для любых двух многочленов $P(x) \not\equiv Q(x)$ из класса $P_n(H, \bar{s}, \bar{b})$, так как в противном случае из (55) получили бы

$$1 \leqslant |R(\omega)| = |P(\omega) - Q(\omega)| \leqslant 2^{-n}.$$

Так как $|\sigma(P)| \leqslant |\sigma_{n-1}(P)| H^{-n+1} \Psi(H) 2^{-n-1} (n+1)^{-1}$,

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{b})} |\sigma_{n-1}(P)| \leqslant 6,$$

то последовательно имеем

$$\sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s})} |\sigma(P)| < c(n) \sum_{\bar{b}} \sum_{P(x) \in P_n(H, \bar{s}, \bar{b})} |\sigma_{n-1}(P)| H^{-n+1} \Psi(H) < c(n) \Psi(H).$$

Опять применим лемму Бореля–Кантелли.

Предложения 1–4, очевидно, доказывают теорему.

Литература

[1] В. И. Берник, *Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 44 (1) (1980), 24–25.

[2] — *О точном порядке приближения почти всех точек параболы*, Матем. заметки 26:5 (1979), 657–665.

[3] В. И. Берник, Ф. Ф. Желудевич, *О целочисленных многочленах, принимающих малые значения на некотором интервале*, Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук 3 (1981), 27–33.

[4] В. И. Берник, *Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений*, Acta Arith. 42 (1983), 219–253.

[5] — *Доказательство гипотезы А. Бэйкера в метрической теории трансцендентных чисел*, ДАН СССР 277:5 (1984), 1036–1039.

[6] А. О. Гельфонд, *Трансцендентные и алгебраические числа*, Гостехиздат, Москва 1952, 224 с.

[7] В. Г. Спринджук, *О гипотезе Малера*, ДАН СССР 154:4 (1964), 783–786.

[8] — *Еще о гипотезе Малера*, ДАН СССР 155:1 (1964), 54–56.

[9] — *Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 29 (2) (1965), 379–436.

[10] — *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Наука и техника, Минск 1967, 194 с.

[11] A. Baker, *On a theorem of Sprindžuk*, Proc. Royal Soc. London A 292 (1966), 92–104.

[12] K. Mahler, *Über das Mass der Menge aller S-Zahlen*, Math. Ann. 106 (1932), 131–139.

Поступило 19.8.1985
и в исправленной форме 23.10.1986 (1536)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1989)

Оценки числа нулей функций некоторых классов

Ю. В. Нестеренко (Москва)

Памяти В. Г. Спринджука посвящается

Пусть $\xi \in \mathbf{C}$ и $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ произвольные функции комплексного переменного, аналитические в точке ξ. Легко проверить, что для любых натуральных чисел n и h существует многочлен $P \in \mathbf{C}[z, x_1, \ldots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, $\deg_z P \leqslant n$, $\deg_{\bar{x}} P \leqslant h$ такой, что функция $R(z) = P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z))$ имеет в точке $z = \xi$ нуль кратности не меньшей, чем $\gamma_0 (n+1) h^m$, где $\gamma_0 = 1/m!$. Кратность с которой в действительности начинается разложение в точке $z = \xi$ зависит от индивидуальных свойств функций $f_i(z)$. В частности, если функции алгебраически зависимы над $\mathbf{C}(z)$, то для достаточно больших n и h существует многочлен P такой, что $R(z) \equiv 0$. Если же функции $f_i(z)$ алгебраически независимы над $\mathbf{C}(z)$, то оценка сверху $\operatorname{ord}_\xi R(z)$ — кратности нуля функции $R(z)$ в точке $z = \xi$ через параметры n и h может служить мерой алгебраической независимости функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над $\mathbf{C}(z)$.

Целью статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — различные комплексные числа, функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbf{C}(z)$, составляют решение системы дифференциальных уравнений*

$$y'_k = q_{k0} + \sum_{i=1}^{m} q_{ki} y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \quad q_{ki} \in \mathbf{C}(z) \tag{1}$$

и аналитичны в точках $\xi_1, \ldots, \xi_q$. Тогда для каждого многочлена $P \in \mathbf{C}[z, x_1, \ldots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z)) \leqslant \gamma_1 (\deg_z P + q)(\deg_{\bar{x}} P)^m, \tag{2}$$

где γ_1 — постоянная, зависящая только от системы (1) и функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$.

В 1977 г. в работе [3] был доказан и использовался для оценки меры алгебраической независимости значений E-функций Зигеля в алгебраических точках результат менее сильный, чем (2). Показатель степени у $\deg_{\bar{x}} P$ в правой части (2) равнялся $(m+1)^{m+1}$. Этот показатель был снижен Д. Броунвеллом до $(m+1)!+m+1$ (см. [15]). В 1980 г. оценка (2) была доказана при $m=2$ (см. [4]). Теорема 1 была анонсирована в работе [7]. Отметим, что оценка, аналогичная (2) может быть доказана и в предположении алгебраической зависимости функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ так же, как результат [3] был обобщен в работе Нгуен-Тьен-Тая [9]. Правая часть (2) при этом будет иметь вид $\gamma(\deg_z P+q)(\deg_{\bar{x}} P)^k$, где k — максимальное количество алгебраически независимых над $\mathbf{C}(z)$ среди $f_1(z), \ldots, f_m(z)$.

Следствие. *Пусть функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbf{C}(z)$, составляют решение системы дифференциальных уравнений* (1) *и аналитичны в точке $z=0$; пусть n, h — целые числа, $h \geqslant 1$, многочлен $P \in \mathbf{C}[z, x_1, \ldots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, удовлетворяет условиям $\deg_z P \leqslant n$, $\deg_{\bar{x}} P \leqslant h$ и $R(z) = P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z))$. Если размерность линейного пространства над $\mathbf{C}(z)$, порожденного функциями $R^{(i)}(z)$, $i = 0, 1, \ldots$, равна s, то*

$$\operatorname{ord}_0 P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z)) \leqslant sn + \gamma_2 h^{2m+1}, \tag{3}$$

где постоянная γ_2 зависит только от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и системы уравнений (1).

Неравенство (3) усиливает теорему 3 из работы [3]. Оценка, подобная (3) с членом s^2 вместо h^{2m+1} была с помощью аналитических соображений доказана Д. Бертраном и Ф. Бейкерсом [14]. Для доказательства неравенства (3) достаточно в конце § 3 из [3] воспользоваться теоремой 1 настоящей работы вместо следствия 2 теоремы 2 из [3].

1. Теорема 2 и вывод из нее теоремы 1. Доказательство теоремы 1 основано на развитии идей, содержащихся в работах [3], [4], [6], [8]. Используемые алгебраические конструкции восходят к классическим работам К. Гентцельта [11], Э. Нетер [13], Чжоу и Ван-дер-Вардена [10], Крулля [12].

Рассмотрим несмешанный идеал I кольца $A = \mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$ однородный по переменным $x_0, \ldots, x_m$ и такой, что $r = m+1-h(I) \geqslant 1$ (как и в работах [3], [4], [6], [8] $h(I)$ обозначает высоту идеала I). В § 1 работы [3] идеалу I был поставлен в соответствие некоторый главный идеал $\bar{I}(r)$ в кольце $\mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r]$, где $\bar{u}_i$ — совокупность переменных $u_{i0}, \ldots, u_{im}$. Пусть F — определенная с точностью до множителей из $\mathbf{C}$, образующая идеала $\bar{I}(r)$ (ассоциированная форма идеала I). Введем обозначения

$$N(I) = \deg_{\bar{u}_1} F, \qquad B(I) = \deg_z F.$$

Пусть ξ — комплексное число. Для каждого элемента φ из поля $\mathbf{C}((z-\xi))$ формальных степенных рядов от $z-\xi$ с комплексными коэффициентами обозначим символом $\operatorname{ord}_\xi \varphi$ — порядок, с которого начинается разложение φ. Обозначим также K_ξ — алгебраическое замыкание поля $\mathbf{C}((z-\xi))$. Функция ord_ξ однозначно продолжается на поле K_ξ и отображает его в множество $\mathbf{Q} \cup \{+\infty\}$.

