ACTA ARITHMETICA
LI (1988)

Critère de reconnaissabilité de fonctions analytiques et fonctions entières arithmétiques

par

ADAM BAZYLEWICZ (Warszawa)

1. Notations et définitions. $\boldsymbol{N}$ est l'ensemble des nombres naturels, $\boldsymbol{Z}$ l'ensemble des nombres entiers rationnels, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$ sont les corps des nombres rationnels, réels, complexes et algébriques respectivement.

Soit K un corps des nombres de degré $d = r+2s$ sur $\boldsymbol{Q}$, $K^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, et $\overline{K}^{(r+j)} = K^{(r+s+j)}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, sont ses plongements réels et complexes. O_K désigne l'anneau des nombres entiers de K, O_A l'anneau de tous les nombres entiers sur $\boldsymbol{Z}$ contenus dans $\boldsymbol{C}$, U_K le groupe des unités de K. Pour $1 \leqslant j \leqslant d$, $O_K^{(j)}$ désigne l'anneau des entiers de $K^{(j)}$ et $U_K^{(j)}$ est le groupe des unités de $K^{(j)}$. Si $a \in O_K^{(i)}$, les $a^{(j)} \in O_K^{(j)}$ sont les conjugués de $a = a^{(i)}$. Pour $P = \sum a_n z^n \in K[z]$ on note $P^{(j)} = \sum a_n^{(j)} z^n \in K^{(j)}[z]$. $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1) \in \boldsymbol{N}^m$. Si $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \boldsymbol{C}^m$ et $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \boldsymbol{N}^m$, $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2}$ et $z^{\boldsymbol{n}} = z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m}$. Pour un ensemble $S \subset \boldsymbol{C}$ $[S$ désigne le complémentaire $\boldsymbol{C} \setminus S$ de S.

DÉFINITION 1. On dit que la fonction $f(z) \in \boldsymbol{C}(z)$ est une *fraction reconnaissable* si et seulement si il existe des polynômes $P \in \boldsymbol{C}[z]$ et $Q_i \in \boldsymbol{C}[z_i]$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ tels que $\deg_{z_i} P < \deg Q_i$ et

$$f(z) = \frac{P(z)}{\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Q_i(z_i)}.$$

DÉFINITION 2. Pour $1 \leqslant j \leqslant m$, soit $T_j \subset \boldsymbol{C}$ un *compact convexe*. On pose $K_j(\varphi) = \max_{z \in T_j} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi})$. Soit f une fonction entière sur $\boldsymbol{C}^m$ de type exponentiel. On dit que f est de type exponentiel $(T_1, \ldots, T_m)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left|f(r_1 e^{-i\varphi_1}, \ldots, r_m e^{-i\varphi_m})\right| \leqslant C(\varepsilon) \exp\Big(\sum_{j=1}^{m} \big(\varepsilon + K_j(\varphi_j)\big) r_j\Big)$$

pour tout $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}_+^m$ et tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{R}^m$.

2. Résultats. Dans la littérature on peut trouver nombreux critères de rationalité, mais il n'y a q'un résultat de Martineau (cf. [6]) concernant la reconnaissabilité. Nous l'énoncerons dans une forme simplifiée.

THÉORÈME. *Soient $S_j \subset C$ ($1 \leqslant j \leqslant m$) des compacts convexes de diamètres transfinis $\tau(S_j) < 1$. Soit g une fonction holomorphe sur $\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant m} [S_j$ de développement $\sum_{n \in N^m} a_n z^{-1-n}$ au voisinage de $(\infty, \ldots, \infty)$ avec $a_n \in Z$ pour tout $n \in N^m$. Alors g est une fraction rationnelle de la forme*

$$\frac{P(z)}{\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Q_i(z_i)}$$

où $P \in Z[z_1, \ldots, z_m]$ et $Q_i \in Z[z_i]$ sont des polynômes unitaires pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Nous généralisons ce résultat sous la forme suivante.

