ERRATA

Page, line	For	Read
354^1	$= \|\varrho\|_p$	$\|\varrho\|_p$
380_{11}	$\max(\overline{\lvert\alpha\rvert}, \overline{\lvert\beta\rvert})$	$\max(\lceil\alpha\rceil, \lceil\beta\rceil)$
380_8	$\overline{\lvert a\alpha\rvert}$	$\lceil a\alpha\rceil$
380_8	$\overline{\lvert b\beta\rvert}$	$\lceil b\beta\rceil$
393^2	$h = h_1, \ldots, h_s)$	$h = (h_1, \ldots, h_s)$
393_5	$p_1^{\lvert h_1\rvert} \ldots p_s^{\lvert h_s I} \leqslant P_s^{M/2}\sqrt{N}$	$p_1^{\lvert h_1\rvert} \ldots p_s^{\lvert h_s\rvert} \leqslant P_s^{M/2} \leqslant \sqrt{N}$

In the contents (Conspectus materiae …, see inside front cover) the page numbers of Kotov's paper are missing: 351–356.

ACTA ARITHMETICA
LIII (1990)

Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций

В. Х. Салихов (Москва)

Посвящается памяти Проф. В. Г. Спринджука

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad \delta^m y + Q_{m-1}\delta^{m-1} y + \ldots + Q_0 y = 0, \qquad \delta = z\frac{d}{dz}, \; Q_i \in \boldsymbol{C}(z).$$

Определение 1. Дифференциальное поле K называется *допустимым для уравнения* (1), если выполнены следующие условия:

1) K является дифференциальным расширением $\boldsymbol{C}(z)$;

2) полем констант K является $\boldsymbol{C}$;

3) уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений (ф.с.р.) в поле K.

Пусть уравнение (1) имеет ф.с.р., состоящую из функций, аналитичных в области $V \subset \boldsymbol{C}$. Тогда поле $\mathrm{Mer}(V)$ всех мероморфных в области V функций является допустимым для уравнения (1). Допустимым будет также произвольное расширение Пикара–Вессио (см. [3]).

Определение 2. Пусть K — допустимое поле для уравнения (1), $\boldsymbol{C}(z) \subset \mathscr{L} \subset K$. Уравнение (1) называется *приводимым* (*линейно приводимым*) над полем $\mathscr{L}$ в K, если существует нетривиальное решение уравнения (1) $y \in K$ такое, что $y, \delta y, \ldots, \delta^{m-1} y$ алгебраически (линейно) зависимы над $\mathscr{L}$.

Приводимость (линейную приводимость) над $\boldsymbol{C}(z)$ в $\mathrm{Mer}(V)$ далее для краткости именуем, опуская указание полей.

Настоящая работа посвящена исследованию приводимости дифференциального уравнения

$$(2) \qquad L_{\bar{\lambda},\bar{\nu}}(y) = \{(\delta + t\lambda_1)\ldots(\delta + t\lambda_{t+l}) - z^t(\delta + t\nu_1)\ldots(\delta + t\nu_l)\}(y) = 0,$$

где $t \in \boldsymbol{N}$, $l \geqslant 0$, $\nu_i, \lambda_i \in \boldsymbol{C}$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{t+l})$, $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$, и применению полученного результата к исследованию арифметических свойств значений известных в теории специальных функций [5] обобщенных гипергеометрических функций

(3) $$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu_1)_n\ldots(\nu_l)_n}{(\lambda_1+1)_n\ldots(\lambda_{t+l}+1)_n}\left(\frac{z}{t}\right)^{tn}.$$

Пусть $\bar{a}=(a_1,\ldots,a_s)$, $\bar{b}=(b_1,\ldots,b_s)$, $a_i, b_i\in \boldsymbol{C}$. Используем обозначение $\bar{a}\sim\bar{b}$ в случае, когда существует перестановка $i_1,\ldots,i_s$ чисел $1,\ldots,s$ такая, что $(a_j-b_{i_j})\in\boldsymbol{Z}$, $j=1,\ldots,s$. Если $c\in\boldsymbol{C}$, то обозначим $(\bar{a}+c)=(a_1+c,\ldots,a_s+c)$. В следующей теореме дается критерий приводимости дифференциального уравнения (2) для всех (t, l), кроме случая $t=6$, $l\in\{0; 1; 2\}$.

Теорема 1. I. *Пусть t — нечетно, $t+l>1$. Тогда дифференциальное уравнение* (2) *неприводимо в том и только в том случае, когда выполнены условия*:

1) *для всех* $i\in\{1,\ldots,t+l\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$ $(\lambda_i-\nu_j)\notin\boldsymbol{Z}$;

2) *не существует $d>1$, являющееся общим делителем чисел t, l и такое, что* $(\bar{\lambda}+1/d)\sim\bar{\lambda}$, $(\bar{\nu}+1/d)\sim\bar{\nu}$.

II. *Пусть t — четно, $t=2\varkappa$, $\varkappa+l\geqslant 2$; если $t=6$, то $l>3$. Тогда дифференциальное уравнение* (2) *неприводимо в том и только в том случае, когда выполнены условия* 1) *и* 2), *а также условия*:

a) *если $l=0$, то не существуют $X_0,\ldots,X_{\varkappa-1}\in\boldsymbol{C}$ такие, что*

(4) $$(\bar{\lambda}+X_0)\sim(0;\tfrac{1}{2};X_1;-X_1;\ldots;X_{\varkappa-1};-X_{\varkappa-1});$$

b) *если $l>0$ — четно, $l=2k$, то не существуют $X_0,\ldots,X_{\varkappa+l-1}\in\boldsymbol{C}$ такие, что выполняется система соотношений*

(5) $$\begin{gathered}(\bar{\lambda}+X_0)\sim(0;\tfrac{1}{2};X_1;-X_1;\ldots;X_{\varkappa+k-1};-X_{\varkappa+k-1}),\\ (\bar{\nu}+X_0)\sim(X_{\varkappa+k};-X_{\varkappa+k};\ldots;X_{\varkappa+l-1};-X_{\varkappa+l-1});\end{gathered}$$

c) *справедливо утверждение пункта* b) *с заменой системы* (5) *на систему соотношений*

(6) $$\begin{gathered}(\bar{\lambda}+X_0)\sim(X_1;-X_1;\ldots;X_{\varkappa+k};-X_{\varkappa+k}),\\ (\bar{\nu}+X_0)\sim(0;\tfrac{1}{2};X_{\varkappa+k+1};-X_{\varkappa+k+1};\ldots;X_{\varkappa+l-1};-X_{\varkappa+l-1});\end{gathered}$$

d) *если l — нечетно, $l=2k+1$, то не существуют $X_0,\ldots,X_{\varkappa+l-1}\in\boldsymbol{C}$ такие, что выполняются соотношения*

(7) $$\begin{gathered}(\bar{\lambda}+X_0)\sim(0;X_1;-X_1;\ldots;X_{\varkappa+k};-X_{\varkappa+k}),\\ (\bar{\nu}+X_0)\sim(\tfrac{1}{2};X_{\varkappa+k+1};-X_{\varkappa+k+1};\ldots;X_{\varkappa+l-1};-X_{\varkappa+l-1}).\end{gathered}$$

В недавней работе [1] Бейкерс, Браунавелл и Хекман показали, что неприводимость уравнения (2) в случае $\lambda_1=0$ эквивалентна существованию сюръективного гомоморфизма из ее дифференциальной группы Галуа $G(L)$ в SL_n либо в Sp_n ($n=t+l$, соответствующие определения унимодулярной линейной группы SL_n и симплектической группы Sp_n см., например, в [13], с. 45). Это свойство $G(L)$ дало возможность получить в предложении 4.4 [1] достаточные условия на параметры λ_i, ν_i, обеспечивающие неприводимость уравнения (2). Отметим, что метод, использованный в настоящей работе, и метод работы [1] независимы и существенно различны. Результат [1] в отличие от настоящей работы применим к совокупности уравнений, однако если рассматривать одно уравнение (2), то в наших теоремах 1, 2 получены существенно более точные условия на параметры λ_i, ν_i. В частности, удается рассмотреть неоднородный случай. Таким образом указанные работы дополняют друг друга. Отметим также, что геометрическая интерпретация условия 2) теоремы 1 в терминах покрытий Куммера дана в следствии 6 [4].

