(10)} = x_1^6 - \frac{5}{7}F_{10}x_1^4 + \frac{10}{91}F_{10}^2x_1^2 - \frac{5}{27\cdot 91}F_{10}^3,$$

$$\varphi_8^{(8)} = x_1^8 - \frac{4}{3}F_8x_1^6 + \frac{20}{39}F_8^2x_1^4 - \frac{20}{13\cdot 27}F_8^3x_1^2 + \frac{10}{143\cdot 81}F_8^4,$$

$$\varphi_{10}^{(6)} = x_1^{10} - \frac{15}{7}F_6x_1^8 + \frac{20}{13}F_6^2x_1^6 - \frac{50}{9\cdot 13}F_6^3x_1^4 + \frac{50}{9\cdot 143}F_6^4x_1^2 - \frac{2}{27\cdot 143}F_6^5.$$

Далее, принимая во внимание лемму 5, получаем разложения:

$$\vartheta(\tau, F_{12}, \varphi_4^{(12)}) = \frac{44}{13}z + \frac{2376}{13}z^2 + \frac{55836}{13}z^3 + \frac{739376}{13}z^4 + \ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_6^{(10)}) = \frac{92}{63}z - \frac{168}{7}z^2 - \frac{15108}{7}z^3 - \frac{2536432}{63}z^4 + \ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_8, \varphi_8^{(8)}) = \frac{76}{143}z + \frac{280}{143}z^2 + \frac{174108}{143}z^3 + \frac{4311184}{143}z^4 + \ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_6, \varphi_{10}^{(6)}) = \frac{8}{819}z - \frac{40}{91}z^2 - \frac{29664}{91}z^3 - \frac{11173168}{819}z^4 + \ldots$$

Отсюда следует утверждаемое, ибо система этих тэта-рядов линейно независима и известно ([3], с. 815, 817), что $\dim S_{16}(3, 1) = 4$.

Согласно (2.19) и (1.8), имеем:

$$E(\tau, F_{16}) = 1+\frac{480}{193\cdot 3617}\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_{15}(n)z^n+6561\sigma_{15}(n)z^{3n})$$

$$= 1+\frac{480}{193\cdot 3617}z+\frac{480\cdot 32769}{193\cdot 3617}z^2+\frac{480\cdot 14355469}{193\cdot 3617}z^3$$

$$+\frac{480\cdot 1073774593}{193\cdot 3617}z^4+\ldots$$

Далее, согласно лемме 1 и теореме 11, получаем тождество

$$\vartheta(\tau, F_{16}) = E(\tau, F_{16})+\frac{84270688\cdot 273}{5^3\cdot 11\cdot 193\cdot 3617}\vartheta(\tau, F_{12}, \varphi_4^{(12)}) \tag{5.17}$$

$$+\frac{1167232\cdot 351}{5^3\cdot 193\cdot 3617}\vartheta(\tau, F_{10}, \varphi_6^{(10)})+\frac{159168\cdot 11583}{5^2\cdot 7\cdot 193\cdot 3617}\vartheta(\tau, F_8, \varphi_8^{(8)}),$$

откуда следует формула (XV).

Теорема 12. *Система обобщенных кратных тэта-рядов*

$$\vartheta(\tau, F_{13}, \varphi_4^{(13)}) = \frac{1}{35\cdot 9}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{13}=n}315x_1^4-84nx_1^2+2n^2\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_6^{(11)}) = \frac{1}{7\cdot 351}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_{11}=n}2457x_1^6-1638nx_1^4+234n^2x_1^2-4n^3\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_9, \varphi_8^{(9)}) = \frac{1}{5\cdot 13\cdot 243}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_9=n}15795x_1^8-19656nx_1^6$$
$$+7020n^2x_1^4-720n^3x_1^2+10n^4\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau, F_7, \varphi_{10}^{(7)}) = \frac{1}{81\cdot 11\cdot 13}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{F_7=n}11583x_1^{10}-23166nx_1^8$$
$$+15444n^2x_1^6-3960n^3x_1^4+330n^4x_1^2-4n^5\Big)z^n$$

является базисом пространства $S_{17}(3, \chi)$.

