ACTA ARITHMETICA
LII (1989)

Über Verallgemeinerungen der Turán–Kubilius Ungleichung

von

KARL-HEINZ INDLEKOFER (Paderborn)

1. Einleitung. Es sei $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{C}$ eine additive arithmetische Funktion. Eine der wichtigsten (und bekanntesten) Ungleichungen bei der Untersuchung zahlentheoretischer Funktionen ist die Turán–Kubilius Ungleichung

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - A(x)|^2 \leqslant c\, B^2(x) \quad (x \geqslant 2), \tag{1}$$

wobei

$$A(x) := \sum_{p^m \leqslant x} \frac{f(p^m)}{p^m}, \quad B^2(x) := \sum_{p^m \leqslant x} \frac{|f(p^m)|^2}{p^m} \tag{2}$$

für alle $x \geqslant 2$ ist [1]. Eine Ungleichung obiger Art wurde zuerst von Turán [9], [10], in der allgemeinen Form von Kubilius [7] bewiesen. Es würde zu weit führen, Anwendungen der Turán–Kubilius Ungleichung aufzulisten, wir verweisen stattdessen auf Elliott [2].

In einer kürzlich erschienenen Arbeit verallgemeinerte Ruzsa [8] die Ungleichung (1) zu

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \Phi\big(|f(n) - A(x)|\big) \leqslant c' \left\{ \Phi\big(B(x)\big) + \sum_{p^m \leqslant x} \frac{\Phi\big(|f(p^m)|\big)}{p^m} \right\} \tag{3}$$

wobei Φ die Bedingung

$$\Phi(2x) \leqslant c\, \Phi(x) \tag{4}$$

erfüllt. Für seinen Beweis benötigte er ein Resultat von Burkholder [1] über eine entsprechende Ungleichung für Summen unabhängiger Zufallsvariablen.

In dieser Arbeit soll ein kurzer und direkter Beweis des Resultats von Ruzsa gegeben werden (Satz 1). Darüberhinaus wollen wir eine entsprechende Ungleichung für schneller wachsende Funktionen Φ beweisen. Man sieht leicht, dass eine Funktion Φ, die der Bedingung (4) genügt, höchstens polynomiales Wachstum hat. In Satz 2 setzen wir voraus, dass

---

[1] Diese Ungleichung entspricht der Gleichung von Bienaymé aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.

(5) $$\Phi(x+y) \ll \Phi(x)\Phi(y)$$

für alle $x, y \geqslant 1$ gilt. Dies bedeutet insbesondere, dass Φ exponentiell wachsen kann.

Beiden Resultaten (Sätze 1, 2) ist gemeinsam, dass (bei gegebenem Φ) die Abschätzungen nur von $B(x)$ und $\sum_{p^m \leqslant x} \Phi(|f(p^m)|)\, p^{-m}$ abhängen. Ist (5) nicht erfüllt, lässt sich eine additive Funktion f mit $B(x) \ll 1$, $\sum_{p^m \leqslant x} \Phi(|f(p^m)|)\, p^{-m} \ll 1$ angeben, für die $\limsup_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \Phi(|f(n) - A(x)|) = \infty$ ist (Satz 3). In diesem Sinne ist die Voraussetzung (5) und damit Satz 2 bestmöglich.

Zum Beweis der Resultate verwenden wir hauptsächlich Ideen aus [4] und [5].

2. Resultate. Es bezeichne Φ: $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ stets eine monoton wachsende Funktion mit $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$ und c stets eine (geeignete) positive Konstante. Dann zeigen wir:

Satz 1. *Sei f: $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ additiv und*

(6) $$\Phi(x+y) \leqslant \tfrac{1}{2}c\big(\Phi(x)+\Phi(y)\big) \quad \textit{für } x, y \geqslant 0.$$

Dann gilt für alle $x \geqslant 2$

(7) $$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \Phi(|f(n) - A(x)|) \ll \Phi(B(x)) + \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f(p^m)| \geqslant B(x)}} \frac{\Phi(|f(p^m)|)}{p^m},$$

wobei die Konstante in $\ll$ nur von c abhängt.

Satz 2. *Sei f: $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ additiv und*

(8) $$\Phi(x+y) \leqslant c\,\Phi(x)\Phi(y) \quad \textit{für } x, y \geqslant 1.$$

Dann gilt für alle $x \geqslant 2$

(9) $$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \Phi(|f(n) - A(x)|)$$
$$\ll \exp\Bigg(c'\Bigg(B^2(x) + \sum_{\substack{p^m \leqslant x \\ |f(p^m)| \geqslant 1}} \frac{\Phi(|f(p^m)|)}{p^m}\Bigg)\Bigg) \max_{y<x} \Phi\Bigg(\Bigg|\sum_{\substack{y \leqslant p^m \leqslant x \\ |f(p^m)| \leqslant 1}} \frac{f(p^m)}{p^m}\Bigg|\Bigg),$$

wobei die Konstante in $\ll$ und c' nur von c abhängen.