2. В 1929 г. К. Зигель [9] предложил метод, позволивший исследовать арифметические свойства значений E-функций. Пусть в равенстве (3)

(8) $$\lambda_i,\ \nu_i\in\boldsymbol{Q},\quad \lambda_i\neq-1,\,-2,\ldots;\ \nu_i\neq 0,\,-1,\,-2,\ldots$$

Тогда функция $\varphi(z)$ и ее производные любого порядка являются E-функциями. Функция $\varphi(z)$ является решением дифференциального уравнения $L_{\bar{\lambda},\bar{\nu}}(y)=t^{t+l}\lambda_1\ldots\lambda_{t+l}$ (см. определение $L_{\bar{\lambda},\bar{\nu}}$ в (2)).

Рассмотрим числа

(9) $$\varphi(\alpha),\ \varphi'(\alpha),\ \ldots,\ \varphi^{(t+l-1)}(\alpha),$$

где α — алгебраическое число, отличное от нуля.

В фундаментальной работе А. Б. Шидловского [11] установлена общая теорема об алгебраической независимости значений E-функций, из которой, в частности, следует, что числа (9) алгебраически независимы над $\boldsymbol{Q}$ тогда и только тогда, когда функции

(10) $$\varphi(z),\ \varphi'(z),\ \ldots,\ \varphi^{(t+l-1)}(z)$$

алгебраически независимы над $\boldsymbol{C}(z)$. Ю. В. Нестеренко [6] доказал общую теорему, из которой следует, что последнее условие выполняется, если уравнение (2) неприводимо. Поэтому справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *а также условия* (8). *Тогда числа* (9) *алгебраически независимы над* $\boldsymbol{Q}$.

Ранее аналогичные результаты более частного характера были получены многими авторами. Подробно историю вопроса см. в монографии А. Б. Шидловского [10].

Существенность условий a)–d) теоремы 1 для утверждения теоремы 2 показывает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть t — четно, $t = 2\varkappa$, $\varkappa + l \geqslant 2$; существует $i \in \{1, \ldots, t+l\}$ такое, что $\lambda_i \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, а также выполнена одна из систем соотношений* (4)–(7). *Тогда числа* (9) *алгебраически зависимы над* $\boldsymbol{Q}$.

В случае, когда t — нечетно, $l = 0$, справедлив более точный результат, нежели установленный в теореме 2.

Пусть здесь и далее ζ обозначает примитивный корень степени t из 1.

Теорема 4. *Пусть t — нечетно, $t > 1$, $l = 0$, $\lambda_i \in \boldsymbol{Q}$, $\lambda_i \neq -1, -2, \ldots$; алгебраические числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ отличны от нуля и таковы, что для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ $\alpha_i/\alpha_j \notin \boldsymbol{Q}(\zeta)$. Тогда совокупность mt чисел $\varphi^{(i)}(\alpha_j)$, $i = 0, \ldots, t-1, j = 1, \ldots, m$, алгебраически независима над $\boldsymbol{Q}$ в том и только в том случае, когда числа $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_t$ не являются целыми, образующими полную систему вычетов по* $\operatorname{mod} t$.

Докажем сначала теорему 1.

3. Уравнение (2) имеет фундаментальную систему формальных решений вида

$$y_j = e^{\zeta^j z} z^{\gamma_j} \tau(\zeta^j z), \quad j = 1, \ldots, t, \tag{11}$$
$$y_j = z^{\gamma_j} \sum_{i=0}^{g} \tau_{ij} \ln^i z, \quad j = t+1, \ldots, t+l,$$

где $\gamma_j \in \boldsymbol{C}$, $g \geqslant 0$, $\tau(z)$, τ_{ij} — элементы поля формальных степенных рядов

$$T = \{\sum_{n \geqslant n_0} c_n z^{-n}, c_n \in \boldsymbol{C}, n_0 \in \boldsymbol{Z}\},$$

см., например, [8], §3.

Построим допустимое поле $K \supset T$ для уравнения (2).

Пусть $q \in \boldsymbol{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \boldsymbol{C}$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, а также $\beta_0 = 1/q$, $\beta_1, \ldots, \beta_p$ линейно независимы над $\boldsymbol{Q}$, пусть также существуют $k_{ij}, g_{ij} \in \boldsymbol{Z}$ такие, что

$$\zeta^j = \sum_{i=1}^{r} k_{ij} \alpha_i, \quad j = 1, \ldots, t, \qquad \gamma_j = \sum_{i=0}^{p} g_{ij} \beta_i, \quad j = 1, \ldots, t+l. \tag{12}$$

Пусть далее $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_p, w$ алгебраически независимы над T; $y_0^q = z$. Определим поле K — расширение T, полученное с помощью присоединения элементов $x_1, \ldots, x_r, y_0, \ldots, y_p, w$.

Продолжим естественное почленное дифференцирование T следующим образом

$$\bar{D} = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=0}^{p} \frac{\beta_j y_j}{z} \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial w}. \tag{13}$$

Обозначим для $u \in K$ $u' = \bar{D}u$. Несложно доказать, что полем констант K будет $\boldsymbol{C}$. K является дифференциальным расширением $\boldsymbol{C}(z)$ ввиду того, что $K \supset T \supset \boldsymbol{C}(z)$. Если $d_1, \ldots, d_r$, $\mu_0, \ldots, \mu_p \in \boldsymbol{Z}$, $a = d_1\alpha_1 + \ldots + d_r\alpha_r$, $b = \mu_0\beta_0 + \ldots + \mu_p\beta_p$, то определим

$$e(a) = x_1^{d_1} \ldots x_r^{d_r} \in K, \qquad s(b) = y_0^{\mu_0} \ldots y_p^{\mu_p} \in K. \tag{14}$$

Из определений (13) и (14) имеем $e'(a) = ae(a)$, $s'(b) = (b/z)s(b)$, $w' = 1/z$, $e(a_1 + a_2) = e(a_1)e(a_2)$, $s(b_1 + b_2) = s(b_1)s(b_2)$.

Но тогда из (11) и (12) получим, что поле K содержит ф.с.р. уравнения (2) вида

$$u_j = e(\zeta^j)s(\gamma_j)\tau(\zeta^j z), \quad j = 1, \ldots, t, \tag{15}$$
$$u_j = s(\gamma_j) \sum_{i=0}^{g} \tau_{ij} w^i, \quad j = t+1, \ldots, t+l.$$

Тем самым доказано, что K — допустимое поле для уравнения (2). Обозначим

$$A_K = \{d_1\alpha_1 + \ldots + d_r\alpha_r, d_i \in \boldsymbol{Z}\}, \qquad B_K = \{\mu_0\beta_0 + \ldots + \mu_p\beta_p, \mu_i \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\varphi_1 e(a_1) + \ldots + \varphi_n e(a_n) = 0$, где $a_i \in A_K$ и различны,*

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{M} \sum_{\varrho=0}^{R} \tau_{ij\varrho} s(b_j) w^\varrho, \qquad \tau_{ij\varrho} \in T, b_j \in B_K, M \in \boldsymbol{N}, R \geqslant 0.$$

Тогда все $\varphi_i = 0$.

Доказательство немедленно следует из определений (14).

4. Обозначим (см. (1))

$$D = \delta + z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + \ldots + z_{m-1} \frac{\partial}{\partial z_{m-2}} - (Q_0 z_0 + \ldots + Q_{m-1} z_{m-1}) \frac{\partial}{\partial z_{m-1}}. \tag{16}$$

Если $P \in K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$, $v \in K$, то обозначим

$$P(\bar{v}) = P(v, \delta v, \ldots, \delta^{m-1} v).$$

Лемма 2. *Пусть K — допустимое поле для уравнения* (1), *$\mathscr{L}$ — дифференциальное подполе K, $\mathscr{L} \supset \boldsymbol{C}(z)$; $m > 1$. Тогда уравнение* (1) *приводимо над $\mathscr{L}$ в K в том и только в том случае, когда существует ненулевой однородный идеал I кольца $\mathscr{L}[z_0, \ldots, z_{m-1}]$, имеющий нетривиальный нуль и такой, что* $DI \subset I$.