THÉORÈME 1. *Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant d$ soient $S_i^{(j)} \subset C$ des compacts de diamètres transfinis τ_{ij} vérifiant $S_i^{(j)} = \bar{S}_i^{(j)}$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$, $\bar{S}_i^{(r+j)} = S_i^{(r+j+s)}$ pour $1 \leqslant j \leqslant s$ et $\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \tau_{ij} < 1$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Soit (a_n), $n \in N^m$ une suite d'éléments de O_K telle que les fonctions définies au voisinage de l'infini par $f^{(j)}(z) = \sum_{n \in N^m} a_n^{(j)} z^{-1-n}$ soient analytiques sur $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant m} [S_i^{(j)}$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$.*

Alors il existe des polynômes $P \in O_K[z]$ et $Q_i \in O_K[z_i]$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, avec Q_i unitaire et $\deg_{z_i} P < \deg Q_i$ tels que

$$f^{(j)}(z) = \frac{P^{(j)}(z)}{\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Q_i^{(j)}(z_i)}.$$

A l'aide de ce théorème nous obtenons notre résultat sur les fonctions entières sur C^m satisfaisant à $f(N^m) \subset O_K$, qui contient comme cas particuliers des résultats de Ch. Pisot [7], V. Avanissian et R. Gay [1] et F. Gramain [4].

THÉORÈME 2. *Soit $K \subset C$ un corps de nombres de degré d et O_K l'anneau de ses entiers. On pose $\delta = d/2$ si $K \not\subset R$ et $\delta = d$ si $K \subset R$. Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, soit $T_i \subset C$ un compact convexe (avec $\bar{T}_i = T_i$ si $K \subset R$) contenu dans un ouvert V_i sur lequel la fonction exponentielle est injective. Soit τ_i le diamètre transfini de $\exp T_i$, soit c une constante positive.*

Alors il existe une partie finie C de O_A^m ayant la propriété suivante:

Si f est une fonction entière de type exponentiel $(T_1, \ldots, T_m)$ telle que $f(N^m) \subset O_K$ et

$$\limsup_{|n| \to \infty} \frac{\log|f(n)|}{|n|} \leqslant c$$

et si $\log \tau_i < -c(\delta-1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, alors f est un polynôme exponentiel $f(z) = \sum_{\gamma \in C} P_\gamma(z)\gamma^z$ où $P \in K[C][z]$ et γ^z est défini par des $\log \gamma_i \in V_i$.

3. Quelques lemmes.

LEMME 3. *Pour $1 \leqslant j \leqslant d$ soit $S^{(j)} \subset C$ un compact de diamètre transfini τ_j vérifiant $\bar{S}^{(i)} = S^{(i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $\bar{S}^{(r+j)} = S^{(r+s+j)}$ pour $1 \leqslant j \leqslant s$ et soit $\lambda \in R$, avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

Si $\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \tau_j < 1$, alors il existe un polynôme $A \in O_K[z]$ unitaire (i.e. dont le coefficient du terme de plus haut degré est dans U_K) vérifiant

$$\sup_{z \in S^{(j)}} |A^{(j)}(z)| < \lambda \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant d.$$

Preuve. C'est une conséquence de lemme 5 de [2].

LEMME 4. *La fonction $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-1-n}$ est rationnelle si et seulement si pour tout $k \geqslant k_0$,*

$$A(k) = \det\{a_{i+j}: 0 \leqslant i, j \leqslant k-1\} = 0.$$

Preuve. C'est le critère de Kronecker ([5]).

LEMME 5. *Si la série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-1-n}$, où $a_n \in O_K$ pour tout $n \in \{0\} \cup N$, est rationnelle, alors elle a la représentation $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où $P \in O_K[z]$ et $Q \in O_K[z]$ est unitaire.*

Preuve. Cela résulte du fait que O_K est un anneau de Fatou (cf. théorème 3.3 de [4]).

LEMME 6. *Soit f une fonction entière de type exponentiel $(T_1, \ldots, T_m)$. On pose $H_n(f) = f(n)$ pour $n \in N^m$ et $g(z) = \sum_{n \in N^m} H_n(f) z^{-1-n}$. Alors g se prolonge en une fonction holomorphe sur $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} [\exp T_j$.*

Preuve. C'est un cas particulier de la Proposition 2.4 de [4].

LEMME 7. *Supposons que f et $(T_1, \ldots, T_m)$ vérifient les conditions du lemme 6 et supposons de plus que pour $1 \leqslant j \leqslant m$, T_j soit contenu dans un ouvert Ω_j où $\exp z$ est injective. Si pour tout $n \in N^m$, $f(n) = 0$ alors $f = 0$.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la Proposition 2.4 de [4].

