ACTA ARITHMETICA
LII (1989)

Sur la moyenne des exposants dans la décomposition en facteurs premiers

par

MICHEL BALAZARD (Limoges)

I. Introduction.

1. Si l'entier n, $n \geqslant 2$, s'écrit $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_i des entiers > 0, la moyenne des exposants dans la décomposition de n en facteurs premiers est

$$f(n) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)/k;$$

$\omega(n)$ et $\Omega(n)$ désignant le nombre de facteurs premiers de n, comptés respectivement sans et avec multiplicité, cette moyenne s'écrit

$$f(n) = \Omega(n)/\omega(n).$$

J.M. De Koninck et A. Ivić ont étudié l'ordre moyen de $f(n)$ et obtenu la relation suivante, valable pour $x \geqslant 3$:

$$(1)\qquad \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} f(n) = x\left(a_1 + b_1 L_1(x) + \frac{a_2 + b_2 L_2(x)}{\log x} + \ldots + \frac{a_N + b_N L_N(x)}{(\log x)^{N-1}} + O_N\left(\frac{1}{(\log x)^N}\right)\right)$$

pour tout entier $N \geqslant 1$, où $a_1 = 1$, $a_2, \ldots, a_N$, $b_1, b_2, \ldots, b_N$ sont des constantes calculables et $L_1(x), \ldots, L_N(x)$ des fonctions à oscillation lente asymptotiques à $1/\log\log x$ et admettant des développements asymptotiques suivant les puissances de $1/\log\log x$ (cf. [2], chapitre 5, corollaire 5.6).

En particulier l'ordre moyen de f est 1. Compte tenu de (1) et de l'inégalité $f \geqslant 1$, on a aussi:

$$(2)\qquad N(x, \alpha) := \operatorname{card}\{n \in \mathbf{N} \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n) \geqslant \alpha\} \ll x/((\alpha - 1)\log\log x)$$

pour tout $x \geqslant 3$ et tout $\alpha > 1$.

Dans cet article nous donnons de la fonction de répartition $N(x, \alpha)$ un développement asymptotique quand α est fixé et x tend vers $+\infty$, et une majoration uniforme pour $x \geqslant 3$ et $\alpha > 1$, meilleure que la relation (2) dès que $\alpha - 1 \gg \log\log\log x/\log\log x$.

2. Afin d'énoncer nos résultats, indiquons quelques notations.

Si α est rationnel et s'écrit $\alpha = p/q$ $(p, q \in \mathbf{N}^*, (p, q) = 1, p > q)$ nous posons

$$g(\alpha) = 1/(2q(1-2^{-1/q})).$$

Si α est irrationnel nous posons

$$g(\alpha) = 1/(2\log 2) = \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta \in \mathbf{Q}}} g(\beta).$$

Pour tout $\alpha > 1$ nous posons

$$h(\alpha) = g(\alpha) \frac{2^{1-\alpha}}{2^{2^{1-\alpha}} \Gamma(2^{1-\alpha})} \prod \left(1-\frac{1}{l}\right)^{2^{1-\alpha}} \left(1+\frac{2^{1-\alpha}}{l-2}\right)$$

où le produit porte sur les nombres premiers $\geqslant 3$.

Nous utiliserons les notations $[\ ]$, $\{\ \}$, $\lceil\ \rceil$, $\|\ \|$ pour désigner respectivement la partie entière, la partie fractionnaire, le plafond ($\lceil y \rceil = \inf_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \geqslant y}} n = -[-y]$) et la distance à $\mathbf{Z}$.

Pour tout irrationnel λ et tout $t \geqslant 1$, soit $D_\lambda(t)$ la discrépance à l'ordre t de la suite $\{n\lambda\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Ainsi:

$$D_\lambda(t) = \sup_{0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1} \left| \frac{1}{t} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant t \\ \alpha \leqslant \{n\lambda\} < \beta}} 1 - (\beta - \alpha) \right|.$$

Nous posons également

$$D_\lambda^*(t) = D_\lambda(t) + \frac{1}{t^2} \int_1^t \theta D_\lambda(\theta)\, d\theta.$$

Notons que

$$D_\lambda^*(t) \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

Si λ est de type fini $\eta \geqslant 1$, on a

$$D_\lambda^*(t) = O_{\lambda,\varepsilon}(t^{-1/\eta+\varepsilon}) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