Доказательство. Если уравнение (1) приводимо над $\mathscr{L}$ в K, то существует нетривиальное решение уравнения (1) $v \in K$ такое, что v, $\delta v, \ldots, \delta^{m-1} v$ алгебраически зависимы над $\mathscr{L}$. Пусть I_1 — идеал кольца $\mathscr{L}[z_0, \ldots, z_{m-1}]$, состоящий из всех многочленов P таких, что $P(\bar{v}) = 0$. Будем для $P \in \mathscr{L}[z_0, \ldots, z_{m-1}]$ обозначать через P^* совокупность однородных членов старшей степени, входящих в P. Пусть I — идеал, порожденный всеми многочленами P^* такими, что $P\in I_1$. Имеем $DI\subset I$ (см. [6], с. 590). Если I имеет нетривиальный нуль, то I — искомый. В противном случае элемент v алгебраичен над $\mathscr{L}$ (см. [6], с. 591). Но тогда $h=\delta v/v$ алгебраичен над $\mathscr{L}$. Пусть $h=h_1, h_2, \ldots, h_d$ — набор всех сопряженных с h над $\mathscr{L}$. Положим $P=(z_1-h_1z_0)\ldots(z_1-h_dz_0)\in\mathscr{L}[z_0, z_1]\subset\mathscr{L}[z_0, \ldots, z_{m-1}]$ ввиду $m>1$. Очевидно, $P(\bar v)=0$. Идеал, порожденный многочленами P, DP, $D^2P, \ldots,$ — искомый.

Если идеал I удовлетворяет условиям леммы, то аналогично доказательству леммы 4 [7] получим, что существует нетривиальное решение уравнения (1) $v\in K$ такое, что $(v, \delta v, \ldots, \delta^{m-1}v)$ — нуль идеала I. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{L}$ — дифференциальное подполе допустимых для уравнения* (1) *полей K_1 и K_2, $\mathscr{L}\supset C(z)$, $m>1$. Тогда приводимость уравнения* (1) *над $\mathscr{L}$ в K_1 эквивалентна приводимости над $\mathscr{L}$ в K_2.*

Доказательство очевидно.

Пусть K — допустимое поле для уравнения (1), H_K — алгебраическое замыкание $\boldsymbol{C}(z)$ в K. Определим подмножество Λ_K ненулевых однородных многочленов $P\in H_K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$ следующим образом: $P\in\Lambda_K$, если существует нетривиальное решение уравнения (1) $v\in K$ такое, что $P(\bar v)=0$. Из следствия 1 и доказательства леммы 2 следует, что если уравнение (1) приводимо, то $\Lambda_K\neq\varnothing$. Обозначим H — поле всех алгебраических функций, $H=\overline{\boldsymbol{C}(z)}$.

Лемма 3. *Пусть уравнение* (1) *приводимо, но линейно неприводимо над H, $P\in\Lambda_K$, $u_1, \ldots, u_m\in K$ — произвольная ф.с.р. уравнения* (1), $\varrho\in\{1, \ldots, m\}$. *Тогда существуют $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ — решения уравнения* (1) *такие, что*

1) $P(\bar\omega_i)=0$, $i=1, \ldots, \varrho$;

2) $\omega_i=c_{i1}u_1+\ldots+c_{im}u_m$, $c_{ij}\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$, $\det(c_{ij})_{i=1,\ldots,\varrho,\, j=m-\varrho+1,\ldots,m}\neq 0$.

Доказательство. Пусть $v\in K\backslash\{0\}$ — решение уравнения (1) такое, что $P(\bar v)=0$, J — простой идеал кольца $H_K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$, порожденный всеми однородными многочленами $\bar P$ такими, что $\bar P(\bar v)=0$. Обозначим J^e расширение идеала J в кольцо $K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$. J^e прост (см. [12], с. 267), однороден, имеет те же нули, что J, $DJ^e\subset J^e$. Определим $l_1, \ldots, l_m$ из системы

$$z_i=\sum_{j=1}^m l_j\delta^i u_j, \quad i=0, 1, \ldots, m-1.$$

Пусть

$$l_j=\sum_{i=0}^{m-1} a_{ij}z_i, \quad a_{ij}\in K, j=1, \ldots, m; \quad Q=l_1\ldots l_m\in K[z_0, \ldots, z_{m-1}].$$

Если $\omega=c_1u_1+\ldots+c_mu_m$, $c_i\in\boldsymbol{C}$, то $Q(\bar\omega)=c_1\ldots c_m$. Если для всех ω таких, что $(\omega, \delta\omega, \ldots, \delta^{m-1}\omega)$ — нуль идеала J, будет $c_1\ldots c_m=0$, то по следствию на с. 504 работы [7] $Q\in J^e$, а тогда ввиду простоты J^e для некоторого $j\in\{1, \ldots, m\}$ $l_j\in J^e$. Пусть $Q_1, \ldots, Q_N$ — базис J. Тогда $l_j=R_1Q_1+\ldots+R_NQ_N$, $R_i\in K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$. Обозначим $w_1, \ldots, w_k$ — базис над H_K множества коэффициентов всех многочленов R_i. Имеем

$$R_i=\sum_{\nu=1}^k R_{i\nu}w_\nu, \quad R_{i\nu}\in H_K[z_0, \ldots, z_{m-1}], \quad l_j=\sum_{\nu=1}^k L_\nu w_\nu,$$

$$L_\nu=\sum_{i=0}^{m-1} h_{i\nu}z_i, \quad h_{i\nu}\in H_K, \quad L_\nu=\sum_{i=1}^N R_{i\nu}Q_i\in J, \quad \nu=1, \ldots, k.$$

Отсюда тривиально следует линейная приводимость уравнения (1) над H. Это противоречит условию леммы, поэтому существует $\omega_1\in K$ такое, что $(\omega_1, \delta\omega_1, \ldots, \delta^{m-1}\omega_1)$ — нуль идеала J, $\omega_1=c_{11}u_1+\ldots+c_{1m}u_m$, где все $c_{1i}\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$. Так как $P\in J$, то $P(\bar\omega_1)=0$.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_s$ уже удовлетворяют условиям леммы для некоторого $\varrho=s\in\boldsymbol{N}$. Ввиду утверждения 2) леммы $\omega_1, \ldots, \omega_s, u_{s+1}, \ldots, u_m$ — ф.с.р. уравнения (1). Аналогично ω_1 найдем $\omega_{s+1}\in K$ такое, что $(\omega_{s+1}, \delta\omega_{s+1}, \ldots, \delta^{m-1}\omega_{s+1})$ — нуль идеала J, $\omega_{s+1}=c_{s+1,1}u_1+\ldots+c_{s+1,m}u_m=d_1\omega_1+\ldots+d_s\omega_s+d_{s+1}u_{s+1}+\ldots+d_mu_m$, где все $c_{s+1,i}, d_i\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$. Утверждения леммы выполнены, очевидно, при $\varrho=s+1$, и лемма доказана.

Определим для приводимого уравнения (1) $d\in\boldsymbol{N}$, $d\leqslant m-1$, следующим образом: существует $P\in\Lambda_K$ такой, что $\dfrac{\partial P}{\partial z_d}\neq 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial z_j}=0$, $j=d+1, \ldots, m-1$, кроме того, для всех $Q\in\Lambda_K$ существует $\varkappa\in\{d, \ldots, m-1\}$ такое, что $\partial Q/\partial z_\varkappa\neq 0$. Фиксируем $P\in\Lambda_K$ с указанным свойством, наименьшей степени, и такой, что коэффициент при старшем члене при лексикографическом упорядочении переменных $z_0, \ldots, z_d$ равен единице.

При этих предположениях справедливы следующие две леммы.