Условимся для каждого вектора $\bar{\varphi} = (\varphi_0, \ldots, \varphi_m) \in K_\xi^{m+1}$ обозначать $|\bar{\varphi}|_\xi = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant m} (\operatorname{ord}_\xi \varphi_j)$.

Определим величину $\operatorname{ord}_\xi I(\bar{\varphi})$, которая в дальнейшем будет играть роль, аналогичную $\operatorname{ord}_\xi P(\bar{\varphi})$ для многочленов $P \in A$. Для этого как и в § 1, [3], рассмотрим r кососимметрических матриц $S^{(i)} = \|s_{jl}^{(i)}\|$, где индексы i, j, l меняются в пределах: $1 \leqslant i \leqslant r$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant m$, предполагая, что за исключением косой симметрии, $s_{jl}^{(i)} + s_{lj}^{(i)} = 0$, переменные $s_{jl}^{(i)}$ не связаны никакими алгебраическими соотношениями над кольцом A. Для каждого многочлена $E \in K_\xi[\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r]$ и вектора $\bar{\varphi} = (\varphi_0, \ldots, \varphi_m) \in K_\xi^{m+1}$ будем обозначать через $\varkappa(E)$ — многочлен от переменных $s_{jl}^{(i)}$, $0 \leqslant j < l \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant r$, с коэффициентами из K_ξ, полученный в результате подстановки в E вместо вектора переменных $\bar{u}_i = (u_{i0}, \ldots, u_{im})$ вектора $S^{(i)} \bar{\varphi}$, $i = 1, \ldots, r$. Определим теперь $\operatorname{ord}_\xi \varkappa(E)$ как наименьшее из значений ord_ξ на коэффициентах многочлена $\varkappa(E)$.

Положим

$$\operatorname{ord}_\xi I(\bar{\varphi}) = \operatorname{ord}_\xi \varkappa(F) - rN(I)|\bar{\varphi}|_\xi,$$

где F — ассоциированная форма идеала I.

Теорема 2. *Пусть m, q — натуральные, $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — различные комплексные числа, функции комплексного переменного $f_0(z), \ldots, f_m(z)$ не связаны никаким однородным алгебраическим уравнением над полем $\mathbf{C}(z)$, составляют решение системы дифференциальных уравнений*

$$y'_j = \sum_{i=0}^{m} q_{ji} y_i, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \quad q_{ji} \in \mathbf{C}(z) \tag{4}$$

и аналитичны в точках $\xi_1, \ldots, \xi_q$. Пусть I — однородный по переменным $x_0, \ldots, x_m$ несмешанный идеал кольца A, $r = m+1-h(I) \geqslant 1$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} I(\bar{\varphi}) \leqslant (6m)^{2m^2 r} B(I) N(I)^{r/(m-r+1)} + \gamma_3^{3m(m+r)} q N(I)^{m/(m-r+1)},$$

где $\bar{f} = (f_0, \ldots, f_m)$ и γ_3 — постоянная, зависящая только от системы уравнений (4) *и функций $f_0(z), \ldots, f_m(z)$.*

В формулировке теоремы 2 подразумевается, что каждая из функций f_j содержится в полях $\mathbf{C}((z-\xi_l))$, $l = 1, \ldots, q$.

Постоянную γ_3 можно определить точнее. Пусть $t(z)$ — общий знаменатель рациональных функций q_{ji} — коэффициентов системы уравнений (4).

Обозначим максимум степеней многочленов $t(z)$, $t(z)q_{ji}\in C[z]$ через γ_4. Тогда

$$\gamma_3 = \max\big((6m)^m,\ \gamma_4 2^{m+1},\ c_0^{1/(3m^2)}\big),$$

где постоянная c_0, зависящая только от системы уравнений (4) и функций $f_0(z),\dots,f_m(z)$ определена ниже в лемме 7.

Теорема 2 доказывается с помощью индукции по r в пределах от $r=1$ до $r=m$.

Теорема 1 легко может быть выведена из теоремы 2. Для этого необходимо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $Q\in A$ однородный многочлен, $I=(Q)$ соответствующий главный идеал в кольце A. Тогда $N(I)=\deg_{\bar{x}} Q$, $B(I)=\deg_z Q$, а для каждой точки $\xi\in \boldsymbol{C}$ и вектора $\bar\varphi\in K_\xi^{m+1}$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{ord}_\xi Q(\bar\varphi)\leqslant \mathrm{ord}_\xi I(\bar\varphi)+|\bar\varphi|_\xi \deg_{\bar{x}} Q.$$

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что $|\bar\varphi|_\xi=0$. Из определения идеала $\bar{I}(m)$ (см. § 1, [3]) следует, что если в ассоциированной форме F идеала I заменить каждый вектор $\bar u_i$ на $S^{(i)}\bar x$, где $\bar x=(x_0,\dots,x_m)$, то получится многочлен от переменных $s_{jk}^{(i)}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $0\leqslant j<k\leqslant m$ с коэффициентами из A, делящимися на Q. Отсюда следует, что $\mathrm{ord}_\xi Q(\bar\varphi)\leqslant \mathrm{ord}_\xi \varkappa(F)=\mathrm{ord}_\xi I(\bar\varphi)$.

Пусть теперь P — многочлен из формулировки теоремы 1,

$$Q = x_0^{\deg P} P\left(z, \frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_m}{x_0}\right),$$

а $I=(Q)$ — соответствующий главный идеал в кольце A. Так как $h(I)=1$, то утверждение теоремы 1 легко следует из предложения 1 и теоремы 2, примененной с $r=m$ и $f_0(z)=1$.

2. Вспомогательные результаты. Для всех утверждений этого параграфа существуют „арифметические" аналоги (см. [5]–[8]), что имеет своей основой аналогию между абсолютными значениями $|\ |$ и $\exp(-\mathrm{ord}_\xi)$ на полях $\boldsymbol{C}$ и K_ξ соответственно.

Предложение 2. *Пусть I — несмешанный однородный идеал кольца A, $h(I)\leqslant m$, $I=I_1\cap\ldots\cap I_s\cap\ldots\cap I_t$ — несократимое примарное разложение, в котором для $l\leqslant s$ имеет место равенство*

$$I_l\cap \boldsymbol{C}[z]=(0)$$

и

$$I_{s+1}\cap\ldots\cap I_t\cap \boldsymbol{C}[z]=(b)\subset \boldsymbol{C}[z],\qquad b\neq 0;$$

пусть для $l\leqslant s$ $\mathfrak{p}_l=\sqrt{I_l}$, k_l — показатель идеала I_l. Тогда

1. $\sum_{l=1}^{s} k_l N(\mathfrak{p}_l)=N(I)$,

2. $\deg_z b+\sum_{l=1}^{s} k_l B(\mathfrak{p}_l)=B(I)$,

3. *для каждого $\xi\in\boldsymbol{C}$ и $\bar\varphi\in K_\xi^{m+1}$*

$$\mathrm{ord}_\xi b+\sum_{l=1}^{s} k_l \mathrm{ord}_\xi \mathfrak{p}_l(\bar\varphi)=\mathrm{ord}_\xi I(\bar\varphi).$$

Доказательство. Все утверждения легко выводятся из следствия, сформулированного в § 1 работы [3] и определения величин $N(\ )$, $B(\ )$, ord_ξ.

Условимся для любых двух векторов $\bar\varphi=(\varphi_0,\dots,\varphi_m)\in K_\xi^{m+1}$, $\bar\psi=(\psi_0,\dots,\psi_m)\in K_\xi^{m+1}$ обозначать

$$\|\bar\varphi-\bar\psi\|_\xi=\min_{0\leqslant i<j\leqslant m}\mathrm{ord}_\xi(\varphi_i\psi_j-\varphi_j\psi_i)-|\bar\varphi|_\xi-|\bar\psi|_\xi.$$

Заметим, что всегда $\|\bar\varphi-\bar\psi\|_\xi\geqslant 0$.

Лемма 1. *Пусть V и W однородные многочлены кольца A, имеющие одинаковую степень по $\bar x$, а $\bar\varphi,\bar\psi\in K_\xi^{m+1}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathrm{ord}_\xi\big(V(\bar\varphi)W(\bar\psi)-V(\bar\psi)W(\bar\varphi)\big)\geqslant \|\bar\varphi-\bar\psi\|_\xi+(|\bar\varphi|_\xi+|\bar\psi|_\xi)\deg_{\bar x} V.$$

Доказательство этой леммы подобно доказательству леммы 7 из [6].

