VLADIMIRO FILIO GENNADII SPRINDŽUK

in memoriam

ACTA ARITHMETICA
LIII (1989)

Биография и научное творчество В. Г. Спринджука

А. А. Карацуба (Москва), Э. И. Ковалевская (Минск),
Й. П. Кубилюс (Вильнюс)

26 июля 1987 года на 52-м году жизни после тяжелой продолжительной болезни скончался известный советский математик, заведующий лабораторией теории чисел Института математики АН БССР, академик АН БССР, доктор физико-математических наук, профессор Владимир Геннадиевич Спринджук.

В. Г. Спринджук родился 22 июля 1936 года в семье служащих. В 1959 году закончил Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина, а в 1962 году — аспирантуру при Вильнюсском университете. Его научным руководителем был академик АН Литовской ССР Й. П. Кубилюс. Большое внимание на молодого математика, по его воспоминаниям, оказали также академик Ю. В. Линник и творчество известного теоретико-числовика К. Малера.

В аспирантуре и в первые годы работы в Институте математики В. Г. Спринджук основное внимание уделял метрической теории диофантовых приближений. В своей кандидатской диссертации, защищенной в 1963 году, он впервые систематизировал, а затем углубил и обобщил различные методы этой теории, центральной гипотезой которой была проблема Малера, связанная с классификацией действительных и комплексных чисел.

Проблема Малера состояла в том, чтобы доказать следующее: неравенство

$$|P(x)| < H^{-w}$$

имеет лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $\deg P(x) \leqslant n$, H — высота $P(x)$, для почти всех действительных x, если $w > n$, и для почти всех комплексных x, если $w > n/2$. Основную трудность в ее решении доставляли неприводимые полиномы, имеющие достаточно малую производную в корне. В. Г. Спринджук разделил многочлены на два класса в зависимости от взаимного расположения окрестностей корней у пар полиномов из одного класса. Затем проблема Малера была решена для каждого класса принципиально различными методами. Стоит отметить интересный момент. Дело в том, что, возможно, один из классов пуст, и В. Г. Спринджук говорил, что не знает, так ли это, а если так, то какой класс пуст.

Изобретенный В. Г. Спринджуком новый метод, называемый теперь методом существенных и несущественных областей, позволил ему не только решить проблему Малера, но и доказать гипотезы Вирзинга для почти всех чисел, Каша и Фолькмана, а также доказать аналоги проблемы Малера в поле p-адических чисел и поле формальных степенных рядов. Перечисленные результаты составили докторскую диссертацию, которую В. Г. Спринджук защитил в 1965 году.

Решение проблемы Малера принесло В. Г. Спринджуку международную известность. Правда, иногда он с юмором отмечал, что из-за решения этой проблемы „не видны" другие его результаты, получение которых он ставил выше.

В метрической теории чисел В. Г. Спринджук неоднократно применял метод тригонометрических сумм и теорию сохраняющих меру преобразований. С помощью метода тригонометрических сумм он установил, что почти все точки гладких многообразий большой размерности допускают покоординатно наихудшую из возможных аппроксимацию рациональными числами. Другими словами, такие гладкие многообразия экстремальны [66]. Приведем одну из его теорем ([66], с. 78).

Пусть m, n целые числа, $1 \leqslant n < m$, Ω — область в $\boldsymbol{R}^m$, $f_j = f_j(t_1, \ldots, t_m) = f_j(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — действительные функции, определенные в Ω и удовлетворяющие условиям:

(а) *частные производные* $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial t_i \partial t_k}$ *непрерывны в* Ω $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i, k \leqslant m)$;

(б) *определитель (якобиан)*

$$\det\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial t_1\, \partial t_k}\right)_{j,k=1,2,\ldots,n}$$

отличен от нуля почти везде в Ω;

(в) *любая целочисленная линейная комбинация*

$$\varphi(t_k) = c_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_1\, \partial t_k} + \ldots + c_n \frac{\partial^2 f_n}{\partial t_1\, \partial t_k},$$

рассматриваемая как функция от одной переменной t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ при фиксированных остальных переменных, такова, что любой интервал, где она определена, можно разбить на ограниченное, не зависящее от $c_1, \ldots, c_n$ число подынтервалов, на которых $\varphi(t_k)$ монотонна.