Лемма 4. *Пусть I — однородный идеал кольца $H_K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$, имеющий нетривиальный нуль и такой, что $DI\subset I$, $P\in I$; $v\in K\backslash\{0\}$ — решение уравнения* (1) *такое, что $P(\bar v)=0$; $Q\in I$. Тогда $Q(\bar v)=0$.*

Доказательство. Обозначим $S=\partial P/\partial z_d$. Ввиду выбора P $S(\bar v)\neq 0$. Кроме того, очевидно, что (см. (16)) $D^iP=Sz_{d+i}+R_i$, где $i=1, \ldots, m-d-1$, $R_i\in H_K[z_0, \ldots, z_{d+i-1}]$. Несложно показать, что существуют $M\in\boldsymbol{N}$, $Q_d, \ldots, Q_{m-1}\in H_K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$ такие, что

$$S^MQ=Q_dP+Q_{d+1}DP+\ldots+Q_{m-1}D^{m-d-1}P \tag{17}$$

(см. аналогичное рассуждение в доказательстве леммы 7.3 [3]).

При помощи равенства (17) имеем $Q(\bar v)=0$, и лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $u_1, \ldots, u_m$ — *ф.с.р. уравнения* (1) *в поле* K, *простой идеал* I *удовлетворяет условиям леммы* 4, $R \in C[x_1, \ldots, x_m]$ — *однородный многочлен такой, что если* $P(\bar{u}) = 0$, $u = c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m$, $c_i \in C$, *то* $R(c_1, \ldots, c_m) = 0$; *пусть также* $R = R_1 \ldots R_n$, *где все* $R_i \in C[x_1, \ldots, x_m]$. *Тогда существуют* $j \in \{1, \ldots, n\}$, $Q \in I$ *такие, что* $\deg Q = \deg R_j$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3, т.к. если $P(\bar{u}) = 0$, то по лемме 4 $(u, \delta u, \ldots, \delta^{m-1} u)$ — нуль идеала I.

5. Рассмотрим равенство вида

$$N - 1 = \sum_{k=1}^{d} \zeta^{j_k}, \tag{18}$$

где $N \in \mathbf{N}$, $N \geqslant 2$, $0 \leqslant d \leqslant N$, $1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_d \leqslant t-1$, а также аналогичное равенство

$$N - 1 + \zeta^i = \sum_{k=1}^{d} \zeta^{j_k}, \tag{19}$$

где N, d, j_k такие же, как в (18), $i \in \{1, \ldots, t\}$, $j_k \neq i$.

Важную роль в дальнейшем играет следующая лемма, которую мы приводим без доказательства.

Лемма 6. *Справедливы следующие утверждения:*

a) *Если либо* $t = 2$, *либо* t — *нечетно, то равенства вида* (18) *и* (19) *невозможны.*

b) *Если* t — *четно,* $t = 2\varkappa > 2$, $(\varkappa, 3) = 1$, *то равенство вида* (18) *невозможно, а все равенства вида* (19) *имеют либо вид* $1 + \zeta^{\varkappa} = \zeta^{\theta} + \zeta^{\theta + \varkappa}$, $1 \leqslant \theta < \varkappa$, *либо* $1 + \zeta^{\varkappa} = 0$.

c) *Если* $t = 6\theta$, $\theta \in \mathbf{N}$, *то для равенства* (18) *существует единственная возможность:* $1 = \zeta^{\theta} + \zeta^{5\theta}$, *а для равенства* (19) *либо возможность, указанная в пункте* b), *либо одна из следующих:*

c1) $2 + \zeta^{2\theta} = 2\zeta^{\theta} + \zeta^{5\theta}$,

c2) $2 + \zeta^{4\theta} = \zeta^{\theta} + 2\zeta^{5\theta}$,

c3) $2 + \zeta^{3\theta} = \zeta^{\theta} + \zeta^{5\theta}$,

c4) $3 + \zeta^{3\theta} = 2\zeta^{\theta} + 2\zeta^{5\theta}$.

6. В дальнейшем рассматривается собственно уравнение (2), причем предполагается, что оно приводимо, но линейно неприводимо над H. Заметим, что выполнение условий 1) и 2) теоремы 1 равносильно линейной неприводимости уравнения (2) над H (см. [8], теоремы 7 и 8). Сохраним введенные ранее обозначения P, d, $m = t + l$, $K \subset T$ — допустимое для уравнения (2) поле, построенное в пункте 3, $u_1, \ldots, u_m$ — ф.с.р. (15).

По лемме 3 существуют $c_1, \ldots, c_m \in C \setminus \{0\}$ такие, что $P(\bar{u}) = 0$ для $u = c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m$. Обозначим $\deg P = M$,

$$\Omega_j = \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial P}{\partial z_i}(\bar{u}_t) \delta^i u_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

По формуле Эйлера для однородных функций $M \cdot P(\bar{u}_t) = \Omega_t$.

Имеем по формуле Тейлора

$$0 = P(\bar{u}) = P(\overline{c_t u_t}) + \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial P}{\partial z_i}(\overline{c_t u_t}) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{m} c_j \delta^i u_j + \ldots \tag{20}$$

$$= \frac{1}{M} c_t^M \Omega_t + c_t^{M-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{m} c_j \Omega_j + \ldots$$

С другой стороны из (15) и однородности многочлена P имеем

$$\Omega_j = \begin{cases} e(M - 1 + \zeta^j) \sum\limits_{i=1}^{L} s(b_{ji}) \tau_{ji}, & b_{ji} \in B_K,\ \tau_{ji} \in T,\ j = 1, \ldots, t, \\ e(M-1) \sum\limits_{\nu=1}^{L} s(b_{j\nu}) \sum\limits_{i=0}^{g} t_{ij\nu} w^i, & b_{j\nu} \in B_K,\ t_{ij\nu} \in T,\ j = t+1, \ldots, m. \end{cases} \tag{21}$$

Опущенные члены равенства (20) имеют вид

$$e(M - b + \zeta^{j_1} + \ldots + \zeta^{j_a}) \sum_{i=0}^{gb} \sum_{\nu=1}^{L} s(b_{j_1, \ldots, j_a, \nu}) t_{j_1, \ldots, j_a, \nu, i} w^i,$$

$$b_{j_1, \ldots, j_a, \nu} \in B_K, \quad b \in \mathbf{N}, \quad b \geqslant 2, \quad 0 \leqslant a \leqslant b, \quad L \in \mathbf{N}, \tag{22}$$

$$1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_a \leqslant t-1, \quad t_{j_1, \ldots, j_a, \nu, i} \in T.$$

Из равенств (20)–(22) по леммам 1, 6, в частности, получим $P(\bar{u}_t) = M\Omega_t = 0$. Аналогично, разлагая $P(\bar{u})$ по формуле Тейлора с центром в точке $\bar{u}_j$, имеем $P(\bar{u}_j) = 0$, $j = 1, \ldots, t$.

Пусть поле H_1 — минимальное нормальное расширение $C(z)$, содержащее все коэффициенты многочлена P, $a_1, \ldots, a_n$ — все различные автоморфизмы H_1 над $C(z)$. Обозначим для $a \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ P_a — многочлен, полученный из P действием a на коэффициенты P. Рассмотрим идеал J кольца $H_1[z_0, \ldots, z_{m-1}]$, порожденный P_a, DP_a, $D^2 P_a, \ldots$ (здесь и далее D определен формулой (16) для уравнения (2)). J имеет нетривиальный нуль, т.к. в противном случае по теореме Гильберта о нулях для некоторых $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$, $Q^{(0)}, Q^{(1)}, \ldots, Q^{(N_2)} \in H_1[z_0, \ldots, z_{m-1}]$ имели бы равенство

$$z_0^{N_1} = Q^{(0)} P_a + Q^{(1)} D P_a + \ldots + Q^{(N_2)} D^{N_2} P_a,$$

т.е.

$$z_0^{N_1} = Q_{a^{-1}}^{(0)} P + Q_{a^{-1}}^{(1)} DP + \ldots + Q_{a^{-1}}^{(N_2)} D^{N_2} P,$$

$u_t = 0$, что невозможно. Итак, идеал J удовлетворяет условиям леммы 2, а тогда $P_a \in \Lambda_K$, и, как ранее, $P_a(\bar{u}_t) = 0$. Имеем $P_a = P$, т.к. в противном случае, исключая $\delta^d u_t$ из системы $P(\bar{u}_t) = 0$, $P_a(\bar{u}_t) = 0$, имели бы противоречие с выбором d. Ввиду произвольности a $P \in \boldsymbol{C}(z)[z_0, \ldots, z_d]$. Домножая P на некоторый $R \in \boldsymbol{C}[z]$, получим $\bar{P} \in \boldsymbol{C}[z, z_0, \ldots, z_d]$. Проводя в равенствах $\bar{P}(\bar{u}_j) = 0$ замену $z \to \zeta z$, аналогично только что проведенным рассуждением будем иметь $\bar{P} \in \boldsymbol{C}[z^t, z_0, \ldots, z_d]$.