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{p}\subset A$ — однородный простой идеал, $r=m+1-h(\mathfrak{p})\geqslant 1$, $\mathfrak{p}\cap\boldsymbol{C}[z]=(0)$, $x_0\notin\mathfrak{p}$; пусть F – ассоциированная форма идеала $\mathfrak{p}$. Тогда*

1. *существует конечное нормальное расширение $K_1\supset \boldsymbol{C}(z,\bar u_1,\dots,\bar u_{r-1})$ такое, что*

$$F=a\prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})}(u_{r0}+\alpha_1^{(j)}u_{r1}+\ldots+\alpha_m^{(j)}u_{rm}),\tag{5}$$

где $a\in\boldsymbol{C}[z,\bar u_1,\dots,\bar u_{r-1}]$ и $\alpha_i^{(j)}\in K_1$;

2. *каждая из точек $(1:\alpha_1^{(j)}:\ldots:\alpha_m^{(j)})\in P_{K_1}^m$, $1\leqslant j\leqslant N(\mathfrak{p})$, является общим нулем идеала $\mathfrak{p}$.*

Доказательство: см. [5], лемма 2.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2, Q — однородный многочлен кольца A и*

$$G=a^{\deg_{\bar x}Q}\prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})}Q(1,\alpha_1^{(j)},\dots,\alpha_m^{(j)}).\tag{6}$$

Тогда $G \in \mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}]$, $\deg_z G \leqslant B(\mathfrak{p})\deg_{\bar{x}} Q + N(\mathfrak{p})\deg_z Q$, *а если* $r \geqslant 2$, *то* $\deg_{\bar{u}_1} G \leqslant N(\mathfrak{p})\deg_{\bar{x}} Q$ *и существует однородный несмешанный идеал* $J \subset A$, $h(J) = m - r + 2$, *ассоциированная форма которого имеет вид* $w^{-1}G$ *с некоторым многочленом* $w \in \mathbf{C}[z]$, *а множество нулей в проективном пространстве над алгебраическим замыканием* $\mathbf{C}(z)$, *совпадает с множеством нулей идеала* $(\mathfrak{p}, Q)$.

Доказательство. Включение $G \in \mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}]$ и оценка $\deg_z G$ доказаны в лемме 4 из [5]. Оценка $\deg_{\bar{u}_1} G$ следует из второго утверждения той же леммы при $v = -\deg_{\bar{u}_1}$. Утверждение об идеале J следует из леммы 6 работы [6] (см. конец доказательства предложения 3 из [6]). Заметим, что в работе [6] доказательства ведутся в предположении, что кольцо коэффициентов есть $\mathbf{Z}$, однако они проходят без изменений и в рассматриваемом нами случае.

Лемма 4. *Пусть* I, J — *несмешанные однородные идеалы кольца* A, $h(J) = h(I) + 1 \leqslant m$; $Q \in A$ — *однородный многочлен, не содержащийся ни в одном из простых идеалов, ассоциированных с* I. *Если* $(I, Q) \subset J$, *то*

1. $N(J) \leqslant N(I)\deg_{\bar{x}} Q$,

2. $B(J) \leqslant B(I)\deg_{\bar{x}} Q + N(I)\deg_z Q$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными в формулировке предложения 2. Фиксируем некоторый индекс j. Так как $h(\mathfrak{p}_j) \leqslant m - 1$, то существует переменная x_i, $x_i \notin \mathfrak{p}_j$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0 \notin \mathfrak{p}_j$. Обозначим через G_j многочлен из кольца $\mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}]$, $r = m + 1 - h(I)$, определенный для идеала $\mathfrak{p}_j$ и многочлена Q, как указано в лемме 3. Обозначим $H = bG_1^{k_1} \ldots G_s^{k_s}$. С помощью включения $(I, Q) \subset J$ и первого утверждения леммы 6 из [6] ($\mathbf{C}[z]$ вместо $\mathbf{Z}$) находим, что $H \in J(r-1)$, и значит, $N(J) \leqslant \deg_{\bar{u}_1} H$, $B(J) \leqslant \deg_z H$. Неравенства леммы 6 теперь легко следуют из неравенств леммы 3 и предложения 2.

Фиксируем некоторый ненулевой вектор $\bar{\varphi} \in K_\xi^{m+1}$ и так же как перед формулировкой теоремы 2 определим гомоморфизм

$$\varkappa\colon \mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}] \to K_\xi[S^{(1)}, \ldots, S^{(r-1)}],$$

вкладывающий $\mathbf{C}[z]$ в поле K_ξ и отображающий переменную u_{ij} в $\sum_{k=0}^{m} s_{jk}^{(i)} \varphi_k$. Обозначим через B кольцо $\mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}, \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(N(\mathfrak{p}))}]$. Здесь и далее используются обозначения из леммы 2.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{p}$ *однородный простой идеал кольца* A, $r = m + 1 - h(\mathfrak{p}) \geqslant 1$, $\mathfrak{p} \cap \mathbf{C}[z] = (0)$, $x_0 \notin \mathfrak{p}$ *и* $\varkappa(a) \neq 0$. *Тогда существует гомоморфизм* $\tau\colon B[a^{-1}] \to K_\xi$ *такой, что для* $\beta_i^{(j)} = \tau(\alpha_i^{(j)})$ *векторы* $\bar{\beta}_j = (\beta_0^{(j)}, \ldots, \beta_m^{(j)})$, $j = 1, \ldots, N(\mathfrak{p})$, *будут нулями идеала* $\mathfrak{p}$ *и будут удовлетворять неравенствам*

$$1)\ \operatorname{ord}_\xi \varkappa(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} |\bar{\beta}_j|_\xi \geqslant (r-1)N(\mathfrak{p})|\bar{\varphi}|_\xi,$$

$$2)\ \operatorname{ord}_\xi \varkappa(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (\|\bar{\varphi} - \bar{\beta}_j\|_\xi + |\bar{\beta}_j|_\xi) \geqslant \operatorname{ord}_\xi \mathfrak{p}(\bar{\varphi}) + (r-1)N(\mathfrak{p})|\bar{\varphi}|_\xi.$$

При этом для каждого многочлена $H \in \mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}]$ *такого, что* $\varkappa(H) \neq 0$ *гомоморфизм* τ *можно выбрать удовлетворяющим условию*

$$\operatorname{ord}_\xi \tau(H) = \operatorname{ord}_\xi \varkappa(H).$$

Аналогичное утверждение в „арифметическом" случае было доказано в [6] (доказательство предложения 3), см. также лемму 3 из [8].

Доказательство. При $r \geqslant 2$ выберем комплексные числа $\tau_{jk}^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant r-1$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant k \leqslant m$, так, чтобы выполнялись равенства $\tau_{jk}^{(i)} + \tau_{kj}^{(i)} = 0$ и определим гомоморфизм

$$\tau\colon \mathbf{C}[z, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}] \to K_\xi \tag{7}$$

считая, что на $\mathbf{C}[z]$ гомоморфизм τ есть вложение, а на элементах u_{ij} определен равенствами

$$\tau(u_{ij}) = \sum_{k=0}^{m} \tau_{jk}^{(i)} \varphi_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant r-1,\ 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Поскольку $\varkappa(a) \neq 0$, $\varkappa(H) \neq 0$, то числа $\tau_{jk}^{(i)}$ можно выбрать так, чтобы дополнительно удовлетворялись условия

$$\operatorname{ord}_\xi \tau(a) = \operatorname{ord}_\xi \varkappa(a), \quad \operatorname{ord}_\xi \tau(H) = \operatorname{ord}_\xi \varkappa(H).$$

При $r = 1$ будем считать, что гомоморфизм (7) есть вложение кольца $\mathbf{C}[z]$ в K_ξ.

