[6] A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, John Wiley, 1985.
[7] B. Jessen and A. Wintner, *Distribution function and the Riemann zeta-function*, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935), 48–88.
[8] M. Jutila, *On the value distribution of the zeta-function on the critical line*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 513–518.
[9] A. Laurinčikas, *A limit theorem for the Riemann zeta-function near the critical line* (in Russian), Mat. Sb. 135 (177):1 (1988), 3–11.
[10] — *On the transfer of limit theorem to the critical line for the Riemann zeta-function*; in: *Abstracts of the XXIX*th *conference Lith. Math. Soc.* (in Russian), Vilnius 1988, p. 109.
[11] — *On the distribution of values of complex functions* (in Russian), Liet. matem. rink. 15 (2) (1975), 25–39.
[12] — *A limit theorem for the Riemann zeta-function on a critical line. I* (in Russian), ibid. 27 (1) (1987), 111–132.
[13] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality*, J. London Math. Soc. 8 (2) (1974), 73–82.

FACULTY OF MATHEMATICS
VILNIUS STATE UNIVERSITY
Vilnius, Lithuania, U.S.S.R.

Received on 18.4.1988
and in revised form on 4.1.1989 (1813)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1990)

Обобщенные тэта-функции с характеристиками и представление чисел квадратичными формами

Т. В. Вепхвадзе (Тбилиси)

Светлой памяти Владимира Геннадиевича Спринджука посвящается

Пусть

$$f = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \tfrac{1}{2}x'Ax = \tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}x_jx_k$$

— целочисленная положительная квадратичная форма, где x — вектор-столбец с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_s$, а x' — вектор-строка; Δ — определитель симметрической матрицы $A = (a_{jk})$ с четными диагональными элементами; N — ступень формы f, т.е. наименьшее натуральное число, для которого NA^{-1} — симметрическая целочисленная матрица с четными диагональными элементами. Далее, пусть $r(n; f)$ обозначает число представлений натурального числа n формой f, т.е. число решений в целых числах уравнения

$$n = f(x_1, x_2, \ldots, x_s).$$

Количество работ, посвященных т.н. точным формулам для функции $r(n; f)$, весьма велико. Эта тема привлекала внимание математиков еще в прошлом веке (Гаусс, Эйзенштейн, Лиувилль и др.).

Задача получения формулы для $r(n; f)$, годной для всех n, сводится к задаче получения формулы для тэта-ряда

$$\vartheta(\tau; f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n; f)e^{2\pi i\tau n} \tag{1}$$

являющегося целой модулярной формой некоторого типа, здесь и всюду в дальнейшем $\tau \in H$ (H — верхняя полуплоскость). Схема метода получения такой формулы заключается в следующем. Тэта-ряд представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$\vartheta(\tau; f) = E(\tau; f) + X(\tau),$$

где $E(\tau; f)$ — ряд Эйзенштейна, а $X(\tau)$ — некоторая параболическая форма. Первое слагаемое этой суммы к настоящему времени полностью исследовано, известны удобные формулы для вычисления коэффициентов Фурье функции $E(\tau; f)$ (см., напр. [1]).

Если род квадратичной формы f содержит один класс, то, согласно теореме Зигеля,

$$\vartheta(\tau; f) = E(\tau; f).$$

Если же род содержит более одного класса, то нужно подыскать параболическую форму $X(\tau)$, и желательно такую, коэффициенты которой имели бы простой арифметический смысл.

В настоящей работе вводятся т.н. обобщенные тэта-функции с характеристиками и с шаровыми функциями, соответствующие произвольным положительным квадратичным формам. Доказываются достаточные и необходимые условия для того, чтобы некоторая линейная комбинация этих функций принадлежала пространству целых модулярных форм данного типа, что позволяет облегчить получение формул для числа представлений чисел произвольными положительными квадратичными формами как с четным, так и с нечетным числом переменных.

В предлагаемой работе с целью иллюстрации этого получены формулы для числа представлений чисел положительной квадратичной формой с семью переменными

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_5^2+2x_6^2+2x_7^2.$$

В работе [2] приведены достаточные условия для того, чтобы обобщенная тэта-функция с характеристиками принадлежала пространству целых модулярных форм и выписаны формулы для числа представлений чисел положительными квадратичными формами с семью переменными

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+2x_6^2+2x_7^2$$

и

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+4x_7^2.$$

В случае форм с семью переменными ранее в литературе рассматривались лишь формы

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2 \quad \text{и} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+2x_7^2$$

(см. напр. [9], стр. 305, 309, 335; [10], стр. 237), принадлежащие одноклассным родам.

Линейные комбинации тэта-функций с характеристиками, определенные формулой (49) настоящей работы в частных случаях совпадают с якобиевыми тэта-функциями, с линейными комбинациями произведений простых тэта-функций и их производных, а также обобщенных тэта-функций с шаровыми функциями, которыми пользовались Петерсон [14], Ломадзе (см., напр. [6], [7]), Коган (см., напр. [3], [4]) и другие авторы для получения формул для числа представлений чисел положительными квадратичными формами.

1. Пусть Γ — модулярная группа, т.е. группа линейных подстановок

$$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

где α, β, γ, δ — целые числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$. Далее, пусть N_0 — целое положительное число, $\Gamma_0(N_0)$ — та подгруппа группы Γ, в подстановках которой

$$\gamma \equiv 0 \pmod{N_0}.$$

Следуя Петерсону [13], [14], введем следующие определения.

Определение 1. Пусть $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ — матрица подстановки группы $\Gamma_0(N_0)$, $v = v(M)$ — система мультипликаторов веса r ($r = s/2$, s — целое) для группы $\Gamma_0(N_0)$.

Функцию F будем называть *целой модулярной формой типа* $(-r, N_0, v(M))$, если она удовлетворяет условиям:

1) F голоморфна на H;

2) для всякой подстановки группы $\Gamma_0(N_0)$

$$F\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = v(M)(\gamma\tau+\delta)^r F(\tau); \tag{2}$$

3) в окрестности $\tau = \infty$ имеет место разложение

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{2\pi i\tau m}; \tag{3}$$

4) в окрестности $\tau = -\delta/\gamma$ ($\gamma \neq 0$, $(\delta, \gamma) = 1$) имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^r F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} C'_m e^{\frac{2\pi i m}{N_0}\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}}, \tag{4}$$

где $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$.

Определение 2. Целую модулярную форму типа $(-r, N_0, v(M))$ будем называть *параболической формой*, если в разложениях (3) и (4) коэффициенты $C_0 = 0$, $C'_0 = 0$.