Доказательство. Из (2.18) при $k = 17$ и $m = 2, 3, 4, 5$ следует:

$$\varphi_4^{(13)} = x_1^4-\frac{4}{15}F_{13}x_1^2+\frac{2}{7\cdot 15\cdot 3}F_{13}^2,$$

$$\varphi_6^{(11)} = x_1^6-\frac{2}{3}F_{11}x_1^4+\frac{2}{21}F_{11}^2x_1^2-\frac{4}{27\cdot 7\cdot 13}F_{11}^3,$$

$$\varphi_8^{(9)} = x_1^8-\frac{56}{9\cdot 5}F_9x_1^6+\frac{4}{9}F_9^2x_1^4-\frac{16}{27\cdot 13}F_9^3x_1^2+\frac{2}{243\cdot 13}F_9^4,$$

$$\varphi_{10}^{(7)} = x_1^{10}-2F_7x_1^8+\frac{4}{3}F_7^2x_1^6-\frac{40}{9\cdot 13}F_7^3x_1^4+\frac{10}{27\cdot 13}F_7^4x_1^2-\frac{4}{81\cdot 11\cdot 13}F_7^5.$$

Далее, приняв во внимание лемму 5, получим разложения:

$$\vartheta(\tau, F_{13}, \varphi_4^{(13)}) = \frac{120}{35}z+\frac{7200}{35}z^2+\frac{191160}{35}z^3+\frac{2930880}{35}z^4+\ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_6^{(11)}) = \frac{188}{9\cdot 13}z-\frac{1680}{9\cdot 13}z^2-\frac{283716}{9\cdot 13}z^3-\frac{6605728}{9\cdot 13}z^4+\ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_9, \varphi_8^{(9)}) = \frac{1144}{27\cdot 5\cdot 13}z-\frac{2496}{27\cdot 5\cdot 13}z^2+\frac{2159352}{27\cdot 5\cdot 13}z^3+\frac{72621952}{27\cdot 5\cdot 13}z^4+\ldots,$$

$$\vartheta(\tau, F_7, \varphi_{10}^{(7)}) = \frac{172}{11\cdot 13\cdot 27}z-\frac{178800}{11\cdot 13\cdot 27}z^2-\frac{48072420}{11\cdot 13\cdot 27}z^3$$
$$-\frac{4236058592}{11\cdot 13\cdot 27}z^4+\ldots$$

Отсюда следует утверждаемое, ибо известно ([3], с. 817), что $\dim S_{17}(3, \chi) = 4$.

Согласно (2.20) и (1.9), имеем:

$$E(\tau, F_{17}) = 1+\frac{3}{126235201}\sum_{n=1}^{\infty}\left(6561\sum_{\delta d=n}\left(\frac{\delta}{3}\right)d^{16}+\sum_{d|n}\left(\frac{d}{3}\right)d^{16}\right)z^n$$

$$= 1+\frac{3\cdot 6562}{126235201}z+\frac{3\cdot 65535\cdot 6560}{126235201}z^2$$

$$+\frac{3\cdot 282429536482}{126235201}z^3+\frac{3\cdot 6562\cdot 4294901761}{126235201}z^4+\ldots$$

Наконец, приняв во внимание лемму 1 и теорему 12, получим тождество

$$\vartheta(\tau, F_{17}) = E(\tau, F_{17})+\frac{25478625152\cdot 3}{5^2\cdot 23\cdot 401\cdot 13687}\vartheta(\tau, F_{13}, \varphi_4^{(13)}) \tag{5.18}$$

$$+\frac{320577024\cdot 351}{5^2\cdot 7\cdot 23\cdot 401\cdot 13687}\vartheta(\tau, F_{11}, \varphi_6^{(11)})+\frac{60108192\cdot 243}{7\cdot 23\cdot 401\cdot 13687}\vartheta(\tau, F_9, \varphi_8^{(9)}),$$

откуда следует формула (XVI).

В заключение заметим, что функциональным эквивалентом формул для арифметической функции $r_{2k}(n)$ является тождество (см., напр., [4], [8])

$$\vartheta_3^{2k}(\tau) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\varrho_{2k}(n)e^{\pi i\tau n}+\sum_{t=1}^{l}\alpha_{2k}^{(t)}\vartheta_3^{2k-8t}(\tau)\vartheta_0^{4t}(\tau)\vartheta_2^{4t}(\tau),$$

где $\vartheta_j(\tau)$ — якобиевы тэта-функции; $\varrho_{2k}(n)$ — сумма сингулярного ряда Харди, отвечающего сумме $2k$ квадратов целых чисел; $\alpha_{2k}^{(t)}$ — постоянные, подобранные надлежащим образом; $l = \left[\frac{2k-1}{8}\right]$. Приравнивая коэффициенты при $e^{\pi i\tau n}$ в обеих частях этого тождества, получаем формулы для $r_{2k}(n)$, выписанные выше.