Поскольку $\tau(a) \neq 0$, то по лемме 3 из [5] гомоморфизм τ продолжается до гомоморфизма кольца B в K_ξ. Из равенства (5) следует

$$\tau(a) \cdot \prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (u_{r0} + \beta_1^{(j)} u_{r1} + \ldots + \beta_m^{(j)} u_{rm}) = \tau(F) \in K_\xi[\bar{u}_r]. \tag{8}$$

Отсюда, используя то, что многочлен F однороден по каждой группе переменных $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{r-1}$, и степень его по каждой из этих групп переменных равна $N(\mathfrak{p})$, находим первое из неравенств, утверждаемых леммой 5.

Подставляя в (8) $u_{ri} = \sum_{k=0}^{m} s_{ik}^{(r)} \varphi_k$, $i = 0, 1, \ldots, m$, получим равенство

$$\tau(a) \prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} \Big(\sum_{0 \leqslant i < k \leqslant m} s_{ik}^{(r)} (\beta_i^{(j)} \varphi_k - \beta_k^{(j)} \varphi_i) \Big) = \tau(F)|_{\bar{u}_r = S^{(r)}\bar{\varphi}},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{ord}_\xi \tau(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (\|\bar\varphi - \bar\beta_j\|_\xi + |\bar\beta_j|_\xi + |\bar\varphi|_\xi) \geqslant \operatorname{ord}_\xi \mathfrak{p}(\bar\varphi) + r N(\mathfrak{p}) |\bar\varphi|_\xi,$$

и, значит, выполняется второе неравенство леммы 5. Векторы $\bar\beta_j$ будут нулями идеала $\mathfrak{p}$ в силу утверждения 2 леммы 2.

Лемма 6. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — различные комплексные числа, $I \subset A$ однородный несмешанный идеал, $r = m+1-h(I) \geqslant 1$, $\bar\varphi_l = (\varphi_{l0}, \ldots, \varphi_{lm}) \in K_{\xi_l}^{m+1}$, $l = 1, \ldots, q$. Существуют нули $\bar\beta_l \in K_{\xi_l}^{m+1}$ идеала I такие, что*

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} I(\bar\varphi_l) \leqslant r N(I) \sum_{l=1}^{q} \|\bar\varphi_l - \bar\beta_l\|_{\xi_l} + B(I). \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{ord}_{\xi_l} I(\bar\varphi_l)$ и $\|\bar\varphi_l - \bar\beta_l\|_{\xi_l}$, $1 \leqslant l \leqslant q$, не меняются при замене $\bar\varphi_l$ на $(z-\xi_l)^\varrho \bar\varphi_l$, $\varrho \in \boldsymbol{Q}$, то не уменьшая общности, можно считать, что $|\bar\varphi_l|_{\xi_l} = 0$, $l = 1, \ldots, q$.

Предположим, что существуют идеалы, удовлетворяющие условую леммы 6, для которых ее утверждение неверно. Пусть I — один из таких идеалов, а именно тот, у которого высота $h(I)$ — наибольшая.

Если для некоторого l вектор $\bar\varphi_l$ будет нулем идеала I, то утверждение леммы выполняется с $\bar\beta_l = \bar\varphi_l$ и произвольными нулями $\bar\beta_i \in K_{\xi_i}^{m+1}$ идеала I для $i \neq l$ (в этом случае правая часть неравенства (9) обращается в $+\infty$). Поэтому ни один из векторов $\bar\varphi_l$ не является нулем идеала I.

Определим простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ и натуральные числа $k_1, \ldots, k_s$ как в формулировке предложения 2. Докажем, что все идеалы $\mathfrak{p}_i$ удовлетворяют утверждению леммы 6.

Пусть $\mathfrak{p}$ — один из идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$. Тогда $\mathfrak{p} \cap \boldsymbol{C}[z] = (0)$ и $h(\mathfrak{p}) = h(I) = m+1-r$. Так как $h(\mathfrak{p}) \leqslant m$, то существует индекс i такой, что $x_i \notin \mathfrak{p}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0 \notin \mathfrak{p}$. Для каждого l, $l = 1, \ldots, q$, обозначим $\varkappa_l$ гомоморфизм

$$\varkappa_l \colon \boldsymbol{C}[z, \bar u_1, \ldots, \bar u_{r-1}] \to K_{\xi_l}[S^{(1)}, \ldots, S^{(r-1)}],$$

определенный для вектора $\bar\varphi_l \in K_{\xi_l}^{m+1}$ так же, как и гомоморфизм $\varkappa$ перед формулировкой леммы 2.

В случае $r = 1$ имеем $a \in \boldsymbol{C}[z]$ (см. лемму 2). Из второго неравенства леммы 5, поскольку $\beta_0^{(j)} = 1$ и, значит, $|\bar\beta_j|_{\xi_l} \leqslant 0$, следует, что для каждого $l = 1, \ldots, q$ существует нуль $\bar\psi_l \in K_{\xi_l}^{m+1}$ идеала $\mathfrak{p}$ такой, что

$$\operatorname{ord}_{\xi_l} a + N(\mathfrak{p}) \|\bar\varphi_l - \bar\psi_l\|_{\xi_l} \geqslant \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar\varphi_l).$$

Суммируя эти неравенства, получаем

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar\varphi_l) \leqslant \deg_z a + N(\mathfrak{p}) \sum_{l=1}^{q} \|\bar\varphi_l - \bar\psi_l\|_{\xi_l},$$

откуда следует, что идеал $\mathfrak{p}$ удовлетворяет утверждению леммы 6.

Далее будем считать, что $r \geqslant 2$. Возможны два случая.

(а) Предположим, что

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) < \left(1 - \frac{1}{r}\right) \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar\varphi_l) + \frac{1}{r} B(\mathfrak{p}), \tag{10}$$

где многочлен $a \in \boldsymbol{C}[z, \bar u_1, \ldots, \bar u_{r-1}]$ определен в формулировке леммы 2. Из (10) следует, что $\varkappa_l(a) \neq 0$, $l = 1, \ldots, q$. Значит, к идеалу $\mathfrak{p}$ применима лемма 5 и для каждого $l = 1, \ldots, q$ существуют векторы $\bar\beta_{lj} \in K_{\xi_l}^{m+1}$, $1 \leqslant j \leqslant N(\mathfrak{p})$, удовлетворяющие утверждению леммы 5. Из второго неравенства леммы 5, учитывая, что $\beta_{l0}^{(j)} = 1$ и, значит, $|\bar\beta_{lj}|_{\xi_l} \leqslant 0$, получаем

$$\operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} \|\bar\varphi_l - \bar\beta_{lj}\|_{\xi_l} \geqslant \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar\varphi_l). \tag{11}$$

Обозначим через $\bar\psi_l$ тот из нулей $\bar\beta_{lj}$ идеала $\mathfrak{p}$, для которого выполнены неравенства

$$\|\bar\varphi_l - \bar\beta_{lj}\|_{\xi_l} \leqslant \|\bar\varphi_l - \bar\psi_l\|_{\xi_l}, \quad j = 1, \ldots, N(\mathfrak{p}).$$

Тогда с помощью (11) и (10) находим

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar\varphi_l) &\leqslant N(\mathfrak{p}) \sum_{l=1}^{q} \|\bar\varphi_l - \bar\psi_l\|_{\xi_l} + \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) \\ &\leqslant N(\mathfrak{p}) \sum_{l=1}^{q} \|\bar\varphi_l - \bar\psi_l\|_{\xi_l} + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar\varphi_l) + \frac{1}{r} B(\mathfrak{p}),\end{aligned}$$

откуда следует, что идеал $\mathfrak{p}$ и его нули $\bar\psi_l$, $l = 1, \ldots, q$, удовлетворяют неравенству леммы 6.