Лемма 1. *Пусть F целая модулярная форма типа $(-r, N_0, v(M))$ и существует такое четное число l, для которого $v^l = 1$. Тогда функция*

F тождественно равна нулю, если в ее разложении (3) *коэффициенты $C_m = 0$ для всех*

$$m \leqslant \frac{r}{12} N_0 \prod_{p|N_0} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Доказательство. Как следует из определения 1, функция F^l принадлежит пространству целых модулярных форм типа $(-rl, N_0, 1)$, где rl — целое число. Поэтому, согласно теореме 1 работы [11] (стр. 811), получаем утверждаемое.

2. В этом параграфе несколько видоизменяем определения общих тэта-функций с характеристиками и гауссовых сумм, исследованных в работе [12] (формулы (1.1) и (2.1)) и приводим их некоторые свойства.

Пусть A целочисленная, симметрическая матрица, соответствующая положительной квадратичной форме f, N — ступень формы f. Целочисленный вектор-столбец a будем называть *специальным вектором относительно матрицы* A, если выполняется условие

$$Aa \equiv 0 \pmod N.$$

Пусть $\tau \in H$; z — вектор-столбец с комплексными компонентами $z_1, z_2, \ldots, z_s$, $2g$, h, a — специальные векторы относительно матрицы A. Тогда тэта-функцию с характеристиками определим следующим образом:

$$\vartheta_{gh}(z|\tau; a, f) = \sum_{x \equiv a \pmod N} (-1)^{\frac{h'A(x-a)}{N^2}} e^{\frac{\pi i\tau(x+g)'A(x+g)}{N^2}} e^{\frac{2\pi i(x+g)'Az}{N}}, \tag{5}$$

здесь суммирование распространяется на все такие целые векторы x, для которых $x - a \equiv 0 \pmod N$.

Далее, пусть w — специальный вектор относительно матрицы A, ξ и $\eta \neq 0$ целые числа, удовлетворяющие условию $A(2g\xi + \eta h + w) \equiv 0 \pmod{2N}$. Тогда определим сумму Гаусса следующим образом:

$$S_{gh}\left(w\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right) = \sum_{\substack{x \bmod N\eta \\ x \equiv a \pmod N}} (-1)^{\frac{h'A(x-a)}{N^2}} e^{\frac{\pi i\xi}{N^2\eta}(x+g)'A(x+g)} e^{\pi i(x+g)'Aw}. \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$\vartheta_{gh}(\tau; a, f) = \vartheta_{gh}(0|\tau; a, f), \tag{7}$$

$$S_{gh}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right) = S_{gh}\left(0\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right). \tag{8}$$

Если a — нулевой вектор, то положим

$$\vartheta_{gh}(\tau; f) = \vartheta_{gh}(\tau; a, f), \quad S_{gh}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; f\right) = \dot{S}_{gh}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right). \tag{9}$$

Пусть k — произвольный целый вектор, l — специальный вектор относительно матрицы A, α, β, γ, δ — целые числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Тогда, по аналогии с формулами (1.2)–(1.4), (2.4)–(2.6), (1.12), (3.9), (3.3), (3.7), (2.16), (3.10), и (3.11) из [12], легко проверить, что имеют место следующие равенства:

$$\vartheta_{g+l,h}(z|\tau; a, f) = \vartheta_{gh}(z|\tau; a+l, f); \tag{10}$$

$$\vartheta_{g,h+2l}(z|\tau; a, f) = \vartheta_{gh}(z|\tau; a, f); \tag{11}$$

$$\vartheta_{gh}(z|\tau; a+Nk, f) = (-1)^{h'Ak/N} \vartheta_{gh}(z|\tau; a, f); \tag{12}$$

$$S_{g+l,h}\left(w\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right) = (-1)^{h'Ak/N} \vartheta_{gh}(z|\tau; a, f); \tag{13}$$

$$S_{g,h+2l}\left(w\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right) = S_{gh}\left(w\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right); \tag{14}$$

$$S_{gh}\left(w\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a+Nk, f\right) = (-1)^{h'Ak/N} S_{gh}\left(w\middle|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; a, f\right); \tag{15}$$

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{z}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}; a, f\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\sqrt{-i\tau})^s e^{\frac{\pi i z'Az}{\tau}} \sum_{b \bmod N} e^{\frac{-2\pi i(a+g)'A(b+h/2)}{N^2}} \vartheta_{h/2,2g}(z|\tau; b, f), \tag{16}$$

здесь b пробегает полную систему несравнимых специальных по модулю N векторов;

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{z}{\gamma\tau+\delta}\middle|\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; a, f\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\sqrt{\frac{-i(\gamma\tau+\delta)\operatorname{sgn}\gamma}{|\gamma|}}\right)^s \times e^{\frac{\gamma\pi i z'Az}{\gamma\tau+\delta}} \sum_{b \bmod N} \varphi_{g_1gh}(a, b, f) \vartheta_{g_1h_1}(z|\tau; b, f) \quad (\gamma \neq 0), \tag{17}$$

где

$$g_1 = \alpha g + \gamma\frac{h}{2} + \alpha\gamma\frac{v}{2}, \quad h_1 = 2\beta g + \delta h + \beta\delta v, \tag{18}$$

$$v = NA^{-1}t, \tag{19}$$

t — вектор-столбец с компонентами $2a_{11}, 2a_{22}, \ldots, 2a_{ss}$,

$$\varphi_{g_1gh}(a, b, f) = e^{\frac{-\pi i\beta\delta(b+g_1)'A(b+g_1)}{N^2}} e^{\frac{2\pi i\beta(a+g)'A(b+g_1)}{N^2}} \times S_{g-\delta g_1, h+2\beta g_1}\left(0\middle|\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\end{matrix}; a-\delta b, f\right); \tag{20}$$

$$\vartheta_{gh}(z\operatorname{sgn}\delta|\tau+\beta\operatorname{sgn}\delta, a, f) = e^{\frac{\operatorname{sgn}\delta\,\pi i\beta(a+g)'A(a+g)}{N^2}} \vartheta_{g_1h_1}(z|\tau; \operatorname{sgn}\delta\, a, f) \tag{21}$$

здесь

$$g_1 = \operatorname{sgn}\delta\cdot g, \quad h_1 = 2\beta g + \operatorname{sgn}\delta\cdot h + \operatorname{sgn}\delta\cdot\beta v. \tag{22}$$

3. В этом параграфе вводится понятие обобщенной тэта-функции с характеристиками и с шаровой функцией и изучаются ее модулярные свойства.