Тогда многообразие $\Gamma = (t_1, \ldots, t_m, f_1, \ldots, f_n) \in \boldsymbol{R}^{m+n}$ экстремально, т.е. неравенство

$$\| a_1 t_1 + \ldots + a_m t_m + a_{m+1} f_1(\bar{t}) + \ldots + a_{m+n} f_n(\bar{t}) \| < a^{-(m+n)-\varepsilon},$$

где $\|\alpha\|$ — расстояние от действительного α до ближайшего целого, $a = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m+n} (|a_i|)$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое действительное число, имеет бесконечно много целых решений $(a_1, \ldots, a_{m+n})$ только для $\bar{t}$ из множества меры Лебега нуль.

Применение сохраняющих меру преобразований позволило Владимиру Геннадиевичу доказать ряд метрических теорем большой общности, благодаря чему они находят применение в анализе, теории уравнений математической физики. Приведем две его теоремы.

Теорема ([66], с. 43). *Пусть I_q, $q = 1, 2, \ldots$ — произвольная последовательность интервалов внутри интервала $[0, 1)$, $f(q) = |I_q|$ — мера Лебега I_q, m, $n \geqslant 2$ натуральные числа, Ω_{mn} — пространство $m \times n$ матриц ω, компоненты которых ω_{ij} удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \omega_{ij} < 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. В пространстве Ω_{mn} введем меру Лебега μ_{mn}, взаимно однозначно отображая Ω_{mn} на mn мерный единичный куб. Тогда система условий*

$$\omega_{i1} a_1 + \ldots + \omega_{in} a_n \in I_q (\mathrm{mod}\ 1), \quad 1 \leqslant i < m, \tag{1}$$

для почти всех $\omega \in \Omega_{mn}$ удовлетворяется бесконечно часто примитивными целочисленными векторами $(a_1, \ldots, a_n)$, если в случае $n = 2$ расходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q) f^m(q),$$

где $\varphi(q)$ — функция Эйлера, а в случае $n > 2$ расходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{n-1} f^m(q).$$

Сходимость этих рядов влечет существование лишь конечного числа целочисленных примитивных векторов $(a_1, \ldots, a_k)$, удовлетворяющих (1).

Теорема ([66], с.50). *Пусть S бесконечный набор целочисленных векторов $\bar{a} \in \boldsymbol{R}^n$, $\bar{a} \neq (0)$, и пусть каждому $\bar{a} \in S$ поставлено в соответствие множество $A(\bar{a}) \in \boldsymbol{A}_{1m}$, где $\boldsymbol{A}_{1m}$ — класс μ_{mn} измеримых множеств над Ω_{mn} и Ω_{mn} определено в предыдущей теореме. Пусть $N(\omega, h)$ — число тех векторов $\bar{a} \in S$ высоты $h(\bar{a}) \leqslant h$, для которых выполняются*

$$(\bar{a}\omega_1, \ldots, \bar{a}\omega_m) \in A(\bar{a}) (\mathrm{mod}\ 1), \quad \bar{a} \in S,$$

при данном $\omega \in \Omega_{mn}$. Если ряд

$$\sum_{\bar{a} \in S} |A(\bar{a})|,$$

где $|A(\bar{a})|$ — мера $A(\bar{a})$, расходится, то для почти всех $\omega \in \Omega_{mn}$

$$N(\omega, h) = \Phi(h) + O(\Phi^{1/2}(h) \ln^{(3/2+\varepsilon)} \Phi(h)),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно,

$$\Phi(h) = \sum_{\bar{a} \in S, h(\bar{a}) \leqslant h} |A(\bar{a})|.$$

Исследования Владимира Геннадиевича в метрической теории чисел отражены в двух монографиях „Проблема Малера в метрической теории чисел" (1967 г.), „Метрическая теория диофантовых приближений" (1977 г.). Обе они переведены на английский язык ([23], [66]).

С середины шестидесятых годов В. Г. Спринджук начал заниматься вопросами теории трансцендентных чисел и теории диофантовых уравнений.