(б) Предположим, что

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r}\right) \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar\varphi_l) + \frac{1}{r} B(\mathfrak{p}). \tag{12}$$

Пусть J — идеал, определенный в лемме 3 для идеала $\mathfrak{p}$ и многочлена $Q = x_0$. Тогда $G = a$ и по лемме 3 имеем $N(J) = \deg_{\bar u_1} a = N(\mathfrak{p})$ и $B(J) + \deg_z w = \deg_z a \leqslant B(\mathfrak{p})$. Так как $h(J) > h(I)$, то для идеала J утверждение леммы 6 справедливо и существуют нули $\bar\psi_l \in K_{\xi_l}^{m+1}$, $1 \leqslant l \leqslant q$, идеала J, для которых

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} J(\bar\varphi_l) \leqslant (r-1) N(J) \sum_{l=1}^{q} \|\bar\varphi_l - \bar\psi_l\|_{\xi_l} + B(J).$$

По лемме 3 $\bar\psi_l$ — нуль идеала $\mathfrak{p}$. Кроме того

$$\operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) = \operatorname{ord}_{\xi_l} w + \operatorname{ord}_{\xi_l} J(\bar\varphi_l),$$

так что

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) \leqslant \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} w + (r-1)N(J) \sum_{l=1}^{q} \|\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l\|_{\xi_l} + B(J)$$

$$\leqslant \deg_z w + B(J) + (r-1)N(\mathfrak{p}) \sum_{l=1}^{q} \|\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l\|_{\xi_l}$$

$$\leqslant (r-1)N(\mathfrak{p}) \sum_{l=1}^{q} \|\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l\|_{\xi_l} + B(\mathfrak{p}).$$

Сравнивая полученное неравенство с (12), опять приходим к заключению, что идеал $\mathfrak{p}$ и его нули $\bar{\psi}_l$, $l = 1, \ldots, q$, удовлетворяют неравенству леммы 6.

Итак, доказано, что для каждого простого идеала $\mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, s$, существуют нули $\bar{\psi}_{il} \in K_{\xi_l}^{m+1}$ такие, что

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}_i(\bar{\varphi}_l) \leqslant rN(\mathfrak{p}_i) \sum_{l=1}^{q} \|\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_{il}\|_{\xi_l} + B(\mathfrak{p}_i), \quad i = 1, \ldots, s. \tag{13}$$

Все векторы $\bar{\psi}_{il}$ будут нулями идеала I. Обозначим теперь через $\bar{\beta}_l$ тот из векторов $\bar{\psi}_{il}$, для которого

$$\|\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_{il}\|_{\xi_l} \leqslant \|\bar{\varphi}_l - \bar{\beta}_l\|_{\xi_l}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

В силу предложения 2 и неравенств (13) получаем

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} I(\bar{\varphi}_l) = \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} b + \sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{s} k_i \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}_i(\bar{\varphi}_l)$$

$$\leqslant \deg_z b + \sum_{i=1}^{s} k_i \Big(B(\mathfrak{p}_i) + rN(\mathfrak{p}_i) \sum_{l=1}^{q} \|\bar{\varphi}_l - \bar{\beta}_l\|_{\xi_l}\Big)$$

$$\leqslant B(I) + rN(I) \sum_{l=1}^{q} \|\bar{\varphi}_l - \bar{\beta}_l\|_{\xi_l}.$$

Это неравенство противоречит предположению, что идеал I не удовлетворяет утверждению леммы 6. Лемма 6 доказана.

Замечание. Из леммы 6 при $q = 1$ следует, что ненулевой вектор $\bar{\varphi} \in K_\xi^{m+1}$ будет нулем идеала I тогда и только тогда, когда $\operatorname{ord}_\xi I(\bar{\varphi}) = +\infty$. В частности, если однородный многочлен Q не содержится в идеале $\mathfrak{p}$ и многочлен G определен в лемме 3, то из леммы 3 следует, что $\varkappa(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}$ будет нулем идеала $(\mathfrak{p}, Q)$. Если же вектор $\bar{\varphi}$ не является нулем идеала $\mathfrak{p}$, то $\varkappa(G) \neq 0$ и $\varkappa(a) \neq 0$.

„Арифметический" аналог леммы 6 можно найти в [8] (лемма 6), а также в [16] (лемма 2.7).

3. Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2, как и теоремы 2 из [3], проводится индукцией по размерности идеала. Индуктивное рассуждение состоит из двух шагов. Первый из них есть редукция общего случая к оценке суммы кратностей нулей для простого идеала, что аналогично соответствующему рассуждению из [3], § 2. Существенное отличие второго шага от [3] состоит в конструкции многочлена, присоединяемого к рассматриваемому простому идеалу для понижения размерности. Конструкция основывается на результатах работы [5] и проводится ниже в лемме 8. В частном случае при $m = 2$ все это изложено в [4]. Хотелось бы подчеркнуть аналогию „функционального" варианта рассуждений, излагаемого в настоящей работе (см. также [3], [4]) и „арифметического" ([6], [8]).

Обозначим буквой T дифференциальный оператор

$$T = t(z)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=0}^{m} \Big(\sum_{i=0}^{m} q_{ki} x_i\Big) \frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

действующий в кольце $\mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$, где q_{ki} — коэффициенты системы дифференциальных уравнений (4). Всюду в этом параграфе будут использоваться обозначения, введенные в формулировке теоремы 2, а также будут предполагаться выполненными все ее условия.

Лемма 7. *Существует постоянная c_0, зависящая только от системы* (4) *и функций $f_0(z), \ldots, f_m(z)$ со следующим свойством. Если $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал кольца $\mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$ и*

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} \mathfrak{p}(\bar{f}) > B(\mathfrak{p}) + c_0 N(\mathfrak{p}),$$

то не существует однородных простых идеалов $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \neq (0)$, удовлетворяющих условию $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$.

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению леммы 7, что найдется однородный простой идеал $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \neq (0)$, удовлетворяющий условию $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$. Из [2], § 4 следует, что существует однородный многочлен V, $V \neq 0$, содержащийся во всех простых идеалах $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \neq (0)$, с условием $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$, для которого величина $m \sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} V(\bar{f})$ ограничена константой c_0, зависящей только от системы (4) и функций $f_0(z), \ldots, f_m(z)$. По лемме 5, примененной с $\bar{\varphi} = \bar{f}$, существуют нули $\bar{\beta}_j \in K_{\xi_j}^{m+1}$ идеала $\mathfrak{p}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} \mathfrak{p}(\bar{f}) \leqslant rN(\mathfrak{p}) \sum_{j=1}^{q} \|\bar{f} - \bar{\beta}_j\|_{\xi_j} + B(\mathfrak{p}). \tag{14}$$

Воспользуемся теперь леммой 1 с $W = x_n^{\deg_x V}$, где индекс n определен равенством $\operatorname{ord}_{\xi_j} \beta_{jn} = |\bar\beta_j|_{\xi_j}$. Получим, вследствие равенства $V(\bar\beta_j) = 0$,

$$\operatorname{ord}_{\xi_j} V(\bar f) + |\bar\beta_j|_{\xi_j} \deg_x V \geqslant \|\bar f - \bar\beta_j\|_{\xi_j} + (|\bar f|_{\xi_j} + |\bar\beta_j|_{\xi_j}) \deg_x V. \tag{15}$$

Из (14), (15), учитывая, что $|\bar f|_{\xi_j} \geqslant 0$ находим теперь

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} \mathfrak{p}(\bar f) \leqslant r N(\mathfrak{p}) \sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} V(\bar f) + B(\mathfrak{p}).$$

Полученное неравенство противоречит условию леммы 7.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{p} \subset \boldsymbol{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$ — простой однородный идеал, $\mathfrak{p} \cap \boldsymbol{C}[z] = (0)$, $r = m+1-h(\mathfrak{p}) \geqslant 1$ и*

$$\sum_{j=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_j} \mathfrak{p}(\bar f) > B(\mathfrak{p}) + c_0 N(\mathfrak{p}).$$

Тогда существует однородный многочлен $R \in \mathfrak{p}$, для которого $Q = TR \notin \mathfrak{p}$ и

$$\begin{aligned} &\deg_x Q \leqslant 3(6m)^m N(\mathfrak{p})^{1/(m-r+1)} \\ &\deg_z Q \leqslant 3(6m)^m B(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-(m-r)/(m-r+1)} + \lambda^{3m^2+1}, \end{aligned} \tag{16}$$

а постоянная λ определена равенством $\lambda = \max((6m)^m, \gamma_4 2^{m+1})$.