7. Доказательство теоремы 1.I совсем просто (см. начало пункта 6). Рассмотрим равенство вида (20) для $u = \omega_i$, $i = 1, \ldots, l$, из условия леммы 3. По леммам 1, 3, 6 получим $\Omega_1 = \ldots = \Omega_m = 0$. Но $\det(\delta^{i-1} u_j)_{i,j=1,\ldots,d+1} \neq 0$. Поэтому все $\dfrac{\partial P}{\partial z_i}(\bar{u}_t) = 0$, в частности, $\dfrac{\partial P}{\partial z_d}(\bar{u}_t) = 0$, что, очевидно, невозможно ввиду выбора P и d. Это противоречие завершает доказательство теоремы 1.

8. Докажем теорему 1.II в случае $t = 2\varkappa$, $(\varkappa, 3) = 1$, $\varkappa > 1$. Как в пункте 7, по леммам 1, 3, 6 получим $\Omega_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, $j \neq \varkappa$. Если $\Omega_\varkappa = 0$, или $d < m-1$, то все очевидно. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $d = m-1$, $\Omega_\varkappa \neq 0$. Пусть $u = c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m$, $c_i \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$, $P(\bar{u}) = 0$ (см. лемму 3). Тогда равенство (20) можно представить в виде

$$0 = P(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{N} R_i(c_1, \ldots, c_m)\psi_i, \tag{23}$$

где $\psi_i \in K$ не зависят от $c_1, \ldots, c_m$ и линейно независимы над $\boldsymbol{C}$, $R_i(x_1, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{C}[x_1, \ldots, x_m]$ — однородные многочлены степени M. Будет удобно выбрать ψ_i в виде (22) при $b \geqslant 1$, причем для определенности больший номер присвоим элементам, представленным в виде (22) при большем b (если подобных представлений несколько, то берем такое, в котором b минимально).

В рассматриваемой ситуации $\psi_1 = \Omega_\varkappa$,

$$R_1 = \Big(\alpha_{10} c_1 c_{\varkappa+1} + \ldots + \alpha_{\varkappa 0} c_\varkappa c_t + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant l} \alpha_{ij} c_{t+i} c_{t+j}\Big) c_t^{M-2},$$

где α_{i0}, $\alpha_{ij} \in \boldsymbol{C}$, и не зависят от $c_1, \ldots, c_m$.

Применим лемму 5 к многочлену $R = R_1 c_1 \ldots c_m$ и идеалу I, порожденному всеми однородными многочленами $Q \in H_K[z_0, \ldots, z_{m-1}]$ такими, что $Q(\bar{u}_t) = 0$. Получим для некоторого однородного $Q \in I$: $\deg Q = 2$ (если $\deg Q = 1$, то уравнение (2) будет линейно приводимо над H, что невозможно по предположению). Но тогда ввиду $d = m-1$ имеем $\deg P = 2$.

Оператор D для уравнения (2) имеет вид

$$D = \delta + z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + \ldots + z_{m-1} \frac{\partial}{\partial z_{m-2}} + \big(g_0 z_0 + \ldots + g_{m-1} z_{m-1} + z^t(k_0 z_0 + \ldots + k_l z_l)\big)\frac{\partial}{\partial z_{m-1}}, \quad g_i, k_i \in \boldsymbol{C}. \tag{24}$$

Поэтому из (24) и условия $d = m-1$ получим

$$D\bar{P} = (\alpha + \beta z^t)\bar{P}, \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}. \tag{25}$$

Если $\bar{P} = B_0 + B_1 z^t + \ldots + B_n z^{nt}$, $B_i \in \boldsymbol{C}[z_0, \ldots, z_{m-1}]$, $B_n \neq 0$, то сравнивая в равенстве (25) члены, содержащие $z^{(n+1)t}$, будем иметь

$$(k_0 z_0 + \ldots + k_l z_l)\frac{\partial B_n}{\partial z_{m-1}} = \beta B_n. \tag{26}$$

Но $t \geqslant 2$, поэтому $m-1 = t+l-1 > l$, и при $\beta \neq 0$ равенство (26) невозможно, т.к. степень по z_{m-1} левой части (26) была бы меньше степени по z_{m-1} правой части (26). Итак, $\beta = 0$, и равенство (25) имеет вид $D\bar{P} = \alpha\bar{P}$, $\alpha \in \boldsymbol{C}$. Следовательно, для любого решения u уравнения (2) получим

$$\bar{P}(\bar{u}) = cs(\alpha), \quad c = c(u) \in \boldsymbol{C}. \tag{27}$$

Далее считаем, что поле K содержит $s(\alpha/2)$ (этого легко добиться с помощью соответствующего расширения, см. также пункт 3).

Очевидно, что отображение $u = s(\alpha/2)v$ осуществляет изоморфизм пространств решений уравнения $L_{\bar{\lambda},\bar{\nu}}(u) = 0$ и уравнения

$$L_1(v) = 0, \quad L_1 = L_{(\bar{\lambda} + \alpha/(2t)),(\bar{\nu} + \alpha/(2t))}. \tag{28}$$

Пусть

$$(x + \alpha/2)^r = x^r + c_{r1} x^{r-1} + \ldots + c_{rr}, \quad c_{ri} \in \boldsymbol{C}.$$

Проведем в многочлене $\bar{P}$ замену переменных $z_r \to z_r + c_{r1} z_{r-1} + \ldots + c_{rr} z_0$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$. Обозначим полученный многочлен $\tilde{P}$. Из равенств (27) и (28), а также равенства

$$\delta^r s\left(\frac{\alpha}{2}\right) = s\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\delta + \frac{\alpha}{2}\right)^r$$

имеем для любого решения уравнения (28) соотношение

$$\tilde{P}(\bar{v}) = c(v), \quad c(v) \in \boldsymbol{C}. \tag{29}$$

Пусть $L_1 = (\delta + a_1) \ldots (\delta + a_m) - z^t(\delta + b_1) \ldots (\delta + b_l)$, $a_i, b_i \in \boldsymbol{C}$ (см. (28)).

Положим

$$L_2 = (\delta - a_1)\ldots(\delta - a_m) - z^t(\delta - b_1 + t)\ldots(\delta - b_l + t);$$

$$(x-a_1)\ldots(x-a_m) = x^m + \zeta_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \zeta_0;$$

$$(x-b_1)\ldots(x-b_l) = x^l + \eta_{l-1}x^{l-1} + \ldots + \eta_0, \quad \zeta_i, \eta_i \in \mathbf{C};$$

$$P_r(\delta) = \delta^{m-r} + \zeta_{m-1}\delta^{m-r-1} + \ldots + \zeta_r, \quad r = 1, \ldots, m-1; \quad P_m(\delta) = 1;$$

$$Q_r(\delta) = (\delta+t)^{l-r} + \eta_{l-1}(\delta+t)^{l-r-1} + \ldots + \eta_r, \quad r = 1, \ldots, l-1; \quad Q_l(\delta) = 1.$$

Легко убедиться, что поле K является допустимым для уравнения (28) и $L_2(w) = 0$ (см. [8], §3).

Для любых v, $w \in K$ — соответственно решений уравнений $L_1(v) = 0$ и $L_2(w) = 0$ справедливо соотношение

$$(30) \quad F_{v,w} = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} P_r(\delta)(w)\delta^{r-1}(v) + z^t \sum_{r=1}^{l} (-1)^r Q_r(\delta)(w)\delta^{r-1}(v)$$
$$= c(v, w), \quad c(v, w) \in \mathbf{C}.$$

Соотношение (30) равносильно равенству $\delta(F_{v,w}) = 0$, последнее проверяется непосредственно.