(cf. [4], théorème 3.2); si, de plus, il existe une constante positive minorant $n^\eta \|n\lambda\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$D_\lambda^*(t) = O_\lambda(t^{-1/\eta}), \quad \text{pourvu que } \eta > 1 \text{ (cf. [3], p. 103).}$$

Remarquons également que, pour $t \geqslant 1$,

$$D_\lambda^*(t) \geqslant D_\lambda(t) \geqslant 1/t$$

et que

$$D_\lambda(t) = D_{-\lambda}(t), \quad D_\lambda^*(t) = D_{-\lambda}^*(t).$$

3. Nous obtenons les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Soient* α_1 *et* $\alpha_2 \in]1, +\infty[$. *On a:*

$$N(x, \alpha) = h(\alpha)\, x (\log x)^{2^{1-\alpha}-1} \left(1 + O_{\alpha_1,\alpha_2}\left(D_\alpha^*\left(\sqrt{2^{1-\alpha} \log\log x}\right)\right)\right)$$

uniformément pour $x \geqslant 3$ *et* α *irrationnel* $\in [\alpha_1, \alpha_2]$.

COROLLAIRE. *Si* α *est irrationnel de type* $\tau \geqslant 1$, *le terme d'erreur du théorème* 1 *est*

$$O_{\alpha,\varepsilon}\left((\log\log x)^{-1/2\tau+\varepsilon}\right) \quad \textit{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Si $\tau > 1$ *et si* $n^\tau \|n\alpha\|$ *est minorée par une constante positive pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, *on peut prendre* $\varepsilon = 0$.

THÉORÈME 2. *Soit* $\alpha_2 \in]1, +\infty[$. *On a:*

$$N(x, \alpha) = h(\alpha)\, x (\log x)^{2^{1-\alpha}-1} \Big(1 + O\left((q-1)(\log x)^{-2^{1-\alpha} 2\sin^2 \pi/q}\right) + O_{\alpha_2}\left((\log\log x)^{3/2} (\log x)^{3^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}\right)\Big)$$

uniformément pour $x \geqslant 3$ *et* α *rationnel* $\in]1, \alpha_2]$, q *désignant le dénominateur de* α *écrit sous forme irréductible.*

THÉORÈME 3. *On a*

$$N(x, \alpha) \ll \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) x (\log x)^{2^{1-\alpha}-1} \quad \textit{pour tout } x \geqslant 3 \textit{ et tout } \alpha > 1.$$

Faisons ici quelques remarques. La fonction $h(\alpha)$ est continue aux points irrationnels, et discontinue aux points rationnels, où elle vérifie

$$h(\alpha) > \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta \neq \alpha}} h(\beta).$$

Si $\alpha = p/q$ $(p, q \in \mathbf{N}^*, (p, q) = 1, p > q)$ on peut s'interesser à

$$N'(x, \alpha) = \operatorname{card}\{n \in \mathbf{N} \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n) = \alpha\}.$$

Une démonstration semblable à celle du théorème 2 permet de voir que $N'(x, \alpha)$ fournit une contribution non négligeable à $N(x, \alpha)$:

$$N'(x, \alpha) \sim (1 - 2^{-1/q})\, N(x, \alpha), \quad \text{quand } x \text{ tend vers l'infini.}$$

Pour la quantité

$$N(x, \alpha) - N'(x, \alpha) = \operatorname{card}\{n \in \mathbf{N} \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n) > \alpha\},$$

on obtient des résultats similaires aux théorèmes 1 et 2 mais la fonction $h_1(\alpha)$ remplaçant $h(\alpha)$ vérifie cette fois:

$$h_1(\alpha) < \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta \neq \alpha}} h_1(\beta) \quad \text{en tout } \alpha \text{ rationnel.}$$

Dans le même ordre d'idées, nous posons la question suivante: $\alpha > 1$ étant un irrationnel fixé, la quantité card $\{n \in N \mid 2 \leqslant n \leqslant x, f(n)$ est une réduite $> \alpha$ dans le développement de α en fraction continue$\}$ fournit-elle une contribution non négligeable à $N(x, \alpha)$?

Cette question apparaît de façon naturelle dans notre démonstration (voir n° 4).

