ACTA ARITHMETICA
LIII (1990)

Eine Bemerkung zur Summation von Eisenstein-Reihen

von

B. Z. Moroz (Bonn) und R. Sczech (Newark, N. J.)

Dem Andenken von Prof. V. G. Sprindžuk

1. Gegenstand unserer Note sind die Eisensteinschen Reihen

$$E_k(x) = \sum_{\omega \in L+x}{}'_e \frac{1}{\omega^k}, \qquad k = 1, 2$$

zu einem Gitter $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ mit nicht verschwindender Basisdeterminante $D(L) = \omega_1 \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 \omega_2 \neq 0$. Diese Reihen sind zuerst von Eisenstein in einer grundlegenden Arbeit (vgl. [4]) untersucht worden, wo u.a. gezeigt wird, daß absolute Konvergenz für $k > 2$ vorliegt, der Wert der Reihen aber von der Anordnung der Glieder abhängt, falls $k = 1, 2$ ist. Um den Reihen einen Wert beizulegen im Falle $k = 1, 2$, benutzte Eisenstein den Summationsprozess

$$\sum_{\omega \in L+x}{}_e := \lim_{M \to \infty} \sum_{m=-M}^{M} \Big(\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \Big), \qquad \omega = m\omega_1 + n\omega_2 + x,$$

der von der Wahl einer $\mathbf{Z}$-basis für L abhängig ist. Ein von solcher Wahl freies Verfahren zur Summation der Eisenstein-Reihen wurde später von Hecke eingeführt. Er betrachtete die in einer rechten s-Halbebene absolut konvergente Reihe

$$H_k(x, s) = \sum_{\omega \in L+x}{}' \frac{1}{\omega^k |\omega|^s}$$

und zeigte, daß $H_k(x, s)$ eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe s-Ebene besitzt. Als Eisenstein-Reihen vom Gewicht $k = 1, 2$ definierte er dann

$$H_k(x) := H_k(x, 0),$$

und bewies die Relationen ([1], S. 412, 451, 475)

$$H_1(x) = E_1(x) + \left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \frac{x\bar{\omega}_2 - \bar{x}\omega_2}{\omega_2}, \qquad H_2(x) = E_2(x) - \left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2}.$$

Im folgenden wollen wir eine neue und elementare Summation der Eisenstein-Reihen vorstellen, die das Ergebnis von Hecke impliziert. Dazu betrachten wir die für positive t endliche Summe

$$S(t) := \sum_{\substack{\omega \in L+x \\ |\omega| < t}}{}' \frac{1}{\omega^k}.$$

SATZ 1. $G_k(x) := \lim_{t\to\infty} S(t)$ *existiert für* $k \geqslant 1$, *und es ist*

$$G_1(x) = E_1(x) + \left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \frac{x\bar{\omega}_2 - \bar{x}\omega_2}{\omega_2}, \qquad G_2(x) = E_2(x) - \left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \frac{\bar{\omega}_2}{\omega_2},$$

$$G_k(x) = E_k(x) \qquad \text{für } k > 2.$$

Es handelt sich hier also um die Summation der Eisensteinschen Reihen nach wachsenden Normen der Glieder. Aus der Existenz der Grenzwerte $G_k(x)$ folgt bekanntlich

$$G_k(x) = \lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{s\to 0} H_k(x, s) = H_k(x).$$

Damit ist das Heckesche Ergebnis in unserem Resultat mitenthalten.

2. Für $k > 2$ ist nichts zu beweisen da absolute Konvergenz vorliegt, und der Fall $k = 2$ ist bereits in einer früheren Arbeit ([3], Satz 10) ausführlich untersucht worden, so daß wir uns hier auf den Fall $k = 1$ beschränken können. Wir betrachten die Weierstraßsche Zetafunktion

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} + \sum_{m \in L\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{m+x} - \frac{1}{m} + \frac{x}{m^2}\right).$$

Diese Reihe konvergiert absolut. Anwendung der Eisenstein-Summation $\sum_e$ ergibt

(1) $$\zeta(x) = E_1(x) + xE_2(0),$$

während die Summation nach wachsenden Normen

(2) $$\zeta(x) = G_1(x) + xG_2(0) - \lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m \in L\setminus\{0\} \\ |m+x| < t}} \frac{1}{m}$$

liefert. Dabei haben wir die elementare Tatsache benutzt, daß

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m\in L\setminus\{0\} \\ |m+x|<t}} \frac{1}{m^2} = \lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m\in L\setminus\{0\} \\ |m|<t}} \frac{1}{m^2}$$

ist, vgl. [3]. Der Vergleich von Satz 1 mit (1) und (2) ergibt, daß alles darauf

hinausläuft, die folgende Grenzformel zu beweisen,

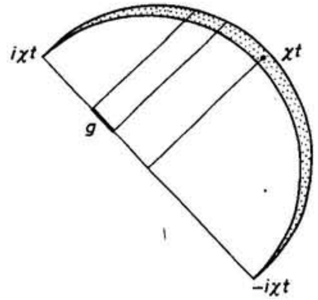
$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{m\in L\setminus\{0\} \\ |m+x|<t}} \frac{1}{m} = -\left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \bar{x},$$

wobei wir ohne Einschränkung $x \neq 0$ annehmen können. In dieser Reihe tragen Glieder mit $|m+x| < t$ und $|-m+x| < t$ zur Summe nichts bei. Daher genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{|m-x| < t \leqslant |m+x|} \frac{1}{m} = \left|\frac{2\pi i}{D(L)}\right| \bar{x}.$$