Лемма 7. 1. *Пусть* $L_3 \in \{L_1, L_2\}$, $f_r = \sum_{j=0}^{m-1} f_{rj}\delta^j$, $r = 1, \ldots, m$, $f_{rj} \in K$, *не все* $f_{rj} = 0$; *для любых* v, $w \in K$ — *соответственно решений уравнений* (28) *и* $L_3(w) = 0$ *будет*

$$\Phi_{v,w} = \sum_{r=1}^{m} f_r(w)\delta^{r-1}(v) = c_0(v, w), \quad c_0(v, w) \in \mathbf{C}.$$

Тогда существуют $w^* \in K$ — *решение уравнения* $L_3(w) = 0$ *и ф.с.р. уравнения* (28) $v_1, \ldots, v_m \in K$ *такие, что*

$$(31) \quad \Phi_{v_1,w^*} = 1, \quad \Phi_{v_i,w^*} = 0, \quad i = 2, \ldots, m.$$

2. *Если кроме условий пункта* 1 *леммы выполнено соотношение* $\det(f_{r,i-1})_{r,i=1,\ldots,m} \neq 0$, *то для любой ф.с.р. уравнения* (28) $v_1, \ldots, v_m \in K$ *существует* $w^* \in K$ — *решение уравнения* $L_3(w) = 0$ *такое, что выполняются равенства* (31).

Доказательство. Пусть v^*, $w^* \in K$ такие решения соответственно уравнений (28) и $L_3(w) = 0$, что $F_{v^*,w^*} = c \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Положим $v_1 = (1/c)v^*$. Пусть v_1, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$ — некоторая ф.с.р. уравнения (28) в поле K. Положим

$$v_j = \bar{v}_j - F_{\bar{v}_j,w^*}v_1, \quad j = 2, \ldots, m.$$

Равенства (31) выполняются тривиально. Для доказательства утверждения 2 леммы рассмотрим $w_1, \ldots, w_m$ — произвольную ф.с.р. уравнения $L_3(w) = 0$. Пусть $v \in K$ — нетривиальное решение уравнения (28). По условию леммы

$$\sum_{r=1}^{m} \delta^{r-1}(v) f_r \neq 0, \quad \sum_{r=1}^{m} \delta^{r-1}(v) f_r(w) = c_0(v, w) \in \mathbf{C},$$

где $w \in K$ — произвольное решение уравнения $L_3(w) = 0$. Очевидно, что для некоторого $\tilde{w} \in K$ — решения уравнения $L_3(w) = 0$ будет $c_0(v, \tilde{w}) \neq 0$.

Покажем, что

$$(32) \quad \det\Big(\sum_{r=1}^{m} \delta^{r-1}(v_i) f_r(w_j)\Big)_{i,j=1,\ldots,m} \neq 0.$$

Предположим противное. Тогда существует нетривиальный набор $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{C}$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{r=1}^{m} \delta^{r-1}(v_i) f_r(w_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т.е. для $v = c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m$ и всех $w \in K$ — решений уравнения $L_3(w) = 0$ будет $c_0(v, w) = 0$, что невозможно. Тем самым соотношение (32) доказано. Но тогда существуют $d_1, \ldots, d_m \in \mathbf{C}$ — решение системы

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{r=1}^{m} \delta^{r-1}(v_i) f_r(w_j) = A_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $A_1 = 1$, $A_i = 0$, $i = 2, \ldots, m$, и решение $w^* = d_1 w_1 + \ldots + d_m w_m$ — искомое. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $\bar{\lambda}^{(1)}$, $\bar{\lambda}^{(2)} \in \mathbf{C}^m$, $\bar{\nu}^{(1)}$, $\bar{\nu}^{(2)} \in \mathbf{C}^l$;

$$\Delta_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_{ij}\delta^j, \quad i = 1, 2, \quad p_{ij} \in \mathbf{C}[z^t],$$

Δ_1, $\Delta_2 \neq 0$; K — *допустимое поле для уравнений*

$$(33) \quad L_{\bar{\lambda}^{(1)},\bar{\nu}^{(1)}}(y) = 0,$$

$$(34) \quad L_{\bar{\lambda}^{(2)},\bar{\nu}^{(2)}}(y) = 0;$$

пусть также существуют y_1, $y_2 \in K\backslash\{0\}$ — *такие решения соответственно уравнений* (33) *и* (34), *что* $\Delta_1(y_1) = \Delta_2(y_2)$; *уравнения* (33) *и* (34) *линейно неприводимы.*

Тогда $\bar{\lambda}^{(1)} \sim \bar{\lambda}^{(2)}$, $\bar{\nu}^{(1)} \sim \bar{\nu}^{(2)}$.

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 1 работы А. И. Галочкина [2].

Обозначим $\mathscr{U} = \{r_n\delta^n + \ldots + r_1\delta + r_0,\ n \geqslant 0,\ r_i \in \boldsymbol{C}(z)\}$. Если $L \in \mathscr{U}$, $r_n \neq 0$, то обозначим $p(L) = n$.

Лемма 9. *Пусть $L, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{U}\setminus\{0\}$, $p(\sigma_1) < p(L)$, $p(\sigma_2) < p(L)$, уравнение $L(y) = 0$ линейно неприводимо, K — допустимое поле для уравнения $L(y) = 0$; пусть также существуют $y_1, y_2 \in K\setminus\{0\}$ — решения уравнения $L(y) = 0$ такие, что $\sigma_1(y_1) = \sigma_2(y_2)$.*

Тогда существует $\gamma \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ такое, что $\sigma_1 = \gamma\sigma_2$, $y_2 = \gamma y_1$.

Доказательство. Пусть $p(L) = n$, $p(\sigma_i) = n_i$, $i = 1, 2$; $\sigma \in \mathscr{U}\setminus\{0\}$, $p(\sigma) = n_0 < n$. Рассмотрим равенство вида

$$q\sigma = q^* L, \tag{35}$$

где

$$q = \sum_{j=0}^{n} q_j\delta^j, \quad q^* = \sum_{j=0}^{n_0} q_j^*\delta^j, \quad q_j, q_j^* \in \boldsymbol{C}(z).$$

Нетривиальное равенство вида (35) существует, так как, приравнивая нулю коэффициенты $x_i \in \boldsymbol{C}(z)$ в равенстве

$$q\sigma - q^*L = x_0 + x_1\delta + \ldots + x_{n+n_0}\delta^{n+n_0} = 0,$$

получим систему $n+n_0+1$ линейных однородных уравнений с коэффициентами из $\boldsymbol{C}(z)$ относительно $n+n_0+2$ неизвестных q_j, q_j^*. Поэтому эта система имеет нетривиальное решение. Покажем теперь, что в любом подобном решении $q_n \neq 0$. Предположим противное. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n \in K$ — ф.с.р. уравнения $L(y) = 0$. Тогда $\sigma(\omega_1), \ldots, \sigma(\omega_n)$ линейно независимы над $\boldsymbol{C}$ ввиду линейной неприводимости уравнения $L(y) = 0$ (если $c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$, $c_1\sigma(\omega_1) + \ldots + c_n\sigma(\omega_n) = 0$, то $\sigma(c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n) = 0$, поэтому $c_1 = \ldots = c_n = 0$). Из равенства (35) следует, что $q(\sigma(\omega_i)) = q^*(L(\omega_i)) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $p(q) = n$, т.е. $q_n \neq 0$. Можно считать теперь, что $q_n = 1$ (достаточно рассмотреть равенство (35), где $q \to (1/q_n)q$, $q^* \to (1/q_n)q^*$).

Очевидно, что условие $q_n = 1$ обеспечивает единственность операторов q и q^*, удовлетворяющих равенству вида (35).

Рассмотрим подобные равенства при $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2\}$:

$$q_1\sigma_1 = q_1^*L, \quad q_2\sigma_2 = q_2^*L. \tag{36}$$

Обозначим $w = \sigma_1(y_1) = \sigma_2(y_2)$. Очевидно, из линейной неприводимости уравнения $L(y) = 0$ следует, что $w \neq 0$.