Satz 3. *Es sei $x^2 \ll \Phi(x)$ für $x \geqslant 1$ und*

(10) $$\sup_{x,y \geqslant 1} \frac{\Phi(x+y)}{\Phi(x)\Phi(y)} = \infty.$$

Dann existiert eine additive Funktion f mit der Eigenschaft, dass

(11) $$\sum_{p^m} \frac{|f(p^m)|^2}{p^m} < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{p^m} \frac{\Phi(|f(p^m)|)}{p^m} < \infty$$

und

(12) $$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \Phi(|f(n) - A(x)|) = \infty$$

ist.

3. Beweis der Sätze. Wir verwenden

Lemma 1. *Sei Φ wie in Satz 1 und $\lambda \geqslant 0$. Dann ist $c \geqslant 1$, und es gilt*

$$\Phi(\lambda x) \leqslant c^{\lambda+1}\Phi(x)$$

für alle $x \geqslant 0$.

Lemma 2. *Sei g: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ multiplikativ und $g(p^m) \leqslant c$ für alle Primzahlpotenzen p^m. Dann gilt*

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) \ll x \exp\Bigg(\sum_{p \leqslant x} \frac{g(p)-1}{p}\Bigg).$$

Hierbei hängt die Konstante in $\ll$ nur von c ab.

Die erste Aussage von Lemma 1 ($c \geqslant 1$) gilt wegen der trivialen Ungleichung

$$\Phi(x+y) \geqslant \tfrac{1}{2}\big(\Phi(x)+\Phi(y)\big).$$

Der Rest des Beweises von Lemma 1 ist offensichtlich, während sich Lemma 2 mit bekannten Methoden leicht nachvollziehen lässt (vgl. z.B. [4], Lemma 2).

Beweis von Satz 1. Es sei

$$\mathcal{P}_1 := \{p^m\colon |f(p^m)| \leqslant B(x)\}, \qquad \mathcal{P}_2 := \{p^m\colon m \geqslant 1\} \setminus \mathcal{P}_1.$$

Wir definierten zwei additive Funktionen f_1 und f_2 durch

$$f_i(p^m) = \begin{cases} f(p^m) & \text{falls } p^m \in \mathcal{P}_i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und setzen

$$B := B(x), \qquad A := A(x),$$
$$A_i := A_i(x) = \sum_{p^m \leqslant x} f_i(p^m)/p^m \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Dann folgt mit (6)

$$\sum_{n\leqslant x}\Phi(|f(n)-A|)\ll\sum_{n\leqslant x}\Phi(|f_1(n)-A_1|)+\sum_{n\leqslant x}\Phi(|f_2(n)-A_2|)$$

$$:=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

Wegen Lemma 1 folgern wir

(13) $$\Sigma_1=\sum_{n\leqslant x}\Phi\left(\frac{|f_1(n)-A_1|}{B}\cdot B\right)\ll\Phi(B)\sum_{n\leqslant x}c^{|f_1(n)-A_1|/B}.$$

Wir verwenden die trivialen Ungleichungen $|z|\leqslant 2\max(|\mathrm{Re}\,z|,|\mathrm{Im}\,z|)$ $(z\in\boldsymbol{C})$ und $e^{|x|}<e^x+e^{-x}$ $(x\in\boldsymbol{R})$ und erhalten für die letzte Summe in (13) mit $c_1=c^2$

(14) $$\sum_{n\leqslant x}c^{|f_1(n)-A_1|/B}\leqslant\sum_{n\leqslant x}\{c_1^{(\mathrm{Re}\,f_1(n)-\mathrm{Re}\,A_1)/B}$$
$$+c_1^{(-\mathrm{Re}\,f_1(n)+\mathrm{Re}\,A_1)/B}+c_1^{(\mathrm{Im}\,f_1(n)-\mathrm{Im}\,A_1)/B}+c_1^{(-\mathrm{Im}\,f_1(n)+\mathrm{Im}\,A_1)/B}\}.$$