Пусть $2g$ и h — специальные векторы относительно матрицы A положительной квадратичной формы f от s переменных, N — ступень формы f, $P_\nu = P_\nu(x)$ — соответствующая шаровая функция ν-го порядка. Тогда положим

$$\vartheta_{gh}(\tau;\, a,\, P_\nu, f) = \sum_{x\equiv a(\operatorname{mod} N)} (-1)^{\frac{h'A(x-a)}{N^2}} P_\nu(x+g) e^{\frac{\pi i\tau(x+g)'A(x+g)}{N^2}}. \tag{23}$$

Если a — нулевой вектор, то положим

$$\vartheta_{gh}(\tau;\, P_\nu, f) = \vartheta_{gh}(\tau;\, a,\, P_\nu, f),$$

т.е.

$$\vartheta_{gh}(\tau;\, P_\nu, f) = \sum_x (-1)^{\frac{h'Ax}{N^2}} P_\nu(Nx+g) e^{\frac{\pi i\tau(Nx+g)'A(Nx+g)}{N^2}},$$

здесь x пробегает множество всех целых векторов. Если g — специальный вектор, то эту функцию можно переписать следующим образом

$$\vartheta_{gh}(\tau;\, P_\nu, f) = \sum_{x\equiv g(\operatorname{mod} N)} (-1)^{\frac{h'A(x-g)}{N^2}} P_\nu(x) e^{\frac{\pi i\tau x'Ax}{N^2}}. \tag{24}$$

Если $\nu = 0$, то положим

$$P_0(x) = 1, \quad \vartheta_{gh}(\tau; f) = \vartheta_{gh}(\tau;\, P_0, f).$$

Лемма 2. *Пусть $2g$ и h — специальные векторы относительно матрицы A положительной квадратичной формы f от s переменных, Δ — определитель матрицы A формы f. Тогда*

$$\vartheta_{gh}\left(-\frac{1}{\tau};\, a,\, P_\nu, f\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\sqrt{-i\tau})^{s+2\nu} i^\nu \sum_{b \operatorname{mod} N} e^{\frac{-2\pi i(a+g)'A(b+h/2)}{N^2}} \vartheta_{h/2,2g}(\tau;\, b,\, P_\nu, f); \tag{25}$$

здесь b пробегает полную систему несравнимых по модулю N специальных векторов.

Доказательство. Пусть z — вектор-столбец с комплексными компонентами $z_1, z_2, \ldots, z_s$, u — вектор-столбец с комплексными компонентами $u_1, u_2, \ldots, u_s$, удовлетворяющий условию

$$u'Au = 0. \tag{26}$$

Далее, пусть $U = \sum_{j=1}^{s} u_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ — дифференциальный оператор.

Тогда легко проверить, что имеют место равенства:

$$U(e^{\frac{\pi i z'Az}{\tau}}) = \frac{\pi i}{\tau} U(z'Az) e^{\frac{\pi i z'Az}{\tau}}, \quad U(z'Az) = 2u'Az,$$

$$U^2(e^{\frac{\pi i z'Az}{\tau}}) = \frac{\pi i}{\tau} 2u'Aue^{\frac{\pi i z'Az}{\tau}} + \frac{\pi i}{\tau} 2u'AzU(e^{\frac{\pi i z'Az}{\tau}}), \tag{27}$$

$$U(e^{\frac{2\pi i(x+g)'Az}{N}}) = \frac{2\pi i}{N} x'Aue^{\frac{2\pi i(x+g)'Az}{N}},$$

$$U^2(e^{\frac{2\pi i(x+g)'Az}{N}}) = e^{\frac{2\pi i(x+g)'Az}{N}} \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^2 (x'Au)^2. \tag{28}$$

Применив ν раз оператор U к формулам (5) и (16), согласно (26)–(28), получаем

$$U^\nu \vartheta_{gh}(z|\tau;\, a, f)|_{z=0} \tag{29}$$

$$= \left(\frac{2\pi i}{N}\right)^\nu \sum_{x\equiv a(\operatorname{mod} N)} (-1)^{\frac{h'A(x-a)}{N^2}} (x'Au)^\nu e^{\frac{\pi i\tau(x+g)'A(x+g)}{N^2}};$$

$$U^\nu \vartheta_{gh}\left(\frac{z}{\tau}\,\middle|\, -\frac{1}{\tau};\, a, f\right)\bigg|_{z=0} = \left(\frac{1}{\tau}\right)^\nu U^\nu \vartheta_{gh}\left(z\,\middle|\, -\frac{1}{\tau};\, a, f\right)\bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\sqrt{-i\tau})^s \sum_{b \operatorname{mod} N} e^{\frac{-2\pi i(x+g)'A(b+h/2)}{N^2}} U^\nu \vartheta_{h/2,2g}(z\,|\,\tau;\, b, f)\bigg|_{z=0}.$$

Умножив эти равенства на различные постоянные C, суммируя по всем векторам u, удовлетворяющим условию (26), согласно (29) и определению шаровой функции (см., напр., [16], стр. 454), получаем утверждаемое.

Лемма 3. *Пусть $2g$ и h — специальные векторы, α, β, γ, δ — целые числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Тогда в случае $\gamma \neq 0$ имеет место равенство*

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\, a,\, P_\nu, f\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\sqrt{\frac{-i(\gamma\tau+\delta)\operatorname{sgn}\gamma}{|\gamma|}}\right)^{s+2\nu} (i\gamma)^\nu \tag{30}$$

$$\times \sum_{b \operatorname{mod} N} \varphi_{g_1 gh}(a, b, f)\, \vartheta_{g_1 h_1}(\tau;\, b,\, P_\nu, f),$$

где

$$g_1 = \alpha g + \gamma \frac{h}{2} + \alpha\gamma \frac{v}{2}, \quad h_1 = 2\beta g + \delta h + \beta\delta v, \quad v = NA^{-1}t, \tag{31}$$

$$t = \begin{bmatrix} 2a_{11} \\ 2a_{22} \\ \vdots \\ 2a_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{g_1gh}(a, b; f) = e^{\frac{-\pi i\beta\delta(b+g_1)'A(b+g_1)}{N^2}} e^{\frac{2\pi i\beta(a+g)'A(b+g_1)}{N^2}} \times S_{g-\delta g_1, h+2\beta g_1}\left(0 \middle| \begin{matrix}\alpha \\ \gamma\end{matrix}; a-\delta b, f\right), \tag{32}$$

а в случае $\gamma = 0$ *имеем*

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; a, P_\nu, f\right) = (\gamma\varepsilon+\delta)^\nu e^{\frac{\pi i\beta \operatorname{sgn}\delta(a+g)'A(a+g)}{N^2}} \vartheta_{g_1h_1}(\tau; \operatorname{sgn}\delta a, P_\nu, f). \tag{33}$$

Доказательство. Применяя дифференциальный оператор U к (17) и (21) и рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, получим утверждаемое.