4. Démonstration du critère de reconnaissabilité.

THÉORÈME 8. *Soient $S^{(j)} \subset C$ des compacts vérifiant les conditions du lemme 3. On suppose de plus que les séries*

$$f_\alpha^{(j)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\alpha}^{(j)} z^{-1-n}, \quad \text{où } a_{n,\alpha} \in O_K$$

pour tout $(n, \alpha) \in N^2$ *et* $1 \leqslant j \leqslant d$ *forment de familles normales de fonctions analytiques sur* $[S^{(j)}$ *respectivement. Alors il existe* $P_\alpha \in O_K[z]$ *et* $Q \in O_K[z]$ *unitaire tels que*

$$f_\alpha^{(j)}(z) = \frac{P_\alpha^{(j)}(z)}{Q^{(j)}(z)} \quad \textit{pour } 1 \leqslant j \leqslant d.$$

De plus le polynôme Q *ne dépend que de* K *et des* $S^{(j)}$.

Démonstration du théorème 8. Soit $\lambda \in \boldsymbol{R}$, avec $0 < \lambda < 1$. D'après le lemme 3 il existe $A \in O_K[z]$, unitaire tel que $S^{(j)} \subset U^{(j)} = \{z\colon |A^{(j)}(z)| \leqslant \lambda\}$. Notons $A(z) = \sum_{j=0}^{h} a_j z^j$ où $a_j \in O_K$ pour $1 \leqslant j \leqslant h$ et $a_h \in U_K$.

D'après la formule (3) de [3] le diamètre transfini $\tilde{\tau}_j$ de $U^{(j)}$ est égal à $\left(\frac{\lambda}{|a_h|}\right)^{1/h}$, d'où

$$\prod_{j=1}^{d} \tilde{\tau}_j = \frac{\lambda^{d/h}}{|N_{K/Q} a_h|} = \lambda^{d/h} < 1. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ suffisament petit pour que

$$\prod_{j=1}^{d} (\tilde{\tau}_j + \varepsilon) < 1. \tag{2}$$

On note C_1 le maximum des longueurs des $\partial U^{(j)}$, et

$$C_2 = \sup_{j,\alpha} \sup_{z \in \partial U^{(j)}} |f_\alpha^{(j)}(z)|.$$

C_2 est fini parce que la famille $\{f_\alpha^{(j)}(z)\}_{\alpha \in N}$ est normale dans $[S^{(j)}$. Notons $V(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde.

D'après la définition de Fekete du diamètre transfini d'un compact il existe $N_1 = N_1(\varepsilon) \in N$ tel que pour tout $k \geqslant N_1$ et tout $(x_{1j}, \ldots, x_{kj}) \in U^{(j)k}$ on a

$$|V^2(x_{1j}, \ldots, x_{kj})| \leqslant (\tilde{\tau}_j + \varepsilon)^{k(k-1)}. \tag{3}$$

Posons

$$A(k, \alpha) = \begin{vmatrix} a_{0\alpha} & \ldots & a_{k-1,\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,\alpha} & \ldots & a_{2k-2,\alpha} \end{vmatrix}.$$

Une formule de Schiffer et Siciak (cf. [9], page 357) qui résulte de la formule de Cauchy donne

$$k!\, A^{(j)}(k, \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\partial U^{(j)}} \ldots \int_{\partial U^{(j)}} V^2(z_1, \ldots, z_k) \prod_{i=1}^{k} f_\alpha^{(j)}(z_i)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_k. \tag{4}$$

De (3) et (4) on déduit

$$|N_{K/Q} A(k, \alpha)| \leqslant \left(C_1^k \cdot C_2^k \frac{1}{(2\pi)^k} \cdot \frac{1}{k!}\right)^d \prod_{j=1}^{d} (\tilde{\tau}_j + \varepsilon)^{k(k-1)}. \tag{5}$$

Comme $N_{K/Q} A(k, \alpha) \in \boldsymbol{Z}$ on a

$$A(k, \alpha) = 0 \quad \text{pour tout } k \geqslant N_2 \text{ et } \alpha \in \{0\} \cup N, \tag{6}$$

où N_2 ne dépend pas de α.