Il est interessant de donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha = \alpha(x)$ pour que $N(x, \alpha) = o(x)$ quand x tend vers l'infini. La relation (2) montre qu'il suffit que $(\alpha - 1) \log\log x$ tende vers l'infini avec x. C'est aussi nécessaire, comme le montre la minoration suivante, dûe à G. Tenenbaum (lettre du 11 juin 1986):

$$(2') \qquad 1 + N(x, \alpha) \gg x/(\log x)^{(\alpha - 1)\log 2}, \quad \text{valable pour } x \geqslant 3 \text{ et } \alpha > 1.$$

Pour démontrer (2′) on observe que les entiers n tels que: $n \leqslant x$, $n = 2^k m$ où m est pair sans facteur carré et vérifie $\omega(m) \leqslant \log\log x$, sont comptés dans $N(x, \alpha)$ si $k = \lceil (\alpha - 1) \log\log x \rceil$. En effet:

$$\Omega(n) = k + \omega(m) \quad \text{et} \quad \omega(n) = \omega(m) \quad \text{donc } f(n) \geqslant 1 + \frac{k}{\log\log x} \geqslant \alpha.$$

Ainsi

$$N(x, \alpha) \geqslant \sum_{\substack{m \leqslant x/2^k \\ \omega(m) \leqslant \log\log x}} \varkappa(m) \geqslant \sum_{\substack{m \leqslant x/2^k \\ \omega(m) \leqslant \log\log(x/2^k)}} \varkappa(m),$$

où $\varkappa$ est la fonction caractéristique des entiers pairs sans facteur carré. Le théorème d'Erdős–Kac pour ces entiers donne alors

$$N(x, \alpha) \gg x/2^k \gg x/(\log x)^{(\alpha - 1)\log 2} \quad \text{si } x/2^k \geqslant 16, \quad \text{d'où } (2').$$

Notons que pour $\alpha = 1 + c/\log\log x$, où c est une constante positive, (2) et (2′) donnent l'encadrement: $x/2^c \ll N(x, \alpha) \ll x/c$, qu'il serait interessant de préciser.

On peut d'autre part montrer que les exposants de $\log x$ intervenant dans les termes restes du théorème 2 sont les meilleurs possibles. En particulier, si $\alpha > 1$ est un entier fixé, on a un développement asymptotique pour $x \geqslant 3$, k entier $\geqslant 1$:

$$N(x, \alpha) = \frac{x}{\log x} \Big(\sum_{j=1}^{k} h_j(\alpha) (\log x)^{l_j^{1-\alpha}} + O_{k,\alpha}\big((\log x)^{l_{k+1}^{1-\alpha}}\big) \Big)$$

où $h_1(\alpha) = h(\alpha)$, les $h_j(\alpha)$ étant des réels positifs, et $2 = l_1 < l_2 < \ldots$ la suite des nombres premiers.

Au paragraphe II nous donnons la démonstration des théorèmes 1, 2, 3. Ce faisant, nous rencontrerons un problème lié au procédé de sommation de Borel (rappelons qu'une suite (a_n) de nombres complexes converge vers $a \in \mathbf{C}$

au sens de Borel si

$$e^{-X} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{X^n}{n!}$$

tend vers a quand X tend vers l'infini). La résolution de ce problème est l'objet du lemme suivant, démontré dans le paragraphe III:

LEMME. *Soit* u: $[0, 1] \to [0, 1]$ *lipschitzienne de rapport* 1; β *et* y *deux réels.*

(i) *Si* β *est irrationnel, on a uniformément pour* $X \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u(\{k\beta + y\}) \frac{X^k}{k!} = e^X \Big(\int_0^1 u(t)\, dt + O\big(D^*(\sqrt{X})\big)\Big).$$

(ii) *Si* β *est rationnel* ($\beta = p/q$ *où* $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$ *et* $(p, q) = 1$) *et si* y *appartient à* $1/q\mathbf{Z}$ ($y = a/q$, $a \in \mathbf{Z}$) *on a uniformément pour* $X \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u(\{k\beta + y\}) \frac{X^k}{k!} = e^X \left(\frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) + O\big((q-1)\, e^{-2X \sin^2 \pi/q}\big) \right).$$

La question de l'estimation de $N(x, \alpha)$ a été posée par A. Ivić. La réponse que nous donnons dans cet article a été obtenue indépendamment par G. Tenenbaum (cf. [9]). Il utilise une méthode différente de la nôtre et obtient dans certains cas des résultats meilleurs (par exemple quand α est un irrationnel quadratique).

Je tiens à remercier ici les mathématiciens qui m'ont aidé à préparer cet article: J. M. De Koninck, A. Ivić, J. L. Nicolas, C. Pomerance et G. Tenenbaum.