Лемма 4. *Пусть выполняются все условия леммы* 3, k — *произвольный целый вектор,* l — *специальный вектор относительно матрицы* A. *Тогда имеют место равенства:*

$$\vartheta_{g+l,h}(\tau; a, P_\nu, f) = \vartheta_{gh}(\tau; a+l, P_\nu, f),$$

$$\vartheta_{g,h+2l}(\tau; a, P_\nu, f) = \vartheta_{gh}(\tau; a, P_\nu, f),$$

$$\vartheta_{gh}(\tau; a+Nk, P_\nu, f) = (-1)^{h'Qk/N}\vartheta_{gh}(\tau; a, P_\nu, f).$$

Доказательство. Применяя дифференциальный оператор U к (10), (11) и (12) и рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, получим утверждаемое.

Теорема 1. *Пусть* $f = f(x)$ — *целочисленная положительная квадратичная форма с числом переменных* s, Δ — *определитель матрицы* A *формы* f, $P_\nu = P_\nu(x)$ — *соответствующая шаровая функция,* N — *ступень формы* f. *Далее, пусть* g *и* h *специальные векторы, удовлетворяющие условиям*

$$2|h, \quad N|N_0, \quad N^2|f(g), \quad 4N\left|\frac{N_0}{N}f(h).\right. \tag{34}$$

Тогда для всякой подстановки группы $\Gamma_0(N_0)$ *имеет место равенство*

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; P_\nu, f\right) = v(M)(\sqrt{\gamma\tau+\delta})^{s+2\nu}\vartheta_{\alpha g,h}(\tau; P_\nu, f),$$

где

$$v(M) = (i^{\frac{1}{2}\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)})^{s+2\nu}(\operatorname{sgn}\delta)^\nu\left(i^{\left(\frac{|\delta|-1}{2}\right)^2}\right)^{s+2\nu} \times \left(\frac{2^s\Delta(\operatorname{sgn}\delta)^s\beta^s}{|\delta|}\right)\left(\frac{(-1)^s}{|\delta|}\right) \quad \textit{при } 2\nmid s; \tag{35}$$

$$= (\operatorname{sgn}\delta)^{s/2}\left(\frac{(-1)^{s/2}\Delta}{|\delta|}\right) \quad \textit{при } 2|s;$$

$\eta(\gamma) = 1$ *при* $\gamma \geqslant 0$ *и* $\eta(\gamma) = -1$ *при* $\gamma < 0$, $\left(\frac{(-1)^{s/2}\Delta}{|\delta|}\right)$ — *символ Кронекера,* $\left(\frac{2^s\Delta(\operatorname{sgn}\delta)^s\beta^s}{|\delta|}\right)$, $\left(\frac{(-1)^s}{|\delta|}\right)$ — *символы Якоби.*

Доказательство. 1) Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда, согласно лемме 3, имеем

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; P_\nu, f\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\sqrt{\frac{-i(\gamma\tau+\delta)\operatorname{sgn}\gamma}{|\gamma|}}\right)^{s+2\nu} \times (i\gamma)^s \sum_{b \bmod N} \varphi_{g_1gh}(b; f)\vartheta_{g_1h_1}(\tau; b, P_\nu, f), \tag{36}$$

где

$$\varphi_{g_1gh}(b; f) = \varphi_{g_1gh}(0, b; f),$$

величины g_1, h_1 и $\varphi_{g_1gh}(a, b; f)$ определены формулами (31) и (32).

В (36) взяв β, $-\alpha$, δ, $-\gamma$, τ' вместо α, β, γ, δ, τ, получим

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\beta\tau'-\alpha}{\delta\tau'-\gamma}; P_\nu, f\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\sqrt{\frac{-i(\delta\tau'-\gamma)\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}}\right)^{s+2\nu} \times (i\delta)^\nu \sum_{b \bmod N} \varphi_{(h_1/2)gh}(b; f)\vartheta_{h_1/2, -2\alpha g-\gamma h+\alpha\gamma v}(\tau; b, P_\nu, f), \tag{37}$$

где

$$h_1 = 2\beta g + \delta h + \beta\delta v, \tag{38}$$

$$\varphi_{(h_1/2)gh}(b; f) = e^{\frac{-\pi i\alpha\gamma(b+\frac{1}{2}h_1)'A(b+\frac{1}{2}h_1)}{N^2}} e^{\frac{-2\pi i\alpha g'A(b+\frac{1}{2}h_1)}{N^2}} \times S_{g-\gamma(h_1/2), h-\alpha h_1}\left(0 \middle| \begin{matrix}\beta \\ \delta\end{matrix}; \gamma b, f\right). \tag{39}$$

Так как $2|h_1$, $\gamma \equiv 0 \pmod{N_0}$, b, h_1 — специальные векторы, то согласно (38), имеем

$$e^{\frac{-\pi i\alpha\gamma(b+\frac{1}{2}h_1)'A(b+\frac{1}{2}h_1)}{N^2}}=1. \tag{40}$$

Согласно (13)–(15) и условиям (34), имеем

$$S_{g-\gamma(h_1/2),h-\alpha h_1}\left(0\left|\begin{matrix}\beta\\ \delta\end{matrix};\gamma b,f\right.\right)=S_{go}\left(0\left|\begin{matrix}\beta\\ \delta\end{matrix};0,f\right.\right). \tag{41}$$

Так как $\gamma\equiv 0(\operatorname{mod} N_0)$, $2|h$, h — специальный вектор, то, согласно (38) и лемме 4, имеем

$$\vartheta_{h_1/2,-2\alpha g-\gamma h-\alpha\gamma v}(\tau;\,b,\,P_v,f)=\vartheta_{(h_1/2)2\alpha g}(\tau;\,b,\,P_v,f). \tag{42}$$

Из (37)–(42) следует

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\beta\tau'-\alpha}{\delta\tau'-\gamma};\,P_v,f\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\sqrt{\frac{-i(\delta\tau'-\gamma)\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}}\right)^{s+2v} \tag{43}$$

$$\times(i\delta)^v S_{go}\left(0\left|\begin{matrix}\beta\\ \delta\end{matrix};0,f\right.\right)\sum_{b \bmod N}e^{\frac{-2\pi i\alpha g'A(b+h_1/2)}{N^2}}\vartheta_{h_1/2,2\alpha g}(\tau;\,b,\,P_v,f).$$