В области трансцендентных чисел он исследовал арифметическую природу гипергеометрических функций Зигеля с алгебраическими параметрами и ввел новый класс E^*-функций, более широкий, чем класс E-функций Зигеля. В частности, он показал, что функция

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}$$

с квадратичным иррациональным параметром λ не является E- функцией, а принадлежит классу E^*-функций [27]. Им было установлено, что функция из класса E^* удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению первого порядка с полиномиальными коэффициентами, лишь в конечном числе алгебраических точек ограниченной степени принимает алгебраические значения ограниченной степени.

Результаты В. Г. Спринджука в области диофантовых уравнений основаны на открытой им связи между значениями линейных форм от логарифмов в различных метриках: если линейная форма от p-адических логарифмов „не мала" в p-адической метрике, то она не может быть малой по абсолютной величине, и не мало ее значение в любой другой метрике [19], [24], [35]. Количественный анализ этого метода позволил Владимиру Геннадиевичу получить ряд эффективных результатов о представлении чисел бинарными формами, скорости возрастания наибольшего простого делителя бинарной формы, рациональных приближениях к алгебраическим числам. Именно для целочисленных решений x, y уравнения Туэ

(2) $$f(x, y) = A,$$

$f(x, y)$ — целочисленная неприводимая бинарная форма степени $n \geqslant 3$, $A \neq 0$ целое, он получил оценку

(3) $$\max(|x|, |y|) < c_1 (|A| H_f)^{c_2},$$

где H_f максимум модулей коэффициентов формы f, c_1 и c_2 явно выражаются через n и регулятор поля $\boldsymbol{K}$, содержащего корень формы f ([81], глава IV, § 2).

Также для целочисленных решений $x, y, z_1 \geqslant 0, \ldots, z_s \geqslant 0$ уравнения Туэ – Малера

(4) $$f(x, y) = A p_1^{z_1} \ldots p_s^{z_s}, \quad (x, y) = 1,$$

где $f(x, y)$ и A определены в уравнении Туэ, $p_1, \ldots, p_s$ фиксированные простые, он вывел оценку

$$\max(|x|, |y|, p_1^{z_1} \ldots p_s^{z_s}) < c_3 (|A| H_f \exp P^{c_4(s+1)})^{c_5},$$

где $P = \max\limits_{l}(p_l)$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$, величины H_f, c_3, c_5 имеют тот же смысл, что и в (3), c_4 явно выражается через регулятор и число классов идеалов поля $\boldsymbol{K}$ ([81], глава V, § 1).

В. Г. Спринджук детально исследовал принципиальные обобщения уравнений (2) и (4) на случай относительных полей, т.е. когда бинарная форма имеет алгебраические коэффициенты, A — целое алгебраическое, вместо простых $p_1, \ldots, p_s$ степени различных простых идеалов, а неизвестные x, y лежат в кольце целых чисел некоторого фиксированного поля алгебраических чисел [47, 63]. Эти исследования оказались полезными для эффективного анализа широких классов диофантовых уравнений, позволили получить степенное усиление и обобщение неравенства Лиувилля, а именно: рассматривать в эффективной форме приближения алгебраических чисел алгебраическими в архимедовых и неархимедовых метриках [63].

Отдельно отметим открытую В. Г. Спринджуком связь между величинами решений диофантовых уравнений и числом классов идеалов, а также параметрические конструкции полей алгебраических чисел с большим числом классов.

Анализируя (2), (4) и уравнения гиперэллиптического типа

$$f(x) = A y^m,$$

где $f(x)$ целочисленный многочлен степени $\geqslant 2$, $A \neq 0$ и $m \geqslant 2$ целые, В. Г. Спринджук один из первых заметил, что верхние границы для решений этих уравнений существенно зависят от регуляторов (а в случае (4) и от числа классов идеалов) определенных полей алгебраических чисел, связанных с уравнением. Он сконцентрировал внимание на этом явлении, связал его с общей проблемой величины чисел классов идеалов и показал, что поля алгебраических чисел с „малым" регулятором („большим" числом классов идеалов) встречаются весьма часто и в некотором смысле составляют большинство.