Мы предполагаем, что функциональным эквивалентом формул для арифметической функции $r(n, F_k)$ будет тождество

$$(*) \qquad \vartheta(\tau, F_k) = E(\tau, F_k) + \sum_{t=1}^{l} \alpha_k^{(t)} \vartheta(\tau, F_{k-2-2t}, \varphi_{2+2t}^{(k-2-2t)}),$$

где $l = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{k}{6m}\right]$; $\alpha_k^{(t)}$ — постоянные, которые следует подбирать надлежащим образом. Это действительно так при $2 \leqslant k \leqslant 17$, ибо доказанные выше тождества (1.11), (4.4), (4.6), (4.8), (4.14), (4.20), (4.26), (5.8), (5.9), (5.10), (5.16), (5.17), и (5.18) являются частными случаями тождества (*). А в настоящей работе показано, что формулы для $r(n, F_k)$ следуют из упомянутых тождеств приравниванием в их обеих частях коэффициентов при z^n. Желательно доказать, что тождество (*) имеет место при всех $k \geqslant 2$ или опровергнуть это предположение.

Литература

[1] V. Boulyguine, *Sur une application des fonctions elliptiques au problème de représentation des nombres entiers par une somme de carrés*, Изв. Императорской Академии Наук, Сер. 6, № 6 (1914), 389–404.

[2] Л. Е. Диксон, *Введение в теорию чисел*, Обработанный перевод с английского А. З. Вальфиша, Тбилиси 1941.

[3] E. Hecke, *Mathematische Werke*, Zweite Auflage, Göttingen 1970.

[4] Г. А. Ломадзе, *О представлении чисел суммами квадратов*, Тр. Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 16 (1948), 231–275.

[5] — *К представлению чисел суммами квадратов*, Тр. Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 20 (1954), 47–87.

[6] — *О параболических формах простой ступени и главного типа*, Тр. Тбилис. матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 57 (1977), 63–81.

[7] — *О представлении чисел суммами квадратичных форм* $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, Тезисы докл. Всесоюзной конференции „Теория чисел и ее приложения" (17–19 сентября 1985 г., Тбилиси), с. 140.

[8] L. J. Mordell, *On the representations of numbers as a sum of 2r squares*, Quart. J. Pure Appl. Math. 48 (1917), 93–104.

[9] H. Petersson, *Modulfunktionen und quadratische Formen*, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[10] A. Walfisz, *Zur additiven Zahlentheorie*, Тр. Тбилис. матем. ин-та 5 (1938), 69–114.

Поступило 21.5.1987 (1725)

ACTA ARITHMETICA
LIV (1989)

Selberg zeta functions with virtual characters and the class number

by

JEFFREY STOPPLE (Santa Barbara, Cal.)

1. Introduction. In [3], Hecke investigated the action of the modular group in spaces of holomorphic forms for principal congruence subgroups $\Gamma(q)$. For forms of weight 2, he obtained the complete decomposition of the representation into irreducible components. He also proved the curious fact that the difference of the multiplicities of two particular representations was equal the class number of the imaginary quadratic field $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-q})$. Later Feldman [1] studied arbitrary weight, Saito [7] studied Hilbert modular forms, and Hashimoto, in [2] considered Siegel modular forms. Each found similar class number formulas.

The group $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{Z})$ also acts by linear fractional transformation in the vector space of Maass cusp forms for $\Gamma(q)$. Since $\Gamma(q)$ acts trivially the representation is equivalent to one of the factor group $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{F}_q)$. This paper will prove a formula analogous to Hecke's relating multiplicities of representations π^+ and π^- in these spaces to the class number and fundamental unit of the real quadratic field $\boldsymbol{Q}(\sqrt{q})$. (The representations π^+ and π^- are defined below.) Of course, Maass cusp forms are themselves very intractible objects, so no new results on class numbers are to be expected.

For convenience we will study the zeros of the quotient of Selberg zeta functions $Z(s, \pi^+)/Z(s, \pi^-)$, which is equivalent to the problem described above for Maass cusp forms.

We need some definitions. Let q be a prime, $q \equiv 1(4)$. We can define a character χ on the upper triangular subgroup of $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{F}_q)$ by

$$\chi\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} = \left(\frac{a}{q}\right)$$

for $\left(\frac{a}{q}\right)$ the Legendre symbol. We can form the corresponding induced representation of $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{F}_q)$, which has two irreducible components:

$$\mathrm{ind}(\chi) \cong \pi^+ \oplus \pi^-.$$