В (43) написав $-1/\tau$ вместо τ' и приняв во внимание (16) и лемму 4, получим

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\,P_v,f\right)=\left(\sqrt{\frac{-i\operatorname{sgn}\delta(-\delta/\tau-\gamma)}{|\delta|}}\right)^{s+2v}(i\delta)^v \tag{44}$$

$$\times S_{go}\left(0\left|\begin{matrix}\beta\\ \delta\end{matrix};0,f\right.\right)\frac{(\sqrt{-i\tau})^{s+2v}}{i^v}\vartheta_{\alpha g,h}(\tau;\,P_v,f).$$

Можно показать (см., напр., [5], формула 6.16), что

$$\left(\sqrt{\frac{-i\operatorname{sgn}\delta(-\delta/\tau-\gamma)}{|\delta|}}\right)^{s+2v}(\sqrt{-i\tau})^{s+2v} \tag{45}$$

$$=\frac{(i^{(1/2)\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\delta-1)})^{s+2v}(\sqrt{\gamma\tau+\delta})^{s+2v}}{(|\delta|^{1/2})^{s+2v}}.$$

Из (44), согласно (45), имеем

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\,P_v,f\right)=(i^{(1/2)\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\delta-1)})^{s+2v}\frac{(\sqrt{\gamma\tau+\delta})^{s+2v}}{(|\delta|^{1/2})^{s+2v}} \tag{46}$$

$$\times\delta^v\vartheta_{\alpha g,h}(\tau;\,P_v,f)S_{go}\left(\begin{matrix}\beta\\ \delta\end{matrix};f\right).$$

Согласно (6), (8) и (9) имеем

$$S_{go}\left(\begin{matrix}\beta\\ \delta\end{matrix};f\right)=\sum_{\substack{x \bmod N\delta\\ x\equiv 0 (\operatorname{mod} N)}}e^{\frac{\pi i\beta(x+g)'A(x+g)}{N^2\delta}}.$$

Введя новую букву суммирования y

$$x\equiv\alpha\delta g+Ny(\operatorname{mod} N\delta)$$

и принимая во внимание условия (34), получаем

$$S_{go}\left(\begin{matrix}\beta\\ \delta\end{matrix};f\right)=\sum_{y \bmod |\delta|}e^{\frac{\pi i\beta\operatorname{sgn}\delta y'Ay}{|\delta|}}. \tag{47}$$

Если $2\nmid\delta$, то из (46), согласно (47) и лемме 4 работы [8], следует утверждаемое.

Пусть теперь $2|\delta$, т.е. $2\nmid\gamma$. Так как $\gamma\equiv 0(\operatorname{mod} N_0)$ то $\gamma\equiv 0(\operatorname{mod} N)$, что возможно лишь в случае $2|s$, $2\nmid N$.

Правая часть равенства (46), согласно (47) и условиям (34), не меняется при замене τ через $\tau+n$ (n — любое целое число). С другой стороны — в левой части вместо $\dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ получим $\dfrac{\alpha\tau+n\alpha+\beta}{\gamma\tau+n\gamma+\delta}$.

Подберем число n так, чтобы

$$n\gamma+\delta\equiv 1(\operatorname{mod} 2),\qquad n\gamma+\delta>0.$$

Но в этом случае в правой части множитель перед функцией $\vartheta_{\alpha g,h}(\tau;\,P_v,f)$ должен быть тот же, что и в предыдущем случае.

Таким образом, и в этом случае, согласно (46) и (47), следует утверждаемое.

2) Пусть $\gamma=0$. Из (33) и (24) следует

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\,P_v,f\right)=(\gamma\tau+\delta)^v e^{\frac{\pi i\beta\operatorname{sgn}\delta g'Ag}{N^2}}\vartheta_{g_1h_1}(\tau;\,P_v,f).$$

Отсюда, согласно (34) и (31), следует

$$\vartheta_{gh}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\,P_v,f\right)=(\gamma\tau+\delta)^v\vartheta_{\alpha g,h}(\tau;\,P_v,f). \tag{48}$$

В рассматриваемом случае $\alpha\delta=1$, т.е. $\alpha=\delta=1$ или $\alpha=\delta=-1$. Из (48) следует утверждаемое при $\gamma=0$.

Замечание к теореме 1. Шоенеберг изучил поведение функции (24) относительно линейной подстановки группы $\Gamma_0(N)$ в случае, когда $2|s$, h — нулевой вектор ([15], стр. 519, формула (16)). Из формулы (16) работы [15] следует справедливость теоремы 1 в этом случае. В случае, когда s — любое целое положительное число, h — нулевой вектор, справедливость теоремы 1 следует из соответствующих формул Шимуры ([16], стр. 456). Из этих результатов, согласно определению 1, следует

Теорема 2. *Пусть $f = f(x)$ целочисленная положительная квадратичная форма с числом переменных s, Δ — определитель матрицы A формы f, N — ступень формы f, тогда функция* (1) *является целой модулярной формой типа $(-s/2, N, v(M))$, где $v(M)$ определены формулами* (35).

Теорема 3. *Пусть $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(x)$, $\ldots$, $f_j = f_j(x)$ — целочисленные положительные квадратичные формы с числом переменных s, $P_\nu^{(k)} = P_\nu^{(k)}(x)$ — соответствующие шаровые функции, $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ — матрица формы $f_k(x)$, Δ_k — определитель матрицы A_k, N_k — ступень формы f_k $(k = 1, 2, \ldots, j)$.*

Далее, пусть $g^{(k)}$ и $h^{(k)}$ — специальные векторы относительно матрицы A_k, $2 \mid h^{(k)}$, т.е. $h^{(k)}$ — векторы с четными компонентами, B_k — произвольные комплексные числа. Тогда функция

$$X(\tau) = \sum_{k=1}^{j} B_k \vartheta_{g^{(k)}h^{(k)}}(\tau; P_\nu^{(k)}, f_k) \tag{49}$$

является целой модулярной формой типа $(-(s/2+\nu), N_0, v(M))$, где $v(M)$ — определены формулами (35), *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$N_k \mid N_0, \quad N_k^2 \mid f_k(g^{(k)}), \quad 4N_k \left| \frac{N_0}{N_k} f_k(h^{(k)}) \right. \tag{50}$$

и для всех α и δ, удовлетворяющих условию $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{N_0}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{j} B_k \vartheta_{\alpha g^{(k)}, -h^{(k)}}(\tau; P_\nu^{(k)}, f_k)(\operatorname{sgn}\delta)^\nu \left(\frac{(-1)^{[s/2]}\Delta_k}{|\delta|}\right) = \left(\frac{(-1)^{[(s+2\nu)/2]}\Delta}{|\delta|}\right) \sum_{k=1}^{j} B_k \vartheta_{g^{(k)}h^{(k)}}(\tau; P_\nu^{(k)}, f_k). \tag{51}$$

Доказательство. Очевидно, что функция $X(\tau)$ удовлетворяет условию 1) определения 1.