Из равенств (36) имеем $q_1(w) = q_2(w) = 0$. Покажем, что $q_1 = q_2$. Действительно, если $q_1 \neq q_2$, то для $q = q_1 - q_2$ имеем $q \neq 0$, $p(q) < n$, $q(w) = 0$, $q\sigma_1(y_1) = 0$. Но тогда из линейной неприводимости уравнения $L(y) = 0$ легко получаем

$$q\sigma_1 = q^*L, \quad q^* \in \mathscr{U}, \quad p(q^*) < p(\sigma_1). \tag{37}$$

Равенство (37) по доказанному выше невозможно, поэтому $q_1 = q_2$.

Из равенств (36), как при рассмотрении равенств (35), получим, что $\sigma_1(\omega_1), \ldots, \sigma_1(\omega_n)$, а также $\sigma_2(\omega_1), \ldots, \sigma_2(\omega_n)$ — две ф.с.р. уравнения $q_1(y) = 0$ в поле K. Поэтому существует невырожденная матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $c_{ij} \in \boldsymbol{C}$, такая, что

$$\begin{bmatrix} \sigma_2(\omega_1) \\ \vdots \\ \sigma_2(\omega_n) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \sigma_1(\omega_1) \\ \vdots \\ \sigma_1(\omega_n) \end{bmatrix}.$$

Пусть $c \neq 0$ — произвольное собственное значение матрицы C, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \boldsymbol{C}^n$ — ненулевой вектор такой, что $\bar{\alpha}C = c\bar{\alpha}$. Обозначим $\omega = \alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_n\omega_n$. Тогда

$$\sigma_2(\omega) = \bar{\alpha} \begin{bmatrix} \sigma_2(\omega_1) \\ \vdots \\ \sigma_2(\omega_n) \end{bmatrix} = \bar{\alpha}C \begin{bmatrix} \sigma_1(\omega_1) \\ \vdots \\ \sigma_1(\omega_n) \end{bmatrix} = c\bar{\alpha} \begin{bmatrix} \sigma_1(\omega_1) \\ \vdots \\ \sigma_1(\omega_n) \end{bmatrix} = c\sigma_1(\omega),$$

т.е.

$$(\sigma_2 - c\sigma_1)(\omega) = 0.$$

Ввиду линейной неприводимости уравнения $L(y) = 0$ имеем последовательно $\sigma_2 = c\sigma_1$, $\sigma_1(y_1 - cy_2) = 0$, $y_1 = cy_2$, и лемма доказана.

Теперь можно закончить рассмотрение пункта 8.

Имеем по формуле Тейлора из равенства (29) для любых $v, w \in K$ решений уравнения (28):

$$\Phi_{v,w} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_{r-1}}(\bar{w})\delta^{r-1}(v) = \tilde{P}(\overline{v+w}) - \tilde{P}(\bar{v}) - \tilde{P}(\bar{w}) \in \boldsymbol{C}. \tag{38}$$

Если $l = k_0z_0 + \ldots + k_{m-1}z_{m-1}$, $k_i \in K$, то обозначим

$$\psi(l) = k_0 + k_1\delta + \ldots + k_{m-1}\delta^{m-1}.$$

Пусть

$$f_r = \psi\left(\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_{r-1}}\right), \quad r = 1, \ldots, m.$$

Из равенства (38) следует, что выполнены условия утверждения 1 леммы 7 для $L_3 = L_1$; поэтому существуют решение уравнения (28) $w_1^* \in K$ и ф.с.р. уравнения (28) $v_1, \ldots, v_m \in K$ такие, что выполняются равенства (31), где $w^* = w_1^*$.

Положим теперь в лемме 7

$$L_3 = L_2, \quad f_r = (-1)^{r-1}P_r(\delta), \quad r = l+1, \ldots, m;$$
$$f_r = (-1)^{r-1}[P_r(\delta) - z^lQ_r(\delta)], \quad r = 1, \ldots, l.$$

Тогда ввиду равенства (30) с учетом вида $P_r(\delta)$ имеем выполнение всех условий утверждения 2 леммы 7. Поэтому существует решение уравнения $L_2(w)=0$ $w_2^*\in K$ такое, что выполняются равенства (31), где $w^*=w_2^*, v_1, \ldots, v_m$ — указаны в первом варианте применения леммы 7. Система

$$\sum_{r=1}^{m} x_r\delta^{r-1}(v_i)=A_i, \qquad A_1=1,\ A_2=\ldots=A_m=0,$$

ввиду $\det(\delta^{r-1}(v_i))_{i,r=1,\ldots,m}\neq 0$ имеет единственное решение, поэтому

$$(39)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\tilde P}{\partial z_{r-1}}(\bar w_1^*)=(-1)^{r-1}P_r(\delta)(w_2^*), && r=l+1,\ldots,m;\\ &\frac{\partial\tilde P}{\partial z_{r-1}}(\bar w_1^*)=(-1)^{r-1}[P_r(\delta)-z^tQ_r(\delta)](w_2^*), && r=1,\ldots,l. \end{aligned}$$

Положим

$$\bar\lambda^{(1)}=\left(\bar\lambda+\frac{\alpha}{2t}\right),\qquad \bar\nu^{(1)}=\left(\bar\nu+\frac{\alpha}{2t}\right),$$

$$\bar\lambda^{(2)}=(-\bar\lambda^{(1)}),\qquad \bar\nu^{(2)}=(-\bar\nu^{(1)}+1).$$

Тогда

$$L_1=L_{\bar\lambda^{(1)},\bar\nu^{(1)}},\qquad L_2=L_{\bar\lambda^{(2)},\bar\nu^{(2)}}$$

(см. равенство (28), определение L_2 и определение $L_{\bar\lambda,\bar\nu}$ в (2)). К любому из равенств (39) можно применить лемму 8, т.е.

$$(40)\qquad \bar\lambda^{(1)}\sim(-\bar\lambda^{(1)}),\qquad \bar\nu^{(1)}\sim(-\bar\nu^{(1)}).$$

Из соотношений (40) имеем для некоторых $X_1,\ldots,X_{\theta+\varrho}\in\boldsymbol{Q}$

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\bar\lambda^{(1)}\sim(\underbrace{0,\ldots,0}_{m_1},\underbrace{\tfrac12,\ldots,\tfrac12}_{m_2},X_1,-X_1,\ldots,X_\theta,-X_\theta),\\ &\bar\nu^{(1)}\sim(\underbrace{0,\ldots,0}_{l_1},\underbrace{\tfrac12,\ldots,\tfrac12}_{l_2},X_{\theta+1},-X_{\theta+1},\ldots,X_{\theta+\varrho},-X_{\theta+\varrho}), \end{aligned}$$

где $m=m_1+m_2+2\theta$; $l=l_1+l_2+2\varrho$, все $m_1, m_2, l_1, l_2\in\{0;1\}$; из линейной неприводимости уравнения (2) следует, что $m_1l_1=0$, $m_2l_2=0$ (см. условие 1) теоремы 1).

Рассмотрим все возможные комбинации значений m_2, l_1.

1) $m_2=1$, $l_1=0$.

Здесь $l_2=0$, l — четно, а тогда, очевидно, $m_1=1$. Соотношения (41) совпадают в случае $l\neq 0$ с соотношениями (5), в случае $l=0$ имеем (4), что невозможно по условию теоремы 1.II.

2) $m_2=0$, $l_1=1$.

Имеем $m_1=0$, l — четно, а тогда, очевидно, $l_2=1$. Соотношения (41) совпадают с соотношениями (6), что невозможно.

3) $m_2=1$, $l_1=1$.

Очевидно, $m_1=l_2=0$. Для $X_0=\alpha/(2t)+1/2$ из соотношений (41) получим соотношения (7), что невозможно.

4) $m_2=l_1=0$.

В этом случае содержатся основные трудности. Из условий теоремы 1.II рассуждая как в [8], §8, легко получим, что достаточно доказать теорему 1.II для любого представителя класса эквивалентности $\{(\bar\lambda^*,\bar\nu^*),\ \bar\lambda^*\sim\bar\lambda,\ \bar\nu^*\sim\bar\nu\}$. Нам будет удобно выбрать такой представитель этого класса, что $\bar\lambda^{(1)}$ и $\bar\nu^{(1)}$ совпадают с правыми частями соотношений (41). Легко видеть, что $L_1=L_2$. Но тогда ко всем равенствам (39) можно применить лемму 9. Пусть $\gamma\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ такое, что $w_2^*=\gamma w_1^*$.