В. Г. Спринджук установил: чем больше числа классов идеалов полей алгебраических чисел, связанных с уравнением, тем лучше границы для решений уравнения, т.е. тем меньше наибольшее по высоте решение; и наоборот, достаточно хорошие границы для решений диофантовых уравнений определенных классов приводят к построению семейств полей алгебраических чисел с весьма большим числом классов ([53], [54], [58], [60], [65]). В работе [65] он описал параметрические конструкции таких полей, а в [53], [81], глава VIII, § 6, изложил статистическое распределение полей алгебраических чисел $\boldsymbol{K}$ с числом классов идеалов удовлетворяющим неравенству

$$h_k < |D_{\boldsymbol{K}}|^{\delta},$$

где $D_{\boldsymbol{K}}$ дискриминант $\boldsymbol{K}$, фиксированное δ в пределах $0 \leqslant \delta < 1/2$.

В конце семидесятых годов В. Г. Спринджук начал разрабатывать теорию арифметических специализаций в полиномах и полях алгебраических функций. Он построил метод исследования мультипликативной структуры специализированных многочленов по мультипликативной структуре чисел ([68], [76], [83]). Этот метод дал возможность доказать, в частности, следующий результат ([79]):

Пусть $F(x, y)$ — целочисленный абсолютно неприводимый многочлен, $\deg_y F(x, y) = n \geqslant 2$, многочлен $F(0, y)$ имеет простой корень степени $k < n$, a и b целые рациональные $(a, b) = 1$, и хотя бы для одного простого p, делящего a, p-компонента a_p (максимальная степень p в a) удовлетворяет неравенству

$$a_p > (\max(|a|, |b|))^{1 - 1/nk + \delta}, \qquad 0 < \delta < 1/nk.$$

Пусть далее,

$$F(a/b, y) = F_1(y) \dots F_r(y)$$

— разложение многочлена $F(a/b, y)$ на неприводимые множители в кольце $Q[y]$, $d_j = \deg F_j(y) (1 \leqslant j \leqslant r)$. Тогда все числа kd_j $(j = 1, 2, \dots, r)$ делятся на n, если только

$$\max(|a|, |b|) \geqslant (H_F + 1)^{c_6 \delta^{-2}},$$

где H_F — высота многочлена $F(x, y)$, величина c_6 определяется в явном виде по степени $F(x, y)$.

Развитие данного метода позволило указать эффективные варианты теоремы Гильберта о неприводимости и построить в явном виде универсальные гильбертовы множества. Наиболее ярким в этом направлении является следующее утверждение [79]:

Пусть $F(x, y)$ — целочисленный неприводимый многочлен,

$$x_m = [\exp\sqrt{\ln\ln m}] + m!\, 2^{m^2}, \qquad m > l^l.$$

Тогда $F(x_m, y)$ неприводим в кольце $Q[y]$ для всех $m \geqslant m_0(F)$, где величина $m_0(F)$ может быть определена в явном виде по коэффициентам и степени многочлена $F(x, y)$.

Особенностью этого утверждения является не столько конкретный вид чисел x_m, сколько возможность во всех случаях эффективно определить $m_0(F)$.

Хотя источником этих исследований явилась проблема эффективизации теоремы Гильберта о неприводимости, дальнейшее их развитие дало возможность В. Г. Спринджуку выйти далеко за пределы первоначальных целей. Это позволило ему проанализировать ряд глубоких задач в арифметической теории многочленов, например, представление примарных чисел многочленами [86].

Результаты в области диофантовых уравнений и арифметических специализаций вошли в монографию В. Г. Спринджука „Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных" (1982 г.) [81].

В 1969 году Владимир Геннадиевич был избран членом-корреспондентом АН БССР, а в 1986 году — академиком АН БССР.

Оригинальные идеи и методы В. Г. Спринджука оказали и оказывают значительное влияние на творчество других математиков. Достаточно привести название нескольких статей, написанных известными математиками: A. Baker, *On a theorem of Sprindžuk*, (1) R. C. Baker, *A theorem of Sprindžuk and Hausdorff dimension*, (2) M. Fried, *On the Sprindžuk–Weissauer approach to universal Hilbert subsets.* (3)

Его результаты нашли применение в теории дифференциальных уравнений, задачах математической физики, в теории кодирования, задачах факторизации чисел и многочленов.