Alle vier Summen auf der rechten Seite in (14) lassen sich durch Lemma 2 abschätzen. Beachten wir $|e^x-1-x|<2x^2$ (für $0\leqslant x\leqslant 1$), so folgt

$$\Sigma_1\ll x\Phi(B).$$

Zur Abschätzung von Σ_2 stellen wir zunächst die Ungleichung

$$\sum_{\substack{p^m\leqslant x\\|f(p^m)|>B(x)}}p^{-m}\leqslant\sum_{p^m\leqslant x}\frac{|f(p^m)|^2}{B^2(x)}p^{-m}\leqslant 1$$

fest. Dann verwenden wir die Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung

$$|A_2|\leqslant\left(\sum_{p^m\leqslant x}\frac{|f_2(p^m)|^2}{p^m}\right)^{1/2}\Bigg(\sum_{\substack{p^m\leqslant x\\|f(p^m)|>B(x)}}p^{-m}\Bigg)^{1/2}\leqslant B(x)$$

und erhalten

$$\Sigma_2\ll\sum_{n\leqslant x}\Phi(|f_2(n)|)+xB(x):=\Sigma_2'+xB(x).$$

Wir definieren eine additive Funktion ω_2 durch

$$\omega_2(p^m)=\begin{cases}1, & p^m\in\mathscr{P}_2,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

und schätzen wie in Indlekofer [5] ab:

$$\sum_{n\leqslant x}\Phi(|f_2(n)|)=\sum_{n\leqslant x}\Phi(|\sum_{p^m\|n}f_2(p^m)|)$$
$$\leqslant\sum_{n\leqslant x}c^{\omega_2(n)}\sum_{p^m\|n}\Phi(|f_2(p^m)|)$$
$$\ll x\sum_{\substack{p^m\leqslant x\\|f(p^m)|>B(x)}}\frac{\Phi(|f(p^m)|)}{p^m},$$

wobei wir in der letzten Ungleichung Lemma 2 auf die multiplikative Funktion $c^{\omega_2(\cdot)}$ angewandt haben. Dies beendet den Beweis von Satz 1.

Beweis von Satz 2. Wir setzen ähnlich wie im Beweis von Satz 1

$$\mathscr{P}_1:=\{p^m:|f(p^m)|\leqslant 1\},\quad \mathscr{P}_2:=\{p^m:|f(p^m)|>1\}$$

und

$$A:=A(x),\quad B:=B(x),$$

$$A_i:=A_i(x)=\sum_{\substack{p^m<x\\p^m\in\mathscr{P}_i}}\frac{|f(p^m)|}{p^m}\qquad (i=1,2)$$
$$B_i^2:=B_i^2(x)=\sum_{\substack{p^m\leqslant x\\p^m\in\mathscr{P}_i}}\frac{|f(p^m)|^2}{p^m}.$$

Jedes $n\in\boldsymbol{N}$ zerlegen wir (eindeutig) in ein Produkt $n=n_1n_2$ teilerfremder Zahlen $(n_1,n_2)=1$, wobei aus $p^m\|n_i$ stets $p^m\in\mathscr{P}_i$ $(i=1,2)$ folgt. Dies führt wegen

$$\Phi(x+y)\ll\Phi(x)\Phi(y)+\Phi(x)+\Phi(y)+c_1=\Phi(x)(\Phi(y)+1)+\Phi(y)+c_1$$

für $x,y\geqslant 0$ zu

(15) $$\Sigma:=\sum_{n\leqslant x}\Phi(|f(n)-A|)$$
$$\ll\sum_{n_2\leqslant x}\Phi(|f(n_2)-A_2|)\sum_{n_1\leqslant x/n_2}\{\Phi(|f(n_1)-A_1|)+1\}$$
$$+\sum_{n_2\leqslant x}\sum_{n_1\leqslant x/n_2}\Phi(|f(n_1)-A_1|)+c_1x:=\Sigma_1+\Sigma_2+c_1x.$$

Für die innere Summe in Σ_1 bzw. Σ_2 folgt entsprechend wie in (14) mit Lemma 2

$$\sum_{n_1\leqslant x/n_2}\Phi(|f(n_1)-A_1|)\ll\Phi(|A_1-A_1(x/n_2)|)\sum_{n_1\leqslant x/n_2}c^{|f(n_1)-A_1(x/n_2)|}$$
$$\ll(x/n_2)\exp(c'B_1^2)\,\Phi(|A_1-A_1(x/n_2)|),$$

d.h.

$$\Sigma \ll x \exp(c' B_1^2) \sum_{n_2 \leq x} \frac{\Phi(|f(n_2) - A_2|)}{n_2} \Phi(|A_1 - A_1(x/n_2)|) + x \sum_{n_2 \leq x} \frac{1}{n_2} + x$$

$$\ll x \exp(c' B_1^2) \Phi(|A_2|) \max_{y<x} \Phi(|A_1 - A_1(y)|) \sum_{n_2 \leq x} \frac{\Phi(|f(n_2)|)}{n_2} + x.$$

Wegen $|A_2| \leq B_2^2$ und der Definition von Φ erhalten wir die Behauptung des Satzes 2.