Из равенств (39) при $r=m$ и $r=1$ по лемме 9 получим

$$(42)\qquad (-1)^{m-1}\gamma P_m(\delta)=\psi\left(\frac{\partial\tilde P}{\partial z_{m-1}}\right),\qquad \gamma(P_1(\delta)-z^tQ_1(\delta))=\psi\left(\frac{\partial\tilde P}{\partial z_0}\right).$$

Из равенств (42) имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z_0\partial z_{m-1}}=\gamma=(-1)^{m-1}\gamma,$$

т.е. m — нечетно. Следовательно, l — нечетно, $m_1=l_2=1$, из соотношений (41) получим соотношения (7), что невозможно. Теорема 1 в случае $t=2\varkappa$, $(\varkappa, 3)=1$, $\varkappa>1$, доказана.

9. В случаях $t=2\varkappa$, $(\varkappa,3)=3$, $\varkappa\neq 3$, а также $t=6$, $l>3$, с помощью утверждения c) леммы 6, изучая структуру многочленов $R_i(c_1,\ldots,c_m)$ в равенстве (23), можно доказать, что $d=m-1$, $\deg P=2$. Соответствующие детали мы опускаем. Как в пункте 8, получаем справедливость утверждения теоремы 1 в рассматриваемых случаях.

Для доказательства теоремы 3 построим сначала для $\bar\lambda$, $\bar\nu$, имеющих вид правых частей одного из соотношений (4)–(7), многочлен $P\in\boldsymbol{C}[z^t, z_0,\ldots,z_{m-1}]$ такой, что $DP=0$, где D определен равенством (24) для уравнения (2). Рассмотрим все возможности.

а) $l=0$, $m=t=2\varkappa$, $\bar\lambda=(0,\frac12,X_1,-X_1,\ldots,X_{\varkappa-1},-X_{\varkappa-1})$, $X_i\in\boldsymbol{Q}$.

Определим числа $\zeta_0,\ldots,\zeta_{m-1}\in\boldsymbol{Q}$ из равенства

$$(x-t\lambda_1)\ldots(x-t\lambda_m)=x^m+\zeta_{m-1}x^{m-1}+\ldots+\zeta_0.$$

Положим

$$(43)\qquad \begin{aligned} &(\delta+\varkappa)(\delta^{m-1}+\zeta_{m-1}\delta^{m-2}+\ldots+\zeta_1)-\delta^m+g_0+g_1\delta+\ldots+g_{m-1}\delta^{m-1}\\ &\qquad=\alpha_{10}+\alpha_{11}\delta+\ldots+\alpha_{1,m-1}\delta^{m-1}, \end{aligned}$$

$$(44)\qquad \begin{aligned} &(-1)^{r-1}(\delta+\varkappa)(\delta^{m-r}+\zeta_{m-1}\delta^{m-r-1}+\ldots+\zeta_r)\\ &\qquad=\alpha_{r0}+\alpha_{r1}\delta+\ldots+\alpha_{r,m-1}\delta^{m-1},\quad r=2,\ldots,m,\ \text{где } \alpha_{ri}\in\boldsymbol{Q}. \end{aligned}$$

Тогда многочлен

$$P = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ri} z_{r-1} z_i + z^t z_0^2$$

— искомый, в чем несложно убедиться прямым вычислением.

b) $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ имеют вид правых частей соотношений (5).

Определим числа α_{ri} как в пункте a). Определим также числа $\eta_0, \ldots, \eta_{l-1} \in \boldsymbol{Q}$ из равенства

$$(x - tv_1)\ldots(x - tv_l) = x^l + \eta_{l-1} x^{l-1} + \ldots + \eta_0;$$

положим

$$\begin{gathered} -(\delta+\varkappa)[(\delta+t)^{l-1} + \eta_{l-1}(\delta+t)^{l-2} + \ldots + \eta_1] + k_0 + \ldots + k_l \delta^l \\ = \beta_{10} + \ldots + \beta_{1l}\delta^l; \end{gathered}$$

(45)

$$\begin{gathered} (-1)^r(\delta+\varkappa)[(\delta+t)^{l-r} + \eta_{l-1}(\delta+t)^{l-r-1} + \ldots + \eta_r] \\ = \beta_{r0} + \ldots + \beta_{rl}\delta^l, \quad r = 2, \ldots, l, \quad \beta_{ri} \in \boldsymbol{C}. \end{gathered}$$

Тогда многочлен

$$P = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{ri} z_{r-1} z_i + z^l \sum_{r=1}^{l} \sum_{i=0}^{l} \beta_{ri} z_{r-1} z_i \tag{46}$$

— искомый.

c) $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ имеют вид правых частей соотношений (6).

Определим α_{ri}, β_{ri} как в равенствах (43)–(45) с единственным отличием: множитель $(\delta+\varkappa)$ заменим на множитель (δ). Тогда многочлен P, определенный в равенстве (46), — искомый.

d) $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ имеют вид правых частей соотношений (7).

Определим α_{ri}, β_{ri} как в равенствах (43)–(45) с единственным отличием: множитель $(\delta+\varkappa)$ опустим. Тогда многочлен P, определенный в равенстве (46), — искомый.

С помощью многочлена P легко строится нетривиальное соотношение вида $Q(\overline{\varphi(z)}) = cz^{tn}$, где $Q \in \boldsymbol{Q}[z^t, z_0, \ldots, z_{m-1}]$, $\deg Q = 2$, $c \in \boldsymbol{Q}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \geqslant 0$ (см. равенство (27), а также, например, [8], §8). Это доказывает теорему 3.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 1.

Добавлено редакцией при корректуре. Доказательство леммы 6 можно получить следующим образом.

В равенствах (18) и (19) можно заменить ζ_t любым сопряженным числом ζ_t^r, где $(r, t) = 1$. Суммируя по всем r и применяя известные формулы для сумм Рамануджана получаем

$$(N-1)\varphi(t) = \sum_{k=1}^{d} \mu\left(\frac{t}{(t, j_k)}\right)\frac{\varphi(t)}{\varphi(t/(t, j_k))} + \varepsilon\mu\left(\frac{t}{(t, i)}\right)\frac{\varphi(t)}{\varphi(t/(t, i))},$$

где $\varepsilon = 0$ или 1 в случае (18) или (19) соответственно. Отсюда

$$(N-1)\varphi(t) \leqslant \left(\frac{d}{2} + \varepsilon\right)\varphi(t) \leqslant \left(\frac{N}{2} + \varepsilon\right)\varphi(t)$$

и $d \leqslant N \leqslant 2 + 2\varepsilon$. По теореме 6 работы J. H. Conway, A. J. Jones, *Trigonometric diophantine equations*, Acta Arith. 30 (1976), 229–240, доказательство леммы 6 сводится к проверке конечного числа возможных равенств.

Литература

[1] F. Beukers, W. Brownawell and G. Heckman, *Siegel normality*, Ann. of Math. 127 (1988), 279–308.

[2] A. I. Galochkin, *On effective bounds for certain linear forms*, in: *New Advances in Transcendence Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney 1988, 207–215.

[3] И. Капланский, *Введение в дифференциальную алгебру*, ИЛ, Москва 1959.

[4] N. Katz and R. Pink, *A note on pseudo-CM representations and differential Galois groups*, Duke Math. J. 54 (1987), 57–65.

[5] Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимации*, Мир, Москва 1980.

[6] Ю. В. Нестеренко, *Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям*, Матем. заметки 5 (5) (1969), 587–598.

[7] — *Об алгебраической зависимости компонент решений системы линейных дифференциальных уравнений*, Изв. АН СССР, Сер. матем., 38 (3) (1974), 495–512.

[8] В. Х. Салихов, *Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел*, Тр. Моск. матем. о-ва 51 (1988), 223–256.

[9] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930, N.1, 1–70.

[10] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, Москва 1987.

[11] — *О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций*, Изв. АН СССР, Сер. матем. 23 (1) (1959), 35–66.

[12] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, т. 2, ИЛ, Москва 1963.

[13] Д. П. Желобенко, А. И. Штерн, *Представления групп Ли*, Наука, Москва 1983.

Поступило 16.8.1988
и в исправленной форме 10.1.1989 (1858)