Il résulte des lemmes 4 et 5 que les $f_\alpha^{(j)}$ sont des fractions rationnelles à coefficients dans $O_K^{(j)}$. Les coefficients de leurs developpements en série étant conjugués, il existe A_α et $B_\alpha \in O_K[z]$ avec B_α unitaire, $\deg A_\alpha < \deg B_\alpha \leqslant N_2$ tels que

$$f_\alpha^{(j)}(z) = \frac{A_\alpha^{(j)}(z)}{B_\alpha^{(j)}(z)}. \tag{7}$$

Soit $S \subset \boldsymbol{C}$ une boule contenant $\bigcup_{j=1}^{d} S^{(j)}$. Les pôles de $f_\alpha^{(j)}$ sont des entiers algébriques de degré au plus dN_2 sur $\boldsymbol{Q}$ et dont tous les conjugués sont contenus dans le compact S. Ils sont donc en nombre fini et il existe $Q(z) \in O_K[z]$ unitaire, indépendant des $f_\alpha^{(j)}$ et tel que

$$f_\alpha^{(j)} = \frac{P_\alpha^{(j)}}{Q^{(j)}} \quad \text{où } P_\alpha \in O_K[z],\ Q \text{ unitaire, } \deg P_\alpha < \deg Q. \tag{8}$$

Cela achève la preuve du théorème 8.

Demonstration du théorème 1. Soit $\lambda \in \boldsymbol{R}$, avec $0 < \lambda < 1$. En applicant m fois lemme 1 on obtient pour $1 \leqslant i \leqslant m$, des polynômes unitaires $A_i \in O_K[z]$ tels que $S_i^{(j)} \subset U_i^{(j)} = \{z\colon |A_i^{(j)}(z)| \leqslant \lambda\}$. Soit $\tilde{\tau}_{ij}$ le diamètre transfini de $U_i^{(j)}$. La formule (3) de [3] donne

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \tilde{\tau}_{ij} < 1, \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{9}$$

Soit $h_i = \deg A_i$. A l'aide des polynômes A_i on construit une nouvelle base du O_K-module $O_K[z_1, \ldots, z_m]$.

D'abord soit $P_{i,l} = z^l$ pour $0 \leqslant l < h_i$, $P_{i,kh_i+l} = A_i^{(k)} z^l$ pour $k \in N$ et $0 \leqslant l < h_i$. On définit les polynômes $P_{i,n}$ en posant pour chaque i, j $(1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant d)$:

$$P_{i,n}^{(j)} = P_{1,n_1}^{(j)}(z_1) \ldots P_{i-1,n_{i-1}}^{(j)}(z_{i-1}) P_{i+1,n_{i+1}}^{(j)}(z_{i+1}) \ldots P_{m,n_m}^{(j)}(z_m). \tag{10}$$

On remarque que le coefficient du terme de plus haut degré appartient à $U_K^{(j)}$. Il existe une constante absolue $C_3 > 0$ satisfaisant à l'inégalité

$$\max_{l,j} \sup_{z \in U^{(j)}} |P_{il}^{(j)}(z)| \leqslant C_3 \quad \text{pour tout } l \in N \cup \{0\}. \tag{11}$$

En comparant (10) et (11) nous voyons que

$$(12)\qquad |P_{i,n}^{(j)}(z)| \leqslant C_4 = C_3^{m-1}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant d$ et $z \in U_1^{(j)} \times \ldots \times U_{i-1}^{(j)} \times U_{i+1}^{(j)} \times \ldots \times U_m^{(j)}$.

Fixons alors un indice i. On peut écrire $P_{i,n}$ et $f^{(j)}$ sous la forme

$$(13)\qquad P_{i,n} = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}_n} p_{i,n,\alpha} z_1^{\alpha_1} \ldots z_{i-1}^{\alpha_{i-1}} z_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots z_m^{\alpha_m}$$

où $\mathscr{A}_n$ est un ensemble fini d'indices.

$$(14)\quad f^{(j)}(z) = \sum a_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_m}(z_i) z_1^{-1-\alpha_1} \ldots z_{i-1}^{-1-\alpha_{i-1}} z_{i+1}^{-1-\alpha_{i+1}} \ldots z_m^{-1-\alpha_m}.$$

Notons

$$(15)\qquad P_{i,n}(a, z_i) = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}_n} p_{i,n,\alpha} a_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_m}(z_i).$$