Из (50) и (51), согласно теореме 1, следует, что эта функция удовлетворяет и условиям 2) и 3) определения 1. Сейчас покажем, что в окрестности точки $-\delta/\gamma$ $(\gamma \neq 0, (\delta, \gamma) = 1)$ имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^{s/2+\nu} X(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{\frac{2\pi i m \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}}{N_0}}. \tag{52}$$

В (30) положив

$$g = g^{(k)}, \quad h = h^{(k)}, \quad N = N_k, \quad P_\nu(x) = P_\nu^{(k)}(x) = P_\nu^{(k)}, \quad f(x) = f_k(x) = f_k$$

и написав δ, $-\beta$, $-\gamma$, α, τ' вместо α, β, γ, δ, τ, получим

$$\vartheta_{g^{(k)}h^{(k)}}\left(\frac{\delta\tau'-\beta}{-\gamma\tau'+\alpha}; P_\nu^{(k)}, f_k\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k}}\left(\sqrt{\frac{-i(-\gamma\tau'+\alpha)\operatorname{sgn}(-\gamma)}{|\gamma|}}\right)^{s+2\nu} \times (-i\gamma)^\nu \sum_{b^{(k)} \bmod N_k} \varphi_{g_1^{(k)}g^{(k)}h^{(k)}}(b^{(k)}; f_k)\vartheta_{g_1^{(k)}h_1^{(k)}}(\tau'; P_\nu^{(k)}, f_k), \tag{53}$$

где

$$g_1^{(k)} = \delta g^{(k)} - \gamma\frac{h^{(k)}}{2} - \delta\gamma\frac{v^{(k)}}{2}, \qquad h_1^{(k)} = -2\beta g^{(k)} + \alpha h^{(k)} - \beta\alpha v^{(k)},$$
$$v^{(k)} = N_k A_k^{-1} t_k, \qquad t_k = \begin{bmatrix} 2a_{11}^{(k)} \\ \vdots \\ 2a_{ss}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{54}$$

В (53) написав $(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$ вместо τ', получим

$$\vartheta_{g^{(k)}h^{(k)}}(\tau; P_\nu^{(k)}, f_k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k}}\left(\sqrt{\frac{i\operatorname{sgn}\gamma}{|\gamma|(\gamma\tau+\delta)}}\right)^{s+2\nu}(-i\gamma)^\nu \times \sum_{b^{(k)} \bmod N_k} \varphi_{g_1^{(k)}g^{(k)}h^{(k)}}(b^{(k)}; f_k)\vartheta_{g_1^{(k)}h_1^{(k)}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\beta}; b^{(k)}, P_\nu^{(k)}, f_k\right). \tag{55}$$

Можно показать (см., напр., [5], формула (6.23)), что

$$\left(\sqrt{\frac{i\operatorname{sgn}\gamma}{|\gamma|(\gamma\tau+\delta)}}\right)^{s+2\nu} = \frac{(e^{\pi i \operatorname{sgn}\gamma/4})^{s+2\nu}}{|\gamma|^{s/2+\nu}} \cdot \frac{1}{(\gamma\tau+\delta)^{s/2+\nu}}. \tag{56}$$

Если γ четное, то, согласно (54), $g_1^{(k)}$ — специальный вектор, $2 \mid h_1^{(k)}$, $h_1^{(k)}$ — специальный вектор и утверждаемое следует из (55), (56), (23) и (49).

Если γ нечетное, то

$$g_1^{(k)} = \delta g^{(k)} - \frac{\gamma-1}{2}h^{(k)} - \frac{\delta\gamma v^{(k)}}{2} - \frac{h^{(k)}}{2} = g_2^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2},$$

где $g_2^{(k)} = \delta g^{(k)} - \dfrac{\gamma-1}{2}h^{(k)} - \dfrac{\delta\gamma}{2}v^{(k)}$ — специальный вектор, т.к.

$$\left(g_2^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2}\right)' A_k \left(g_2^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2}\right) = (g_2^{(k)})' A_k g_2^{(k)} - 2(g_2^{(k)})' A_k \frac{h^{(k)}}{2} + \frac{h^{(k)}}{2} A_k \frac{h^{(k)}}{2},$$

согласно (50)

$$N_k \left| \left(g_2^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2}\right)' A_k \left(g_2^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2}\right)\right.. \tag{57}$$

Таким образом, согласно (57), (55), (56), (23), (49) и в случае $2 \nmid \gamma$ функция $X(\tau)$ удовлетворяет условию 4) определения 1.

Теперь покажем, что условия (50) и (51) являются и необходимыми условиями для того, чтобы функция $X(\tau)$ принадлежала пространству целых модулярных форм типа $\left(-(s/2+\nu),\ N_0,\ v(M)\right)$.

Из условия 3) определения 1, согласно (24) и (49), сразу следует, что

$$N_k^2 \mid f_k(g^{(k)}). \tag{58}$$

Согласно условию 4) определения 1, для любых δ и γ $((\delta, \gamma) = 1,\ \gamma \neq 0)$ имеет место равенство (52). Это равенство имеет место и для четных γ. Но в этом случае, согласно (30), (53)–(56), имеем

$$(\gamma\tau+\delta)^{s/2+\nu} X(\tau) = \sum_{k=1}^{j} \Big(\sum_{m'=0}^{\infty} C_m^{(k)} e^{2\pi i \frac{m'}{N_k} \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}} \Big),$$

т.е. $m/N_0 = m'/N_k$ (m и m' — целые положительные числа).