II. Démonstration des théorèmes.

4. A une unité près $N(x, \alpha)$ est égal à $\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \Omega(n) \geqslant \alpha\omega(n)}} 1$. On se ramène ainsi à un problème concernant la distribution conjointe de Ω et ω: dire que $\Omega(n) \geqslant \alpha\omega(n)$, c'est dire que $(\Omega(n), \omega(n))$ appartient à $E_\alpha := \{(h, k) \in N^2 \mid h \geqslant \alpha k\}$. Graphiquement, E_α est la partie du réseau des points à coordonnées entières $\geqslant 0$ située au dessus de la droite passant par (0, 0) et de pente α. Quand cette pente est irrationnelle, les sommets de l'enveloppe convexe de $E_\alpha \setminus \{(0, 0)\}$ sont les couples (h, k) tels que h/k soit une réduite $> \alpha$ dans le développement de α en fraction continue (cf. [1], p. 111).

L'outil naturel est la formule de Cauchy:

$$(3) \qquad 1 + N(x, \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2}} \sum_{n \leqslant x} z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)} \sum_{\substack{(h,k) \in N^2 \\ h \geqslant \alpha k}} z_1^{-h-1} z_2^{-k-1}\, dz_1\, dz_2.$$

Ici et dans toute la suite, les cercles sont parcourus dans le sens positif.

Posons

$$M(z_1, z_2) = \sum_{\substack{(h,k)\in N^2 \\ h \geq \alpha k}} z_1^{-h-1} z_2^{-k-1}.$$

Pour que (3) soit vraie il suffit que la série $M(r_1, r_2)$ soit convergente.

Or

$$M(r_1, r_2) = \sum_{k \geq 0} r_2^{-k-1} \frac{r_1^{-\lceil \alpha k \rceil - 1}}{1 - 1/r_1} \quad \text{si } r_1 > 1.$$

On a donc

$$M(r_1, r_2) \leqslant \frac{1}{r_2(r_1 - 1)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(r_2 r_1^{\alpha})^k} < +\infty \quad \text{si } r_2 r_1^{\alpha} > 1.$$

Ainsi $M(z_1, z_2)$ est holomorphe pour $|z_1| > 1$ et $|z_2||z_1|^{\alpha} > 1$ et (3) est valable si $r_1 > 1$ et $r_2 r_1^{\alpha} > 1$.

5. Nous allons maintenant évaluer

$$\sum_{n \leqslant x} z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)}$$

grâce au théorème suivant dû à Atle Selberg (voir [6], théorème 2 et [7], p. 79):

Soit E un ensemble et $\varphi\colon E \to C$ une application. Soit

$$F(s, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_z(n)/n^s$$

une série de Dirichlet convergente pour $\operatorname{Re} s > 1$, $z \in E$.

On pose

$$G(s, z) = \zeta(s)^{-\varphi(z)} F(s, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_z(n)/n^s$$

et l'on suppose l'existence de deux constantes positives B et H telles que l'on ait pour $z \in E$ et $|\varphi(z)| \leqslant B$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_z(n)|}{n} \log^{B+2}(3n) \leqslant H.$$

Alors on a, uniformément pour $z \in E$, $|\varphi(z)| \leqslant B$ et $x \geqslant 2$

$$\sum_{n \leqslant x} a_z(n) = \frac{G(1, z)}{\Gamma(\varphi(z))} x (\log x)^{\varphi(z)-1} + O_B\left(Hx(\log x)^{\varphi(z)-2}\right).$$

Ici nous prenons $E = \{(z_1, z_2) \in C^2 \mid |z_1| \leqslant 2(1-\eta)\}$ où $\eta \in]0, 1/3[$, $\varphi\colon E \to C$ définie par

$$\varphi(z_1, z_2) = z_1 z_2 \quad \text{et} \quad a_{z_1, z_2}(n) = z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)}.$$

Si $(z_1, z_2) \in E$ et $\operatorname{Re} s > 1$ le produit infini suivant (portant sur les nombres premiers) converge:

$$\prod_l \left\{1 + \left|\frac{z_1 z_2}{l^s}\right| + \left|\frac{z_1^2 z_2}{l^{2s}}\right| + \ldots\right\} = \prod_l \left\{1 + \frac{z_1 z_2}{|l^s| - |z_1|}\right\}.$$

D'après le théorème du produit eulerien, la série

$$F(s, z_1, z_2) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)}}{n^s}$$

converge absolument pour $(z_1, z_2) \in E$, $\operatorname{Re} s > 1$.