Geometrisch gesprochen, läuft hier die Summe (bei festem t) über alle Gitterpunkte $m \in L\setminus\{0\}$, die zwischen zwei (in Richtung von $\chi := x/|x|$ parallelverschobenen) Kreisen vom Radius t liegen, s. Zeichnung. Die Fläche dieses kreisförmigen Streifens ist

$$2t^2(\arcsin y + y\sqrt{1-y^2}), \qquad y = |x/t|$$
$$= |4xt| + O(1/t) \qquad \text{für } t \to \infty.$$



Nach dem bekannten Satz von van der Corput ([2], Satz 565), ist die Anzahl der darin enthaltenen Gitterpunkte gleich

$$\left|\frac{8x}{D(L)}\right| t + O(t^\gamma) \qquad \text{für } t \to \infty$$

mit $\gamma < 1$ (sogar $\gamma \leqslant 2/3$, doch brauchen wir das im folgenden nicht). Genauer gilt sogar, daß die Projektion dieser Gitterpunkte in Richtung von χ gleichmäßig verteilt ist auf der Verbindungsgeraden von $-i\chi t$ nach $i\chi t$, d.h., die Anzahl der in ein Geradenstück g fallenden Punkte ist

$$\left|\frac{4x}{D(L)}\right| l + O(t^\gamma) \qquad \text{für } l \to \infty,$$

$l =$ Länge von g. Nach dem Gesagten ist jetzt klar, daß

$$\left|\frac{D(L)}{8x}\right| \frac{2\chi i}{t} \sum_{(1/t)|\omega - x| < 1 \leqslant (1/t)|\omega + x|} \frac{t}{\omega}$$

eine Riemannsche Summe ist, die für $t \to \infty$ gegen das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{d(i\chi y)}{\chi(\sqrt{1-y^2}+iy)} = i \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}+iy} = 2i \int_{0}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy = \frac{\pi i}{2}$$

konvergiert. Damit ist alles bewiesen.

Abschließend ist noch zu bemerken, daß der Satz von van der Corput nur zum Beweis von Satz 1 im Falle $k = 1$ benötigt wird, nicht jedoch im Falle $k = 2$, wo ein völlig elementares Argument zum Ziel führt.

Literatur

[1] E. Hecke, *Mathematische Werke*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970.
[2] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II, Leipzig 1927.
[3] R. Sczech, *Zur Summation von L-Reihen*, Bonner Mathematische Schriften Nr. 141, Bonn 1982.
[4] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1976.

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR MATHEMATIK
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3
Federal Republic of Germany
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
RUTGERS UNIVERSITY
Newark, NJ 07102
USA

Eingegangen am 28.10.1988
und in revidierter Form am 20.2.1989 (1881)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1990)

Теория поворотов в простых центральных алгебрах

М. Н. Кубенский, А. В. Малышев (Ленинград)

Памяти Владимира Геннадиевича
Спринджука посвящается

1. Введение. Цель предлагаемой работы – обобщение на простые центральные алгебры теории поворотов целых векторов, построенной Б. А. Венковым [1] для гурвицева порядка алгебры кватернионов Гамильтона над полем рациональных чисел. В этой статье мы пользуемся общепринятыми определениями и известными результатами теории колец и алгебр – см. [14], [23], [27], [11]. Теория поворотов Б. А. Венкова обобщалась на другие кватернионные алгебры и алгебры матриц второго порядка Ю. В. Линником [4], [5], А. В. Малышевым [7], А. В. Малышевым и У. М. Пачевым [8], Ю. Г. Тетериным [9] (см. также Райс [24], Рем [22] и Шеманске [25]). Наиболее интересные и общие результаты здесь принадлежат Ю. Г. Тетерину [9], который построил теорию поворотов целых векторов порядков в произвольных кватернионных алгебрах над полем рациональных чисел (по-видимому, только технические трудности возникают при обобщении методики и результатов работы [9] на кватернионные алгебры над алгебраическими числовыми полями).

В нашей работе обобщение этих результатов на простые центральные алгебры над алгебраическими числовыми полями достигается существенным изменением методики исследования: предлагается иная конструкция поворотов, мы рассматриваем не повороты целых векторов, а „повороты" соответсвующих вложений расширений основного поля в рассматриваемую алгебру. Такая конструкция в частном случае кватернионной алгебры была предложена в статье [2] (для произвольных простых центральных алгебр она намечена в заметке [3]).

В §2 нашей работы детально описывается и обосновывается конструкция целого поворота в простой центральной алгебре над полем алгебраических чисел. Построенным поворотам (точнее, их „связкам") взаимно однозначно сопоставляются классы идеалов соответствующего конечного расширения базисного алгебраического числового поля (см. теорему 1). В теореме 2 получена формула для числа орбит связок при