Владимир Геннадиевич неоднократно участвовал в работе международных математических конгрессов: в *Ницце*, где по приглашению оргкомитета сделал доклад „Новые применения аналитического и p-адического методов в теории диофантовых приближений", [36], и в Ванкувере.

Много сил и внимания отдавал В. Г. Спринджук подготовке научной смены. В течение ряда лет он читал лекции в Белорусском государственном университете им. В. И. Ленина, подготовил семь кандидатов наук, один из его учеников стал доктором наук.

В. Г. Спринджук был членом редколлегии журнала „Известия АН БССР", серия физико-математических наук, и одним из редакторов международного журнала по теории чисел „Acta Arithmetica".

Интеллигентность, высокий профессионализм и добросовестное отношение к работе, скромность и доброжелательность снискали Владимиру Геннадиевичу любовь и уважение в коллективе Института

(1) Proc. Royal Soc. London, Ser. A, 292 (1966), 92–104.
(2) Mathematika 23 (1976), 184–197.
(3) Israel J. Math. 51 (1985), 347–363.

математики АН БССР, среди коллег-математиков, с которыми пересекались его научные интересы, среди людей, хотя бы краткое время его знавших.

Светлая память о Владимире Геннадиевиче навсегда останется в сердцах всех, кто его знал.

ACTA ARITHMETICA
LIII (1989)

Список научных работ В. Г. Спринджука

1. *О некоторых общих вопросах приближения чисел алгебраическими числами*, Лит. мат. сб., 1962, т. 2, № 1, 129–145.
2. *О теоремах А. Я. Хинчина, Й. П. Кубилюса*, Лит. мат. сб., 1962, т. 2, № 1, 147–152.
3. *Вопросы приближения p-адических чисел*, Лит. мат. сб., 1962, т. 2, № 1, 234.
4. *Об алгебраических приближениях в поле степенных рядов*, Вестн. ЛГУ, сер. мат., мех. астр., 1963, т. 18, № 3, 130–134.
5. *О числе решений диофантова уравнения* $x^3 = y^2 + A$, Докл. АН БССР, 1963, т. 7, № 1, 9–11.
6. *К теореме Дилворта о частично упорядоченных множествах*, Докл. АН БССР, 1963, т. 7, № 12, 803–804.
7. *О мере множества S-чисел в p-адическом поле*, Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 1, 1292.
8. *Метрические теоремы об алгебраических приближениях в поле степенных рядов*, Лит. мат. сб., 1963, т. 2, № 2, 207–213.
9. *Об одной классификации трансцендентных чисел*, Лит. мат. сб., 1963, т. 2, № 2, 215–219.
10. *К гипотезе К. Малера о мере множества S-чисел*, Лит. мат. сб., 1963, т. 2, № 2, 221–226.
11. *Метрические теоремы о диофантовых приближениях и приближения алгебраическими элементами ограниченной степени*, Ленинград, 1963, 8с. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.
12. *О гипотезе Малера*, Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4, 783–786.
13. *Еще о гипотезе Малера*, Докл. АН ССР, 1964, т. 155, № 1, 54–56.
14. *Доказательство гипотезы Малера о мере множества комплексных S-чисел*, Успехи мат. наук, 1964, т. 19, № 2, 191–194.
15. *Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 1965, т. 29, № 2, 379–436.
16. *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Ленинград, 1965, 19 с. Автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук.
17. *Асимптотическое поведение интегралов от квазипериодических функций*, Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 6, 862–868.
18. *Метрическая теорема о наименьших значениях целочисленных полиномов от многих переменных*, Докл. АН БССР, 1967, т. 11, № 1, 5–6.
19. *К теореме Бейкера о линейных формах с логарифмами*, Докл. АН БССР, 1967, т. 11, № 9, 767–769.
20. *К метрической теории линейных диофантовых приближений*, Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 1, 43–45.
21. *Конечность числа рациональных и алгебраических точек на некоторых трансцендентных кривых*, Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3, 524–527.
22. *Асимптотика числа решений некоторых диофантовых неравенств*, Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 4, 770–772.
23. *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Минск, Наука и техника, 1967, 182 с. Английский перевод: *Mahler's problem in metric number theory*, Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 25, 1969, 192 pp.