Pour([1]) $(z_1, z_2) \in E$, b_{z_1, z_2} est alors la fonction multiplicative dont les valeurs sur les puissances de nombres premiers sont définies par l'identité

$$1 + \sum_{\nu=1}^{+\infty} b_{z_1, z_2}(l^{\nu}) \xi^{\nu} = (1-\xi)^{z_1 z_2} \left(1 + \frac{\xi z_1 z_2}{1 - \xi z_1}\right). \tag{4}$$

Comme le membre de droite de (4) est une fonction analytique de ξ pour $|\xi| < 1/2(1-\eta)$ on obtient par la formule de Cauchy

$$|b_{z_1, z_2}(2^{\nu})| \ll_B \eta^{-1}(2-\eta)^{\nu}, \qquad |b_{z_1, z_2}(l^{\nu})| \ll_B (5/2)^{\nu} \quad (l \geqslant 3).$$

De plus, (4) implique que $b_{z_1, z_2}(l) = 0$ pour tout premier l. La série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{z_1, z_2}(n)| n^{-s}$ est donc absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 1 - \eta/4 \log 2$ et est $\ll_B \eta^{-2}$ dans ce demi plan.

Dans la suite nous utiliserons seulement $B = 2$. La formule de Cauchy à l'ordre 4 appliquée à $s \to \sum_{n=1}^{+\infty} |b_{z_1, z_2}(n)| n^{-s}$ donne la majoration:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{z_1, z_2}(n)| (\log 3n)^4 n^{-1} \ll \eta^{-6} \quad \text{pour tout } (z_1, z_2) \in E.$$

Le théorème de Selberg donne donc:

(5) pour $x \geqslant 3$, $|z_1| < 2$, $z_2 \in C$,

$$\sum_{n \leqslant x} z_1^{\Omega(n)} z_2^{\omega(n)} = F(z_1, z_2) x (\log x)^{z_1 z_2 - 1} + Q(x, z_1, z_2)$$

où

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{\Gamma(z_1 z_2)} \prod_l \left(1 - \frac{1}{l}\right)^{z_1 z_2} \left(1 + \frac{z_1 z_2}{l - z_1}\right)$$

([1]) Nous devons cette présentation de la formule (5) à G. Tenenbaum (cf. [9]).

(fonction holomorphe pour $|z_1| < 2$ et $z_2 \in \mathbf{C}$) et

$$Q(x, z_1, z_2) = O(\eta^{-6} x (\log x)^{z_1 z_2 - 2})$$

uniformément pour $|z_1| \leqslant 2(1-\eta)$, $|z_1 z_2| \leqslant 2$, $x \geqslant 3$.

Observons que

$$F(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{z_1 - 2}$$

où

$$B(z_1, z_2) = \frac{2^{-z_1 z_2}}{\Gamma(z_1 z_2)} (z_1 - 2 - z_1 z_2) \prod_{l \geqslant 3} \left(1 - \frac{1}{l}\right)^{z_1 z_2} \left(1 + \frac{z_1 z_2}{l - z_1}\right)$$

est fonction holomorphe de (z_1, z_2) pour $|z_1| < 3$, $z_2 \in \mathbf{C}$.

6. Les formules (3) et (5) montrent que

$$1 + N(x, \alpha) = S_1 + S_2,$$

où

$$S_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2}} F(z_1, z_2) x (\log x)^{z_1 z_2 - 1} M(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2$$

et

$$S_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2}} Q(x, z_1, z_2) M(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2$$

avec $1 < r_1 < 2$ et $r_2 > r_1^{-\alpha}$.

Estimation de S_1: Soit $r_1' \in]2, 3[$, $r_1 \in]1, 2[$ et $r_2 > 1$. La fonction

$$z_1 \to \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - 2} \int_{|z_2| = r_2} B(z_1, z_2) (\log x)^{z_1 z_2} M(z_1, z_2) \, dz_2$$

est méromorphe pour $1 < |z_1| < 3$ avec au plus un pôle, simple, en $z_1 = 2$. Le théorème des résidus donne donc:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1' \\ |z_2| = r_2}} \frac{B(z_1, z_2)}{z_1 - 2} (\log x)^{z_1 z_2} M(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2$$
$$= \frac{\log x}{x} S_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_2| = r_2} B(2, z_2) (\log x)^{2 z_2} M(2, z_2) \, dz_2.$$