Следовательно,

$$m = m' \frac{N_0}{N_k}$$

и, согласно определению ступени N_k формы f_k, имеем

$$N_k \mid N_0. \tag{59}$$

Равенство (52) имеет место и для нечетных γ. В этом случае имеет место (55), где

$$\vartheta_{g_1^{(k)} h_1^{(k)}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\ b^{(k)},\ P_\nu^{(k)}, f_k\right) = \sum_{x \equiv b^{(k)} (\mathrm{mod}\, N_k)} (-1)^{\frac{h_1^{(k)} A_k (x-b^{(k)})}{N_k^2}}$$
$$\times P_\nu(x+g_1^{(k)}) e^{\pi i \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \cdot \frac{\left(x+g_2^{(k)}-\frac{h^{(k)}}{2}\right)' A_k \left(x+g_2^{(k)}-\frac{h^{(k)}}{2}\right)}{N_k}},$$

$g_2^{(k)} = \delta g^{(k)} - \dfrac{\gamma-1}{2} h^{(k)} - \dfrac{\delta\gamma v^{(k)}}{2}$ — специальный вектор. Поэтому, согласно (52) и (49), имеем

$$4N_k \left| \frac{N_0}{N_k} f_k(h^{(k)}). \right. \tag{60}$$

Таким образом, если $X(\tau)$ является целой модулярной формой типа $\left(-(s/2+\nu),\ N_0,\ v(M)\right)$, то выполняются условия (58)–(60). Из (58)–(60), согласно теореме 1, определению 1 и (49), следует (51).

Теорема 4. *Если выполняются все условия теоремы 3 и $\nu > 0$, то функция $X(\tau)$ является параболической формой типа $\left(-(s/2+\nu),\ N_0,\ v(M)\right)$, где $v(M)$ определены формулами* (35).

Доказательство. Т.к. функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$ — положительно определенные квадратичные формы, то равенство

$$f_k(x) = 0$$

имеет место лишь в случае, если x нулевой вектор.

Поэтому, согласно определению 2, из (49), (24), (55) и (56) следует утверждаемое.

4. В этом параграфе получены формулы для числа представлений чисел положительной квадратической формой с семью переменными

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_5^2+2x_6^2+2x_7^2.$$

Теорема 5. *Пусть*

$$f = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_5^2+2x_6^2+2x_7^2, \quad f_1 = f_1(x) = x_1^2+x_2^2+2x_3^2,$$

$$g = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_2(x) = x_1 x_2.$$

Тогда имеет место равенство

$$\vartheta(\tau; f) = E(\tau; f) + \frac{1}{64} \vartheta_{gh}(\tau;\ P_2, f_1), \tag{61}$$

где функция $\vartheta_{gh}(\tau;\ P_2, f_1)$ определена формулой (24), *$E(\tau; f)$ — ряд Эйзенштейна.*

Доказательство. Согласно теореме 2, функция $\vartheta(\tau; f)$ принадлежит пространству целых модулярных форм типа $\left(-7/2,\ 8,\ v(M)\right)$, где $v(M)$ — соответствующая форме f система мультипликаторов и их можно вычислить по формулам (35). Тогда, согласно теореме Зигеля, функция $E(\tau; f)$ также принадлежит этому пространству.

Легко проверить, что форма $f_1(x)$, векторы g и h удовлетворяют условиям (50) теоремы 3.

Если $\alpha\delta \equiv 1 \pmod 8$, то $\alpha\delta \equiv 1 \pmod 2$, т.е. согласно лемме 4, имеем

$$\vartheta_{\alpha g, h}(\tau;\ P_2, f_1) = \vartheta_{gh}(\tau;\ P_2, f_1). \tag{62}$$

Из (62) следует, что функция $\vartheta_{gh}(\tau;\ P_2, f_1)$ удовлетворяет и условию (51) теоремы 3. Таким образом, согласно теоремам 3 и 4, функция $\vartheta_{gh}(\tau;\ P_2, f_1)$ является параболической формой типа $\left(-7/2,\ 8,\ v(M)\right)$, $v(M)$ — система мультипликаторов, соответствующая форме $f(x)$.

Следовательно, согласно лемме 1, функция

$$\theta(\tau; f) = \vartheta(\tau; f) - E(\tau; f) - \frac{1}{64} \vartheta_{gh}(\tau;\ P_2, f_1) \tag{63}$$

будет тождественно равна нулю, если в ее разложении по степеням $Q = e^{2\pi i\tau n}$ все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 3)$ равны нулю.

Пусть $n = 2^\alpha m$ $(2 \nmid m,\ \alpha \geqslant 0)$, $8n = r^2\omega$, $m = r_1^2\omega_1$ (ω, ω_1 — бесквадратные числа). Тогда, согласно формуле (46) из [1],

$$E(\tau; f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n; f) Q^n, \tag{64}$$

где

$$\varrho(n; f) = \frac{128\sqrt{2}}{\pi^3} 2^{5\alpha/2} \omega_1^{5/2} \sum_{d|r_1} d^3 \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{-\omega}{p}\right)\right) p^{-3} L(3;\ -\omega)\chi_2(f) \tag{65}$$

(p — нечетное простое число).

Согласно лемме (27) из [17] имеем

$$L(3;\ -1) = \pi^3/32, \quad L(3;\ -2) = 3\pi^3/64\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} L(3;\ -\omega) &= \frac{\pi^3}{16\omega^{5/2}} \left\{ \sum_{1 \leqslant r \leqslant \omega/4} (\omega^2 - 16r^2)\left(\frac{r}{\omega}\right) + 3\omega^2 \sum_{\omega/4 < r \leqslant \omega/2} \left(\frac{r}{\omega}\right) \right. \\ &\quad \left. + 16 \sum_{\omega/4 < r \leqslant \omega/2} r(r - \omega)\left(\frac{r}{\omega}\right) \right\}, \text{ если } \omega \equiv 1 \pmod 4,\ \omega > 1, \\ &= \frac{\pi^3}{2\omega^{5/2}} \sum_{1 \leqslant r \leqslant \omega/2} r(\omega - 2r)\left(\frac{r}{\omega}\right), \text{ если } \omega \equiv 3 \pmod 4; \\ &= \frac{\pi^3}{32\omega^{5/2}} \left\{ \sum_{1 \leqslant r \leqslant \omega/16} (3\omega^2 - 256r^2)\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) \right. \\ &\quad + 4\omega \sum_{\omega/16 < r \leqslant 3\omega/16} (\omega - 8r)\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) \\ &\quad \left. + 13\omega^2 \sum_{3\omega/16 < r \leqslant \omega/4} \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) - 128 \sum_{3\omega/16 < r \leqslant \omega/4} r(\omega - 2r)\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) \right\}, \\ &\qquad \text{если } \omega \equiv 2 \pmod 8,\ \omega > 2; \\ &= \frac{\pi^3}{32\omega^{5/2}} \left\{ 32\omega \sum_{1 \leqslant r \leqslant \omega/16} r\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) - \omega^2 \sum_{\omega/16 < r \leqslant 3\omega/16} \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) \right. \\ &\quad + 64 \sum_{\omega/16 < r \leqslant 3\omega/16} r(\omega - 4r)\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) \\ &\quad \left. + 8\omega \sum_{3\omega/16 < r \leqslant \omega/4} (\omega - 4r)\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\omega}\right) \right\}, \quad \text{если } \omega \equiv 6 \pmod 8. \end{aligned} \tag{66}$$