Beweis von Satz 3. Wir verwenden das Beispiel aus Indlekofer–Kátai [6]. Der Vollständigkeit halber geben wir die Konstruktion noch einmal an. Nach Voraussetzung (10) existieren Folgen $x_\nu \nearrow \infty$, $y_\nu \nearrow \infty$ (für $\nu \to \infty$) mit

$$\Phi(x_\nu + y_\nu) > \nu^3 \Phi(x_\nu) \Phi(y_\nu). \tag{16}$$

Weiter existieren Primzahlen $p_\nu \neq p'_\nu$, so dass

$$\frac{1}{2\nu \log^2 \nu} < \frac{\Phi(x_\nu)}{p_\nu} < \frac{1}{\nu \log^2 \nu},$$

$$\frac{1}{2\nu \log^2 \nu} < \frac{\Phi(y_\nu)}{p'_\nu} < \frac{1}{\nu \log^2 \nu}.$$

O.B.d.A. sind alle Primzahlen p_ν, p'_ν, $\nu \geq 1$, paarweise verschieden. Wir setzen $\mathscr{P}^* = \{p_\nu, p'_\nu \colon \nu \geq 1\}$ und definieren eine additive Funktion f durch

$$f(p^m) = \begin{cases} x_\nu & m = 1 \text{ und } p = p_\nu, \\ y_\nu & m = 1 \text{ und } p = p'_\nu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ähnlich wie oben zerlegen wir jedes $n \in N$ in ein teilerfremdes Produkt $n = n_1 n_2$, so dass n_2 quadratfrei ist und nur Primteiler $p \in \mathscr{P}^*$ besitzt, während n_1 die Eigenschaft hat: $p^m \| n_1$ impliziert $m \geq 2$ oder $m = 1$ und $p \notin \mathscr{P}^*$. Offenbar ist

$$A(x) \ll B^2(x) \ll \sum_{p_\nu \leq x} \frac{\Phi(x_\nu)}{p_\nu} + \sum_{p'_\nu \leq x} \frac{\Phi(y_\nu)}{p'_\nu} \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \log^2 \nu} < \infty$$

und somit

$$\sum_{n \leq x} \Phi(|f(n) - A(x)|) = \sum_{n_2 \leq x} \Phi(|f(n_2) - A(x)|) \sum_{n_1 \leq x/n_2} 1$$

$$\asymp x \sum_{n_2 \leq x} \frac{\Phi(|f(n_2) - A(x)|)}{n_2}$$

$$\asymp x \sum_{n_2 \leq x} \frac{\Phi(|f(n_2)|)}{n_2}.$$

Die mittlere Ungleichung gilt nach bekannten Siebresultaten, die letzte ist offensichtlich. Verwenden wir (16), so folgt

$$\sum_{n \leq x} \Phi(|f(n) - A(x)|) \gg x \sum_{\substack{p_\nu p'_\nu \leq x \\ p_l \neq p'_\nu}} \nu^3 \frac{1}{\nu^2 \log^4 \nu},$$

und Satz 3 ist bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] D. L. Burkholder, *Distribution function inequality for martingales*, Ann. Probab. 1 (1973), 19–42.

[2] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory I*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1979.

[3] K.-H. Indlekofer, *A mean-value theorem for multiplicative functions*, Math. Z. 172 (1980), 255–271.

[4] – *Cesàro means of additive functions*, Analysis 6 (1986), 1–24.

[5] – *Über verallgemeinerte Momente additiver Funktionen*, Preprint 1986.

[6] K.-H. Indlekofer and I. Kátai, *Generalized moments of additive functions*, Preprint 1986.

[7] J. Kubilius, *Probabilistic methods in the theory of numbers*, Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs 11 (1964).

[8] I. Z. Ruzsa, *Generalized Moments of Additive Functions*, J. Number Theory 18 (1984), 27–33.

[9] P. Turán, *On a theorem of Hardy and Ramanujan*, J. London Math. Soc. 9 (1934), 274–276.

[10] – *Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan*, ibid. 11 (1936), 125–133.

FACHBEREICH MATHEMATIK-INFORMATIC DER UNIVERSITÄT-GH
Warburger Str. 100
D-4790 Paderborn

Eingegangen am 23.1.1987
und in revidierter Form am 2.9.1987 (1701)