Cette dernière intégrale va fournir la contribution principale à $N(x, \alpha)$. C'est le coefficient de $1/z$ dans le développement en série de Laurent pour $|z| > 2^{-\alpha}$ de:

$$\sum_{a \geqslant 0} \beta_a z^a \cdot \sum_{b \geqslant 0} \frac{(2 \log \log x)^b}{b!} z^b \cdot \sum_{k \geqslant 0} z^{-k-1} \sum_{h \geqslant \alpha k} 2^{-h-1}$$

où la première série représente le développement en série entière sur $\mathbf{C}$ de $B(2, z)$ (remarquons ici que $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $\beta_2 = -4$, d'après l'expression de B donnée au numéro 5.). Le coefficient cherché vaut:

$$(6) \quad \sum_{a, b \geqslant 0} \beta_a \frac{(2 \log \log x)^b}{b!} \sum_{h \geqslant \alpha(a+b)} 2^{-h-1} \quad \text{(on doit avoir } k = a+b\text{)}$$
$$= \sum_{a, b \geqslant 0} \beta_a \frac{(2 \log \log x)^b}{b!} 2^{[-\alpha(a+b)]}$$
$$= \sum_{a \geqslant 0} \beta_a (2^{-\alpha})^a \sum_{b \geqslant 0} \frac{(2^{1-\alpha} \log \log x)^b}{b!} 2^{-\{-\alpha(a+b)\}}.$$

Pour le théorème 3, on remarque que cette somme est $\ll 4^{-\alpha} (\log x)^{2^{1-\alpha}}$.

Pour le théorème 2, on utilise le (ii) du lemme démontré au paragraphe III, avec $u(t) = 2^{-t}$, $\beta = -\alpha$, $y = -\alpha a \in (1/q)\mathbf{Z}$ et $X = 2^{1-\alpha} \log \log x$. On a ici

$$\frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) = \frac{1}{2q(1 - 2^{-1/q})} = g(\alpha),$$

donc

$$\sum_{b \geqslant 0} \frac{(2^{1-\alpha} \log \log x)^b}{b!} 2^{-\{-\alpha(a+b)\}} = g(\alpha) (\log x)^{2^{1-\alpha}} + O\left((q-1)(\log x)^{2^{1-\alpha} \cos 2\pi/q}\right)$$

uniformément par rapport à $a \in \mathbf{N}$. En reportant dans (6) on obtient

$$g(\alpha) B(2, 2^{-\alpha}) (\log x)^{2^{1-\alpha}} + O\left(4^{-\alpha} (q-1) (\log x)^{2^{1-\alpha} \cos 2\pi/q}\right).$$

En revenant à l'expression de F sous forme de produit infini et en remarquant que

$$|B(2, 2^{-\alpha})| \asymp 4^{-\alpha}$$

on obtient bien:

$$-h(\alpha) (\log x)^{2^{1-\alpha}} \left(1 + O\left((q-1)(\log x)^{-2^{1-\alpha} 2 \sin^2 \pi/q}\right)\right).$$

Pour le théorème 1 le calcul est similaire, en utilisant le (i) du lemme.

Majorons maintenant l'intégrale:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1| = r_1' \\ |z_2| = r_2}} \frac{B(z_1, z_2)}{z_1 - 2} (\log x)^{z_1 z_2} M(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2.$$

Sa valeur est en fait indépendante de r_1' et r_2 pourvu que $r_1' \in]2, 3[$ et $r_2 r_1'^{\alpha} > 1$. Supposons r_2 borné par une constante absolue. Vues l'expression de B (n°5) et la majoration de M (n°4), cette intégrale est majorée en module par:

$$\frac{r_2}{(3 - r_1')(r_1' - 2)[1 - (r_2 r_1'^{\alpha})^{-1}]} \iint_{-\pi \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant \pi} e^{r_1' r_2 (\log \log x) \cos(\theta_1 + \theta_2)} \, d\theta_1 \, d\theta_2,$$

à une constante absolue multiplicative près. La dernière intégrale est

$$\ll \frac{(\log x)^{r_1' r_2}}{1+\sqrt{r_2 \log\log x}},$$

par la méthode de Laplace.

Pour les théorèmes 1 et 2, choisissons

$$r_1' = 3^{1-\frac{1}{20\log\log x}} \quad \text{et} \quad r_2 = 3^{-\alpha+\frac{\alpha+1}{20\log\log x}},$$

d'où

$$r_2 r_1'^{\alpha} = 3^{\frac{1}{20\log\log x}} \quad \text{et} \quad r_2 r_1' = 3^{1-\alpha+\frac{\alpha}{20\log\log x}}.$$

L'intégrale considérée est donc $\ll_{\alpha_2} (\log\log x)^{3/2} (\log x)^{3^{1-\alpha}}$.