Вычислив значения величин $\chi_2(f)$ по формулам (33) работы [8]

получим

$$\chi_2(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = 0, \\ \dfrac{33 \cdot 2^{2.5\alpha} - 126}{31 \cdot 2^{2.5\alpha}} & \text{при } 2 | \alpha, \\ \dfrac{33 \cdot 2^{2.5\alpha + 1.5} - 63}{31 \cdot 2^{2.5\alpha + 1.5}} & \text{при } 2 \nmid \alpha,\ m \equiv 1 \pmod 4, \\ \dfrac{33 \cdot 2^{2.5\alpha + 3.5} - 2 + \left(\frac{2}{m}\right)}{31 \cdot 2^{2.5\alpha + 3.5}} & \text{при } 2 \nmid \alpha,\ m \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{67}$$

Вычислив по формулам (65)–(67) значения $\varrho(n; f)$ для всех $n \leqslant 3$, получим

$$E(\tau; f) = 6Q + 92Q^3 + \ldots$$

Из (1) и (24) следует

$$\vartheta(\tau; f) = 1 + 8Q + 30Q^2 + 80Q^3 + \ldots,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{64}\vartheta_{gh}(\tau;\ P_2, f_1) &= \frac{1}{4} \sum_{x_1, x_2, x_3 = -\infty}^{\infty} (-1)^{x_1 + x_2}(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{2\pi i\tau(2x_1 + 1)^2 + (2x_2 + 1)^2 + (2x_3 + 1)^2}{4}\right\} \\ &= 2Q - 12Q^3 + \ldots \end{aligned}$$

Теперь нетрудно проверить, что все коэффициенты при Q^n $(n \leqslant 3)$ в разложении по степеням Q функции $\theta(\tau; f)$, определенной формулой (63), равны нулю для всех $n \leqslant 3$. Итак, тождество (61) доказано.

Теорема 6. *Пусть* $n \leqslant 2^\alpha m$ $(2 \nmid m,\ \alpha \geqslant 0)$, $8n = r^2\omega$, $m = r_1^2\omega_1$ (ω, ω_1 — *бесквадратные числа*), $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_7^2$.

Тогда

$$\begin{aligned} r(n; f) &= \frac{128\sqrt{2}}{\pi^3} 2^{5\alpha/2} \omega_1^{5/2} \sum_{d|r_1} d^3 \prod_{p|d} \left(1 - \left(\frac{-\omega}{p}\right)\right) p^{-3} L(3;\ -\omega)\chi_2(f) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\substack{4n = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \\ 2 \nmid x_1,\, 2 \nmid x_2,\, 2 \nmid x_3}} (-1)^{(x_1 x_2 - 1)/2} x_1 x_2, \end{aligned}$$

где значения величин $L(3;\ -\omega)$, $\chi_2(f)$ *даны формулами* (66) *и* (67).

Доказательство. Приравняв коэффициенты при однаковых степенях Q в обеих частях тождества (61), получим

$$r(n;f) = \varrho(n;f) + \frac{1}{64}\nu(n) \tag{68}$$

где $\nu(n)$ обозначает коэффициент при Q^n в разложении функции $\vartheta_{gh}(\tau; P_2, f_1)$ по степеням Q. Т.к.

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2,$$

$$g = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_2(x) = x_1 x_2,$$

то согласно (24), имеем

$$\frac{1}{64}\vartheta_{gh}(\tau; P_2, f_1)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{x_1, x_2, x_3 = -\infty}^{\infty} (-1)^{x_1 + x_2}(2x_1+1)(2x_2+1) Q^{((2x_1+1)^2 + (2x_2+1)^2 + 2(2x_3+1)^2)/4},$$

т.е.

$$\frac{1}{64}\nu(n) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{4n = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \\ 2\nmid x_1,\, 2\nmid x_2}} (-1)^{(x_1 x_2 - 1)/2} x_1 x_2. \tag{69}$$

Из (68), (65) и (69) следует утверждаемое.

Литература

[1] Т. В. Вепхвадзе, *К аналитической теории квадратичных форм*, Труды Тбилисского мат. ин-та им. А. М. Размадзе 72 (1983), 12–31.

[2] — *Обобщенные тэта-функции с характеристиками и представление чисел положительными квадратичными формами*, Сообщения АН ГССР 128 (1) (1987), 465–468.

[3] Л. А. Коган, *О представлении целых чисел положительно определенными квадратичными формами*, Ташкент 1971.

[4] — *Формулы Лиувилля и параболические формы, порожденные обобщенными бинарными тэта-рядами*, Лит. мат. сб. 9 (1969), 519–533.

[5] Г. А. Ломадзе, *О представлении чисел суммами обобщенных полигональных чисел I*, Труды Тбилисского мат. ин-та им. А. М. Размадзе 22 (1956), 77–102.

[6] — *О числе представлений чисел квадратичными формами с четырьмя переменными*, Труды Тбилисского мат. ин-та им. А. М. Размадзе (1971), 106–139.

[7] — *О числе представлений чисел положительными квадратичными формами с шестью переменными*, Труды Тбилисского мат. ин-та им. А. М. Размадзе 45 (1974), 111–133.

[8] А. В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами*, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова 65 (1962), 1–319.

[9] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. II, New York 1952.

[10] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. III, New York 1952.

[11] E. Hecke, *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen*, Math. Werke, Göttingen 1959, 789–918.

[12] H. D. Kloosterman, *The behaviour of general theta-functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups. I*, Ann. of Math. 47 (1946), 317–375.

[13] M. Knopp, *Modular functions in analytic number theory*, Chicago 1970.

[14] H. Petersson, *Modulfunktionen und quadratische Formen*, Berlin–Heidelberg–New York 1982.

[15] B. Schoeneberg, *Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen*, Math. Ann. 116 (1939), 511–523.

[16] C. Shimura, *On modular forms of half-integral weight*, Ann. of Math. 97 (1973), 440–481.

[17] H. Streefkerk, *Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking* $U = \sum_{i=1}^{s}(Ax_i^2 + Bx_i + C)$, Dissertation, Amsterdam 1943.

Поступило 19.7.1988
и в исправленной форме 22.3.1989 (1853)