Доказательство. Пусть P — однородный многочлен из идеала $\mathfrak{p}$, для которого достигает минимума выражение

$$N(\mathfrak{p}) \deg_z P + (B(\mathfrak{p})+1) \deg_x P.$$

Многочлен P, очевидно, неприводим. Для краткости обозначим $L = \deg_x P$, $M = \deg_z P$. По следствию 2 из [5], определив μ_1, ν_1, с помощью равенств

$$\nu_1 = 1 + [(6m)^m N(\mathfrak{p})^{1/(m-r+1)}], \quad \mu_1 = [(6m)^m B(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-(m-r)/(m-r+1)}],$$

находим

$$N(\mathfrak{p}) M + (B(\mathfrak{p})+1) L \leqslant 3(6m)^m (B(\mathfrak{p})+1) N(\mathfrak{p})^{1/(m-r+1)},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &L \leqslant 3(6m)^m N(\mathfrak{p})^{1/(m-r+1)}, \\ &M \leqslant 3(6m)^m (B(\mathfrak{p})+1) N(\mathfrak{p})^{-(m-r)/(m-r+1)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Обозначим для каждого $l = 0, 1, \ldots, m$ символом J_l идеал в кольце $\boldsymbol{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$, порожденный многочленами $T^i P$, $0 \leqslant i < \lambda^{3l^2}$.

Пусть k — наибольшее целое число, такое, что $J_k \subset \mathfrak{p}$ и существуют однородные многочлены $Q_0, \ldots, Q_k$, удовлетворяющие условиям:

1) $\deg_x Q_j = L, \deg_z Q_j \leqslant \lambda^{3j^2}(M+1)$,

2) идеал $\mathfrak{a}_k = (Q_0, \ldots, Q_k)$ содержится в идеале J_k,

3) все примарные компоненты $\mathfrak{a}_k$, содержащиеся в $\mathfrak{p}$, имеют высоту $k+1$, и, если $\mathfrak{u}_k$ — несмешанный идеал, равный пересечению таких компонент, то

$$N(\mathfrak{u}_k) \leqslant L^{k+1}, \quad B(\mathfrak{u}_k) \leqslant \lambda^{3k^2+1}(M+1)L^k.$$

Так как при $k = 0$ указанным условиям удовлетворяет многочлен $Q_0 = P$ (см. предложение 1 для оценки $N(\mathfrak{u}_0)$, $B(\mathfrak{u}_0)$) то $k \geqslant 0$. С другой стороны из включения $\mathfrak{u}_k \subset \mathfrak{p}$ следует, что $k+1 = h(\mathfrak{u}_k) \leqslant h(\mathfrak{p}) = m-r+1$, то есть $k \leqslant m-r$. Предположим, что $J_{k+1} \subset \mathfrak{p}$. Ниже это предположение будет приведено к противоречию.

Пусть $\mathfrak{b}$ — примарная компонента идеала $\mathfrak{u}_k$, $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ и l — показатель идеала $\mathfrak{b}$. Докажем, что

$$l \leqslant (2\varrho)^{k+1}, \quad \varrho = \lambda^{3k+2}. \tag{18}$$

При $k = 0$, поскольку многочлен P неприводим, имеем $l = 1$ и неравенство (18) справедливо. Поэтому будем считать, что $k \geqslant 1$. По предложению 2, примененному к идеалу $\mathfrak{u}_k$, имеем

$$l N(\mathfrak{q}) \leqslant N(\mathfrak{u}_k) \leqslant L^{k+1}, \quad l B(\mathfrak{q}) \leqslant B(\mathfrak{u}_k) \leqslant \lambda^{3k^2+1}(M+1)L^k.$$

Положим теперь

$$\nu = [\varrho L l^{-1/(k+1)}] + 1, \quad \mu = M.$$

Так как

$$\begin{gathered} \nu^{k+1} \geqslant \varrho^{k+1} l^{-1} L^{k+1} \geqslant \varrho^{k+1} N(\mathfrak{q}) \geqslant (6m)^m N(\mathfrak{q}), \\ (\mu+1)\nu^k \geqslant \varrho^k l^{-k/(k+1)} (M+1) L^k \geqslant \varrho^k \lambda^{-3k^2-1} B(\mathfrak{q}) \geqslant (6m)^m B(\mathfrak{q}), \end{gathered}$$

то по следствию 2 из [5], примененному к идеалу $\mathfrak{q}$, существует однородный многочлен $P_1 \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ такой, что

$$\deg_x P_1 = \nu, \quad \deg_z P_1 \leqslant M.$$

Допустим, что $l > (2\varrho)^{k+1}$, тогда

$$\nu \leqslant 2\varrho L l^{-1/(k+1)} < L$$

и получаем противоречие с определением многочлена P. Итак, выполнено неравенство (18).

Докажем теперь, что существуют индексы i, j, $0 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant (2\varrho)^{k+1}$ такие, что $T^j Q_i \notin \mathfrak{q}$. Идеал $\mathfrak{q}$ изолирован в множестве простых идеалов, ассоциированных с $\mathfrak{a}_k$. Поэтому найдется многочлен $H \notin \mathfrak{q}$, удовлетворяющий для любого $E \in \mathfrak{q}$ включению $E^l H \in \mathfrak{a}_k$. Если предположить, что индексов i, j с указанным выше свойством не существует, то, ввиду неравенства $l \leqslant (2\varrho)^{k+1}$, получаем $T^l(E^l H) \in \mathfrak{q}$. Отсюда, поскольку

$E\in\mathfrak{q}$, следует, что $(TE)^l H\in\mathfrak{q}$, и так как $\mathfrak{q}$ прост, $H\notin\mathfrak{q}$, то $TE\in\mathfrak{q}$. Следовательно $T\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}$. Полученное включение, ввиду леммы 7 противоречит условию доказываемой леммы. Итак, существование индексов i, j с требуемыми свойствами установлено.

Пусть $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ — все простые идеалы, ассоциированные с $\mathfrak{u}_k$. По доказанному для каждого v, $1\leqslant v\leqslant s$, существуют индексы i_v, j_v, $0\leqslant i_v\leqslant k$, $0\leqslant j_v\leqslant(2\varrho)^{k+1}$ такие, что $T^{j_v}Q_{i_v}\notin\mathfrak{q}_v$.

Обозначим

$$Q_{k+1}=\sum_{v=1}^{s}\eta_v T^{j_v}Q_{i_v},$$

где $\eta_v\in C$ подобраны так, чтобы $Q_{k+1}\notin\mathfrak{q}_v$, $1\leqslant v\leqslant s$.

Докажем, что многочлены $Q_0, \dots, Q_{k+1}$ удовлетворяют условиям 1)–3) с заменой k на $k+1$. Для условий 1), 2) это выполняется в силу выбора параметров ϱ и λ.

Пусть $\mathfrak{r}$ — простой идеал, ассоциированный с идеалом $\mathfrak{a}_{k+1}$ и содержащийся в $\mathfrak{p}$ (такие идеалы существуют в силу включения $\mathfrak{a}_{k+1}\subset J_{k+1}\subset\mathfrak{p}$). Поскольку $\mathfrak{r}\supset\mathfrak{a}_{k+1}$, то существует идеал $\mathfrak{q}_j\subset\mathfrak{r}$. Следовательно, $h(\mathfrak{r})\geqslant h(\mathfrak{q}_j)=k+1$. Если $h(\mathfrak{r})=k+1$, то $\mathfrak{r}=\mathfrak{q}_j$. Но это невозможно, так как $Q_{k+1}\notin\mathfrak{q}_j$ и $Q_{k+1}\in\mathfrak{r}$. Из неравенства $h(\mathfrak{r})\geqslant k+2$ ввиду [1], гл. VII, теорема 22, выводим, что $h(\mathfrak{r})=k+2$. Этим доказано, что все примарные компоненты $\mathfrak{a}_{k+1}$, содержащиеся в $\mathfrak{p}$, имеют высоту $k+2$.