Cela donne le deuxième terme reste du théorème 2; pour le théorème 1 on remarque que:

$$(\log\log x)^{3/2} (\log x)^{3^{1-\alpha}} \ll_{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{2^{1-\alpha}\log\log x}} (\log x)^{2^{1-\alpha}}$$
$$\ll (\log x)^{2^{1-\alpha}} D_\alpha^* (\sqrt{2^{1-\alpha}\log\log x}).$$

Pour le théorème 3, choisissons $r_1' = 2^{1,1}$ et $r_2 = 2^{-\alpha-0,1}$, d'où $r_2 r_1'^{\alpha} = 2^{0,1(\alpha-1)}$ et $r_2 r_1' = 2^{1-\alpha}$. L'intégrale considérée est donc

$$\ll \frac{2^{-\alpha}}{\alpha-1} (\log x)^{2^{1-\alpha}}.$$

Majoration de S_2: Rappelons que

$$S_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\substack{|z_1|=r_1 \\ |z_2|=r_2}} Q(x, z_1, z_2) M(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2$$

avec $1 < r_1 < 2$ et $r_2 > r_1^{-\alpha}$.

Pour les théorèmes 1 et 2, choisissons $r_1 = 1{,}5$, $r_2 = (1+3^{1-\alpha})/1{,}5$ et $\eta = 1/4$. On a $r_1 r_2 = 1+3^{1-\alpha} \leqslant 2$ et $r_1^{\alpha} r_2 = (1{,}5)^{\alpha-1}(1+3^{1-\alpha})$ si bien que:

$$S_2 \ll x (\log x)^{r_1 r_2 - 2} \frac{r_1 r_2}{r_2 (1-(r_1^{\alpha} r_2)^{-1})} \ll \frac{x}{(\log x)^{1-3^{1-\alpha}}}$$

ce qui est absorbé par le terme reste venant de S_1 étudié précédemment.

Le même choix de r_1 et r_2 est suffisant pour achever la démonstration du théorème 3.

III. Procédé de sommation de Borel et approximation diophantienne. Soit u: $[0, 1] \to [0, 1]$, lipschitzienne de rapport 1; β et y deux réels, X un réel $\geqslant 2$. Nous posons

$$S(u, \beta, y, X) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(\{k\beta+y\}) \frac{X^k}{k!}.$$

Il est clair que $0 \leqslant S(u, \beta, y, X) \leqslant e^X$. D'autre part si l'on pose

$$A(v) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant v} u(\{k\beta+y\})$$

et si l'on suppose β irrationnel:

$$|A(v_2) - A(v_1) - (v_2 - v_1) \int_0^1 u(t)\, dt| \ll (v_2 - v_1) D_\beta (v_2 - v_1) \tag{7}$$

pour $1 \leqslant v_1 \leqslant v_2 - 1$, d'après l'inégalité de Koksma (cf. [5], théorème 5.1) et le fait que la discrépance de la suite finie $\{k\beta+y\}$; $v_1 < k \leqslant v_2$ est $\ll D_\beta(v_2 - v_1)$. Un théorème abélien de G. Tenenbaum (cf. [8], théorème 3) montre alors que

$$e^{-X} S(u, \beta, y, X) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 u(t)\, dt.$$

En d'autres termes, la suite $u(\{k\beta+y\})$ converge au sens de Borel vers $\int_0^1 u(t)\, dt$. Nous allons suivre la démonstration de G. Tenenbaum pour estimer

$$e^{-X} S(u, \beta, y, X) - \int_0^1 u(t)\, dt.$$

Commençons par choisir un réel Z positif tel que

$$e^{-X} \sum_{|k-X| \geqslant Z} X^k/k! \ll 1/\sqrt{X}.$$

On peut par exemple prendre $Z = (X \log X)^{1/2}$ comme le montre la formule:

$$\sum_{k \leqslant X + s\sqrt{X}} \frac{X^k e^{-X}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-t^2/2}\, dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right),$$

valable uniformément pour $X \geqslant 1$, s réel (cf. [5]). Nous avons:

$$e^{-X} S(u, \beta, y, X) - \int_0^1 u(t)\, dt = \int_{X-Z}^{X+Z} \varphi(X, t)\, dA^*(t) + O(1/\sqrt{X})$$

où

$$A^*(t) = A(t) - t \int_0^1 u(\theta)\, d\theta \quad \text{et} \quad \varphi(X, t) = e^{-X} X^t / \Gamma(t+1).$$