La formule suivante est une conséquence du théorème des résidus:

$$(16)\qquad P_{i,n}^{(j)}(a, z_i) = \frac{1}{(2\pi i)^{m-1}} \int_{\partial U_1^{(j)}} \ldots \int_{\partial U_m^{(j)}} f^{(j)}(z) P_{i,n}^{(j)}(z)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{i-1} \wedge dz_{i+1} \wedge \ldots \wedge dz_m.$$

Soit $C_5 = \max\limits_j \sup\limits_{z \in U_i^{(j)}} |f^{(j)}(z)|$ et C_6 le maximum des longueurs des $\partial U_i^{(j)}$. $P_{i,n}^{(j)}(a, z_i)$ comme fonction de z_i est analytique sur $[S_i^{(j)}$, d'où en particulier aussi dans $[U_i^{(j)}$. Alors (16) implique que pour $z_i \in U_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant d$, $n \in N^m$, on a

$$(17)\qquad |P_{i,n}^{(j)}(a, z_i)| \leqslant C_6^{m-1} \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \cdot C_5 = C_7.$$

Ainsi les familles de fonctions $\{P_{i,n}^{(j)}(a, z_i)\}_n$ vérifient les hypothèses du théorème 8. On en déduit qu'il existe des polynômes $A_{i,n}, B_i \in O_K[z_i]$, B_i unitaire, $\deg A_{i,n} < \deg B_i$, tels que

$$(18)\qquad P_{i,n}(a, z_i) = \frac{A_{i,n}(z_i)}{B_i(z_i)}.$$

Mais on peut voir (15) et (18) comme un système d'équations linéaires en les inconnues a_α et à coefficients dans O_K. La matrice de ce système est triangulaire et les éléments de la diagonale sont dans U_K, donc

$$(19)\qquad a_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_m}(z_i) = \frac{A_{i,\alpha}(z_i)}{B_i(z_i)},$$

où $A_{i,\alpha} \in O_K[z_i]$ et $\deg A_{i,\alpha} < \deg B_i$.

En substituant (19) dans (14) on obtient

$$(20)\qquad \left(\prod_{k=1}^{m} B_k^{(j)}(z_k)\right) f^{(j)}(z) = \sum_{h=0}^{k_i} z_i^h a_h^{(j)}(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m),$$

où $k_i < \deg B_i$ et $a_h(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m)$ est une série formelle à coefficients dans O_K, pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Ainsi la série entière

$$f^{(j)}(z) \prod_{k=1}^{m} B_k^{(j)}(z_k)$$

est un polynôme en chacune des variables z_i, donc un polynôme $P^{(j)} \in O_K^j[z]$, et on a

$$(21)\qquad \left(\prod_{i=1}^{m} B_i^{(j)}(z_i)\right) f^{(j)}(z) = P^{(j)}(z).$$

Le démonstration est donc terminée.

5. Fonctions entières arithmétiques. Ce paragraphe est consacré à des applications du théorème 1.

THÉORÈME 9. *Pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant d$, soient $T_i^{(j)} \subset C$ des compacts convexes vérifiant $\overline{T}_i^{(j)} = T_i^{(j)}$ $(1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant r)$ $\overline{T}_i^{(r+j)} = T_i^{(r+s+j)}$ $(1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant s)$ et τ_{ij} le diamètre transfini de $S_i^{(j)} = \exp T_i^{(j)}$. On suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant d} \tau_{ij} < 1$ et qu'il existe p tel que $T_i^{(p)} \subset \Omega_i$, où Ω_i est un ouvert de C sur lequel la fonction exponentielle est injective. Alors il existe une partie finie C_p de O_A^m ayant la propriété suivante:*

Pour $1 \leqslant j \leqslant d$, soit $f_j\colon C^m \to C$ une fonction entière de type exponentiel $(T_1^{(j)}, \ldots, T_m^{(j)})$ telle que $f_p(N^m) \subset O_K^{(p)}$ et $f_j(n) = (f_p(n))^{(j)}$ pour tout $n \in N^m$. Alors f_p est de la forme

$$f_p(z) = \sum_{\gamma \in C_p} P_\gamma(z) \gamma^z$$

où $P_\gamma \in K^{(p)}[C_p][z]$ et γ^z est défini par des $\log \gamma_i \in \Omega_i$.