Пусть $\mathfrak{a}_k=\mathfrak{u}_k\cap\mathfrak{a}'$, где $\mathfrak{a}'$ — пересечение примарных компонент $\mathfrak{a}_k$, не входящих в $\mathfrak{u}_k$. Если I — примарная компонента $\mathfrak{u}_{k+1}$, $\mathfrak{r}=\sqrt{I}$, то из включения $\mathfrak{r}\supset\mathfrak{a}'$ следовало бы $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{r}\supset\mathfrak{a}'$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{a}'\not\subset\mathfrak{r}$ и тогда из включения $\mathfrak{u}_k\cap\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}_k\subset\mathfrak{a}_{k+1}\subset I$ получаем $\mathfrak{u}_k\subset I$. Итак, $\mathfrak{u}_k\subset\mathfrak{u}_{k+1}$, а поскольку $Q_{k+1}\in\mathfrak{a}_{k+1}\subset\mathfrak{u}_{k+1}$, то

$$(\mathfrak{u}_k, Q_{k+1})\subset\mathfrak{u}_{k+1}.$$

Из этого включения, ввиду леммы 4 находим

$$N(\mathfrak{u}_{k+1})\leqslant N(\mathfrak{u}_k)\deg_{\bar{x}}Q_{k+1}\leqslant L^{k+2},$$

$$\begin{aligned}B(\mathfrak{u}_{k+1})&\leqslant B(\mathfrak{u}_k)\deg_{\bar{x}}Q_{k+1}+N(\mathfrak{u}_k)\deg_z Q_{k+1}\\&\leqslant(\lambda^{3k^2+1}+\lambda^{3(k+1)^2})(M+1)L^{k+1}\leqslant\lambda^{3(k+1)^2+1}(M+1)L^{k+1}.\end{aligned}$$

Итак, доказано, что многочлены $Q_0, \dots, Q_{k+1}$ удовлетворяют всем условиям 1)–3) с заменой k на $k+1$. Таким образом, предположение $J_{k+1}\subset\mathfrak{p}$ привело нас к противоречию с определением k.

Значит, $J_{k+1}\not\subset\mathfrak{p}$ и, ввиду неравенства $k\leqslant m-r\leqslant m-1$, заключаем, что $J_m\not\subset\mathfrak{p}$. Отсюда следует, что существует индекс i, $0\leqslant i<\lambda^{3m^2}-1$ такой, что $R=T^iP\in\mathfrak{p}$, но $Q=TR\notin\mathfrak{p}$. Оценки (16) выполняются ввиду неравенств (17). Лемма 8 доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Предположим, что существуют идеалы, удовлетворяющие условию теоремы 2, для которых ее утверждение неверно. Пусть I — один из таких идеалов, а именно тот, у которого высота $h(I)$ наибольшая, $r=m+1-h(I)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{q}\operatorname{ord}_{\xi_j}I(\bar{f})>(6m)^{2m^2r}B(I)N(I)^{r/(m-r+1)}+\gamma_3^{3m(m+r)}qN(I)^{m/(m-r+1)}. \tag{19}$$

Докажем, что существует простой однородный идеал $\mathfrak{p}\subset C[z, x_0, \dots \dots, x_m]$, $\mathfrak{p}\cap C[z]=(0)$, $h(\mathfrak{p})=m+1-r$, для которого выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{q}\operatorname{ord}_{\xi_j}\mathfrak{p}(\bar{f})>(6m)^{2m^2r}B(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{r/(m-r+1)}+\gamma_3^{3m(m+r)}qN(\mathfrak{p})^{m/(m-r+1)}. \tag{20}$$

Допустив, что такого идеала не существует, получим для идеалов $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$, определенных в предложении 2

$$\sum_{j=1}^{q}\operatorname{ord}_{\xi_j}\mathfrak{p}_l(\bar{f})\leqslant(6m)^{2m^2r}B(\mathfrak{p}_l)N(\mathfrak{p}_l)^{r/(m-r+1)}+\gamma_3^{3m(m+r)}qN(\mathfrak{p}_l)^{m/(m-r+1)},$$
$$l=1, \dots, s.$$

С помощью предложения 2, используя введенные в нем обозначения, находим

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q}\operatorname{ord}_{\xi_j}I(\bar{f})&=\sum_{j=1}^{q}\operatorname{ord}_{\xi_j}b+\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{s}k_l\operatorname{ord}_{\xi_j}\mathfrak{p}_l(\bar{f})\\&\leqslant(6m)^{2m^2r}N(I)^{r/(m-r+1)}\Big(\deg_z b+\sum_{l=1}^{s}k_lB(\mathfrak{p}_l)\Big)\\&\qquad+\gamma_3^{3m(m+r)}q\Big(\sum_{l=1}^{s}k_lN(\mathfrak{p}_l)\Big)^{m/(m-r+1)}\\&\leqslant(6m)^{2m^2r}B(I)N(I)^{r/(m-r+1)}+\gamma_3^{3m(m+r)}qN(I)^{m/(m-r+1)}.\end{aligned}$$

Но это неравенство противоречит (19). Итак, существует простой идеал $\mathfrak{p}$, удовлетворяющий (20). Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0\notin\mathfrak{p}$.

Пусть R и Q — многочлены, существование которых доказано в лемме 8, (неравенство леммы 7 обеспечивается (20)), а $G\in C[z, \bar{u}_1, \dots \dots, \bar{u}_{r-1}]$ — многочлен, определенный в лемме 3 для идеала $\mathfrak{p}$ и построенного в лемме 8 многочлена Q. Если $\varkappa_l$ — отображение, определенное перед формулировкой леммы 5 для вектора $\bar{\varphi}=\bar{f}$ и $\xi=\xi_l$, то поскольку функции $f_0(z), \dots, f_m(z)$ однородно алгебраически независимы над $C(z)$, из замечания, сделанного после доказательства леммы 6, следует, что

$\varkappa_l(a) \neq 0$, $\varkappa_l(G) \neq 0$. Для $l = 1, \ldots, q$ обозначим τ_l — гомоморфизм, определенный в лемме 5 для $\bar{\varphi} = \bar{f}$ и $\xi = \xi_l$ и, удовлетворяющий условию

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{ord}_{\xi_l} \tau_l(G) = \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(G),$$

а $\bar{\beta}_{lj} \in K_{\xi_l}^{m+1}$, $j = 1, \ldots, N(\mathfrak{p})$, — нули идеала $\mathfrak{p}$, существование которых доказано в лемме 5.

Фиксируем некоторое l, $1 \leqslant l \leqslant q$. Пусть k — индекс такой, что $|\bar{\beta}_{lj}|_{\xi_l} = \operatorname{ord}_{\xi_l} \beta_{lk}^{(j)}$. Применяя лемму 1 к многочленам $V = R$ и $W = x_k^{\deg_{\bar{x}} R}$, получим, учитывая, что $R(\bar{\beta}_{lj}) = 0$ неравенство

$$\operatorname{ord}_{\xi_l} R(\bar{f}) \geqslant \|\bar{f} - \bar{\beta}_{lj}\|_{\xi_l} + |\bar{f}|_{\xi_l} \deg_{\bar{x}} Q.$$

Отсюда, поскольку

$$Q(\bar{f}) = t(z) \frac{d}{dz} R(\bar{f}),$$

следует, что

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{ord}_{\xi_l} Q(\bar{f}) \geqslant \|\bar{f} - \bar{\beta}_{lj}\|_{\xi_l} + |\bar{f}|_{\xi_l} \deg_{\bar{x}} Q - 1.$$

В силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\text{(23)} \quad \operatorname{ord}_{\xi_l} \left(Q(\bar{f}) \beta_{li}^{(j)\deg_{\bar{x}} Q} - Q(\bar{\beta}_{lj}) f_i^{\deg_{\bar{x}} Q} \right) \geqslant \|\bar{f} - \bar{\beta}_{lj}\|_{\xi_l} + (|\bar{f}|_{\xi_l} + |\bar{\beta}_{lj}|_{\xi_l}) \deg_{\bar{x}} Q,$$

где индекс i выбран так, что $\operatorname{ord}_{\xi_l} f_i = |\bar{f}|_{\xi_l}$. Из неравенств (22), (23) получаем

$$\text{(24)} \qquad \operatorname{ord}_{\xi_l} Q(\bar{\beta}_{lj}) \geqslant \|\bar{f} - \bar{\beta}_{lj}\|_{\xi_l} + |\bar{\beta}_{lj}|_{\xi_l} \deg_{\bar{x}} Q - 1.$$

Так как по (6)

$$\tau_l(G) = \tau_l(a)^{\deg_{\bar{x}} Q} \prod_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} Q(1, \beta_{l1}^{(j)}, \ldots, \beta_{lm}^{(j)}),$$