Nous posons $Z = K\sqrt{X}$ et, quitte à modifier légèrement Z, nous supposons que K est un entier. On a alors:

$$\int_{X-Z}^{X+Z} \varphi(X, t)\, dA^*(t) = \sum_{-K \leqslant j \leqslant K-1} \int_{X+j\sqrt{X}}^{X+(j+1)\sqrt{X}} \varphi(X, t)\, dA^*(t).$$

Pour tout $j = -K, \ldots, K-1$, nous intégrons par parties:

$$\int_{X+j\sqrt{X}}^{X+(j+1)\sqrt{X}} \varphi(X, t)\,dA^*(t) = \left[\varphi(X, t)\left(A^*(t) - A^*(X+j\sqrt{X})\right)\right]_{X+j\sqrt{X}}^{X+(j+1)\sqrt{X}}$$

$$- \int_{X+j\sqrt{X}}^{X+(j+1)\sqrt{X}} \left(A^*(t) - A^*(X+j\sqrt{X})\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(X, t)\,dt$$

$$\ll e^{-(j+1)^2/2} D_\beta(\sqrt{X}) + \int_1^{\sqrt{X}} t D_\beta(t) \frac{(1+|j|)\sqrt{X}}{X^{3/2}} e^{(-j^2+2|j|)/2}\,dt$$

d'après (7) et le lemme 1 de [8]. En sommant sur tous les j, on obtient le (i) du lemme.

Pour démontrer le (ii) on observe que $\{k\beta+y\}$ est une fonction périodique de k, de période q, et prend les valeurs $0, 1/q, 2/q, \ldots, (q-1)/q$. Si $k = bq+r$ où $b \in N$ et $r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, on a $\{k\beta+y\} = \{r\beta+y\}$, donc

$$S(u, \beta, y, X) = \sum_{r=0}^{q-1} u(\{r\beta+y\}) \sum_{b\geq 0} \frac{X^{bq+r}}{(bq+r)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{q-1} u(\{r\beta+y\}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho} e^{zX} \sum_{b\geq 0} z^{-bq-r-1}\,dz \quad \text{si } \varrho > 1$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho} e^{zX} \frac{P(z)}{z^q-1}\,dz$$

où

$$P(z) = \sum_{r=0}^{q-1} u(\{r\beta+y\}) z^{q-1-r}$$

(c'est un polynôme). Le théorème des résidus nous donne:

$$S(u, \beta, y, X) = \sum_{z^q=1} e^{zX} \frac{P(z)}{qz^{q-1}} = e^X \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) + \sum_{\substack{z^q=1\\ z\neq 1}} e^{zX} \frac{P(z)}{qz^{q-1}}.$$

Or si $z^q = 1$ et $z \neq 1$,

$$\left|e^{zX} \frac{P(z)}{qz^{q-1}}\right| \leq e^{X\cos 2\pi/q} \cdot \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} u\left(\frac{r}{q}\right) \leq e^{X\cos 2\pi/q}$$

d'où le résultat.

Bibliographie

[1] H. Davenport, *The higher arithmetic*, Cambridge University Press, 1968.

[2] J.M. De Koninck and A. Ivić, *Topics in arithmetical functions*, Mathematics studies 43, North-Holland, 1980.

[3] J.F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Springer-Verlag, 1936.

[4] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, 1974.

[5] K.K. Norton, *Estimates for partial sums of the exponential series*, Journ. Math. Analysis 63 (1976), 265–296.

[6] A. Selberg, *Note on a paper by L.G. Sathe*, Journ. Indian Math. Soc. 18 (1954), 83–87.

[7] G. Tenenbaum, *Cours de théorie analytique des nombres*, Université de Bordeaux, 1979.

[8] – *Sur le procédé de sommation de Borel et la répartition du nombre de facteurs premiers des entiers*, L'Ens. Math. II$^{\text{ème}}$ série, tome 26, fascicule 3–4, pp. 225–245.

[9] – *Sur la distribution conjointe des deux fonctions "nombre de facteurs premiers"*, Prépublication.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UFR DES SCIENCES DE LIMOGES
123, rue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex
France

Reçu le 30.12.1986
et dans la forme modifiée le 14.5.1987 (1695)