Démonstration du théorème 9. Posons

$$g^{(j)}(z) = \sum_{n \in N^m} f_j(n) z^{-1-n}.$$

Les $g^{(j)}$ et $S_i^{(j)}$ satisfont a toutes les conditions du théorème 1. Donc il existe $P \in O_K[z]$ et des polynômes unitaires $Q_i(z_i) \in O_K[z_i]$ tels que $\deg_{z_i} P < \deg Q_i$ et

$$(22)\qquad g^{(j)}(z) = \frac{P^{(j)}(z)}{\prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} Q_i(z_i)}.$$

L'ensemble

$$C_p = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbf{C}^m\colon\ Q_i^{(p)}(\gamma_i) = 0\} \tag{23}$$

est fini. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $g^{(p)}(z)$ montre que $f_p(\boldsymbol{n})$ est de la forme

$$f_p(\boldsymbol{n}) = \sum_{\gamma \in C_p} P_\gamma(\boldsymbol{n})\gamma^{\boldsymbol{n}}$$

où $P_\gamma \in K^{(p)}[C_p][z]$. Alors le lemme 7 permet de conclure.

Démonstration du théorème 2. On définit pour $1 \leqslant j \leqslant d$

$$g^{(j)}(z) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}^m} f(\boldsymbol{n})^{(j)} z^{-1-\boldsymbol{n}} \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}^m} f(\boldsymbol{n}) z^{-1-\boldsymbol{n}}.$$

D'une part, chaque $g^{(j)}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\prod_{i=1}^{m} \{z\colon |z_i| \geqslant e^C\}$ en raison de la majoration des $\overline{|f(\boldsymbol{n})|}$. D'autre part $g(z)$ et $\bar{g}(z) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}^m} \overline{f(\boldsymbol{n})} z^{-1-\boldsymbol{n}}$ se prolongent sur $\prod_{i=1}^{m} [S_i$ et $\prod_{i=1}^{m} [\bar{S}_i$ respectivement, où $S_i = \exp T_i$.

On définit maintenant

$$S_i^{(j)} = \begin{cases} S_i & \text{si } K = K^{(j)}, \\ \bar{S}_i & \text{si } \bar{K} = K^{(j)}, \\ |z_i| \leqslant e^c & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On voit que les $g^{(j)}$ et $S_i^{(j)}$ satisfont à toutes les conditions du théorème 1. Donc

$$g(z) = \frac{P(z)}{\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} Q_i(z_i)},$$

où $P \in O_K[z]$ et les $Q_i \in O_K[z_i]$ sont unitaires; de plus pour $1 \leqslant i \leqslant m$ on a $\deg_{z_i} P < \deg Q_i$. On pose

$$C = \{\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbf{C}^m\colon\ Q_i(\gamma_i) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

La fin de la démonstration est la même que celle de théorème 9.

Bibliographie

[1] V. Avanissian et R. Gay, *Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 341–384.

[2] D. G. Cantor, *Approximation by polynomials with algebraic integer coefficients*, Proc. Symp. Pure Math. 12 (1969), 1–13.

[3] D. G. Cantor, *On an extension of the definition of transfinite diameter and some applications*, J. Reine Angew. Math. 316 (1980), 160–207.

[4] F. Gramain, *Fonctions entières arithmétiques*, Sém. Lelong–Skoda 1976/77, Lecture Notes in Math. 694, 1978, pp. 96–125.

[5] L. Kronecker, *Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen*, Monatsber. Akad. Berlin, 1881, pp. 535–600.

[6] A. Martineau, *Extension en n variables d'un théorème de Pólya–Carlson concernant les séries de puissances à coefficients entiers*, C. R. Acad. Sc. Paris 273 (1971), 1127–1128.

[7] Ch. Pisot, *Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle*, ibid. 222 (1946), 988–990.

[8] G. Pólya, *Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe*, Math. Ann. 99 (1928), 687–706.

[9] M. Schiffer and J. Siciak, *Transfinite diameter and analytic continuation of functions of two complex variables*, Studies in Math. Anal. and Rel. Topics, 1962, pp. 341–358.

Reçu le 6.6.1986
et dans la forme modifiée le 15.5.1987 (1645)