то, используя (21), (24) и неравенства, доказанные в лемме 5, находим

$$\text{(25)} \quad \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(G)$$
$$= \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \tau_l(G) = \deg_{\bar{x}} Q \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \tau_l(a) + \sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} \operatorname{ord}_{\xi_l} Q(\bar{\beta}_{lj})$$
$$\geqslant \deg_{\bar{x}} Q \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) + \sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} (\|\bar{f} - \bar{\beta}_{lj}\|_{\xi_l} + |\bar{\beta}_{lj}|_{\xi_l} \deg_{\bar{x}} Q - 1)$$
$$\geqslant (\deg_{\bar{x}} Q - 1) \sum_{l=1}^{q} \left(\operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(a) + \sum_{j=1}^{N(\mathfrak{p})} |\bar{\beta}_{lj}|_{\xi_l} \right) - qN(\mathfrak{p}) + \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar{f}) +$$
$$+ (r-1) N(\mathfrak{p}) \sum_{l=1}^{q} |\bar{f}|_{\xi_l}$$
$$\geqslant \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar{f}) + (r-1) N(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} Q \sum_{l=1}^{q} |\bar{f}|_{\xi_l} - qN(\mathfrak{p}).$$

Допустим, что $r = 1$. Тогда $G \in \mathbf{C}[z]$ и из неравенства (25), леммы 3 и (16) получаем

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar{f}) \leqslant \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} G + qN(\mathfrak{p}) \leqslant \deg_z G + qN(\mathfrak{p})$$
$$\leqslant 6(6m)^m B(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{1/m} + (\gamma_3^{3m^2+1} + q) N(\mathfrak{p}).$$

Но это неравенство противоречит (20). Значит, $r \geqslant 2$.

Пусть J — однородный несмешанный идеал кольца $\mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$, определенный в лемме 3. Из этой леммы следует, что

$$N(J) \leqslant \deg_{\bar{u}_1} G \leqslant N(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} Q \leqslant 3(6m)^m N(\mathfrak{p})^{(m-r+2)/(m-r+1)},$$
$$B(J) + \deg_z w \leqslant \deg_z G \leqslant 6(6m)^m B(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{1/(m-r+1)} + \gamma_3^{3m^2+1} N(\mathfrak{p})$$

и

$$\operatorname{ord}_{\xi_l} J(\bar{f}) = \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(G) - (r-1) |\bar{f}|_{\xi_l} N(J) - \operatorname{ord}_{\xi_l} w.$$

Так как $h(J) = m - r + 2 > h(I)$, то идеал J удовлетворяет утверждению теоремы 2, то есть

$$\text{(26)} \quad \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} J(\bar{f}) \leqslant (6m)^{2m^2(r-1)} B(J) N(J)^{(r-1)/(m-r+2)} +$$
$$+ \gamma_3^{3m(m+r-1)} q N(J)^{m/(m-r+2)}.$$

С помощью неравенств леммы 3, (25), (26) получаем

$$\sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \mathfrak{p}(\bar{f}) \leqslant \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} \varkappa_l(G) - (r-1) N(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} Q \sum_{l=1}^{q} |\bar{f}|_{\xi_l} + qN(\mathfrak{p})$$
$$\leqslant \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} w + \sum_{l=1}^{q} \operatorname{ord}_{\xi_l} J(\bar{f}) + qN(\mathfrak{p})$$
$$\leqslant \deg_z w + (6m)^{2m^2(r-1)} B(J) N(J)^{(r-1)/(m-r+2)} +$$
$$+ \gamma_3^{3m(m+r-1)} q N(J)^{m/(m-r+2)} + qN(\mathfrak{p})$$
$$\leqslant (6m)^{2m^2 r} B(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{r/(m-r+1)} + \gamma_3^{3m(m+r)} q N(\mathfrak{p})^{m/(m-r+1)}.$$

Но это неравенство противоречит (20). Полученное противоречие означает справедливость теоремы 2.

Литература

[1] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, т. II, М., ИЛ, 1963.

[2] Ю. В. Нестеренко, *Об алгебраической зависимости компонент решений системы линейных дифференциальных уравнений*, Изв. АН СССР, сер. матем., (38) (1974), 495–512.

[3] — *Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел*, ibid. 41 (2) (1977), 253–284.

[4] Ю. В. Нестеренко, *Оценки порядков нулей функций некоторого класса.* Матем. заметки 33 (2) (1983), 195–205.
[5] — *Оценки характеристической функции простого идеала*, Матем. сборник 123 (165) (1) (1984), 11–34.
[6] — *Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел*, ibid. 123 (165) (4) (1984), 435–459.
[7] — *О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции в алгебраических точках*, Успехи матем. наук, 40 (4) (1985), 221–222.
[8] — *О мере алгебраической независимости значений некоторых функций*, Матем. сборник, 128 (170) (4) (1985), 545–568.
[9] Нгуен Тьен Тай, *Об оценках порядков нулей многочленов от аналитических функций и их приложении к оценкам мер взаимной трансцендентности значений E-функций*, ibid. 120 (162) (1) (1983), 112–142.
[10] W. L. Chow, B. L. Van der Waerden, *Zur algebraischen Geometrie, IX*, Math. Ann. 113 (1937), 692–704.
[11] K. Hentzelt, *Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten*, ibid. 88 (1923), 53–79.
[12] W. Krull, *Parameterspezialisierung in Polynomringen II*, Arch. Math. 1 (2) (1984), 129–137.
[13] E. Noether, *Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie*, Math. Ann. 90 (1923), 229–261.
[14] D. Bertrand, F. Beukers, *Equations différentielles linéaires et majorations de multiplicités*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4 sér., 18 (1985), 181–192.
[15] W. D. Brownawell, *Effectivity in independence measures for values of E-functions*, J. Austral. Math. Soc., ser. A, 39 (1985), 227–240.
[16] P. Philippon, *Critères d'indépendence algébrique*, Publ. Math. IHES 64 (1986).

Поступило 29.9.1986
и в исправленной форме 21.1.1987 (1675)

ACTA ARITHMETICA
LIII (1989)

Reducibility of lacunary polynomials, X

by

A. Schinzel (Warszawa)

In memory of V. G. Sprindžuk

1. Introduction. The main aim of this paper is to study the reducibility over the rational field Q of polynomials $F(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_k})$, where $k \geqslant 3$ and $F \in Z[x_1, \ldots, x_k]$ is a non-reciprocal polynomial. For $k = 3$ we shall establish a special case of the conjecture formulated in [8] and give a necessary and sufficient condition for reducibility over Q, apart from cyclotomic factors, of every non-reciprocal $F(x^{n_1}, x^{n_2}, x^{n_3})$. For $k > 3$ we estimate the number of integer vectors $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ satisfying $h(\boldsymbol{n}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |n_i| \leqslant N$, for which the said conjecture fails. This estimate leads to an analogue of Hilbert's irreducibility theorem. The starting point is the following theorem, which seems of independent interest.

Theorem 1. *Let K be any field, $P, Q \in K[x_1, \ldots, x_k]$, $(P, Q) = 1$ and either* $\operatorname{char} K > 0$ *or* $\operatorname{char} K = 0$, $k \leqslant 3$. *There exists a number $c_1(P, Q)$ with the following property. If $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2, \ldots, n_k] \in Z^k$, $\xi \neq 0$ is in the algebraic closure of K and*

$$P(\xi^{n_1}, \xi^{n_2}, \ldots, \xi^{n_k}) = Q(\xi^{n_1}, \xi^{n_2}, \ldots, \xi^{n_k}) = 0 \tag{1}$$

then either $\xi^q = 1$ for a suitable integer $q > 0$ or there is a vector $\gamma \in Z^k$ such that

$$0 < h(\gamma) \leqslant c_1(P, Q)$$

and

$$\gamma \boldsymbol{n} = 0.$$

For $K = Q$, k arbitrary, the special case $(P, Q) = 1$ of Lemma 9 in [9] asserts under the same assumption (1) that either ξ is conjugate over Q to ξ^{-1} or $\boldsymbol{\beta n} = 0$ with $\boldsymbol{\beta} \in Z^k$,

$$0 < h(\boldsymbol{\beta}) < c_1^*(P, Q), \tag{2}$$

where $c_1^*(P, Q)$ is explicitly given in terms of the degree and of the coefficients of P, Q supposed integral.