[4] B. Z. Moroz, *Produits eulériens sur les corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris 301 (1985), 459–462.
[5] — *Estimates for character sums in number fields*, Israel J. Math., to appear.
[6] — *Analytic arithmetic in algebraic number fields*, Lecture notes in Mathematics 1205, Springer-Verlag, 1986.
[7] — *On a class of Dirichlet series associated to the ring of representations of a Weil group*, Proc. London Math. Soc., to appear.
[8] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris 1978.
[9] — *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publ. Math. I.H.E.S. 54 (1981), 123–202.
[10] J. Tate, *Number theoretic background*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (American Mathematical Society), 33 (1979), Part II, 3–26.
[11] A. Weil, *Sur la théorie du corps de classes*, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 1–35.
[12] Y. Yomdin, *Metric properties of semialgebraic sets and mappings and their applications in smooth analysis*, in: *Géométrie algébrique et applications*, III (C. R. de la conférence de la Rabba, Espague, 10-18/XII/1984), Hermann, Paris 1987, p. 165–183.

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT BONN
Gottfried-Claren-Straße 26
5300 Bonn 3
West Germany

Received on 29.9.1986
and in revised form on 5.12.1986 (1674)

ACTA ARITHMETICA
LI (1988)

Über die Restklasse modulo 2^{e+2} des Wertes $2^e n\zeta(1-2^e n, \mathfrak{K})$ der Zetafunktion einer Idealklasse aus dem reell-quadratischen Zahlkörper $Q(\sqrt{D})$ mit $D \equiv 3 \bmod 4$

von

HEINRICH LANG (Münster)

1. Einleitung. Es sei D eine quadratfreie natürliche Zahl mit der Eigenschaft $D \equiv 3 \bmod 4$ und $K = Q(\sqrt{D})$ der zugehörige reell-quadratische Zahlkörper. Ferner sei $2m \geqslant 2$ eine gerade natürliche Zahl. Ausgehend von den durch K. Barner [1] und C. L. Siegel [10] hergeleiteten Darstellungen für den Wert $\zeta(1-2m, \mathfrak{K})$ der Zetafunktion einer Idealklasse $\mathfrak{K}$ von K läßt sich zeigen, daß $2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K})$ in dem Ring

$$Z_2 = \left\{\frac{p}{q} \in Q \mid p, q \in Z \text{ und } 2 \nmid q\right\}$$

der für 2 ganzen rationalen Zahlen liegt. Spaltet man von $2m$ die höchste Potenz von 2 ab und schreibt

$$2m = 2^e n \quad \text{mit } 2 \nmid n,$$

so kann man die Restklasse von $2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K}) \bmod 2^{e+2}$ explizit durch die Bernoullischen Zahlen B_μ und die Komponenten T, U der Grundeinheit

$$\varepsilon = T + U\sqrt{D} > 1$$

von K beschreiben. Dazu werde für $\nu \in \{0, \ldots, 4m-1\}$ das Polynom

$$(1.1) \quad F_\nu(x, y) = \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{\varrho}\frac{(-1)^{\varrho+1}}{2\varrho+1}D^{2m-1-\varrho}x^{2\varrho+1}y^{4m-2-2\varrho}$$
$$= \sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{\varrho}\binom{2\varrho+1}{\nu}\frac{(-1)^{\varrho+1}}{2\varrho+1}D^{2m-1-\varrho}x^{2\varrho+1-\nu}y^{4m-2-2\varrho}$$

aus $Z_2[x, y]$ eingeführt. Für $\nu \geqslant 1$ hat man dafür offensichtlich:

$$F_\nu(x, y) = \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial x^{\nu-1}}(x^2 - Dy^2)^{2m-1}.$$

In der vorliegenden Arbeit soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1. *$2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K})$ ist eine für 2 ganze rationale Zahl. Ihre Restklasse mod 2^{e+2} ist unabhängig von der Idealklasse $\mathfrak{K}$. Es gilt:*

$$(1.2)\quad 2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K}) \equiv 2U\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{2m}{2m-\nu} F_{2\nu}(T, U) B_{4m-2\nu} B_{2\nu} + F_{2m}(T, U) B_{2m}^2\right) \bmod 2^{e+2},$$

falls U ungerade ist, und

$$(1.3)\quad 2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K}) \equiv 2T\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{2m}{2m-\nu} F_{2\nu}(UD, T) B_{4m-2\nu} B_{2\nu} + F_{2m}(UD, T) B_{2m}^2\right) \bmod 2^{e+2},$$

falls U gerade ist. Bezeichnet 2^f die höchste in TU aufgehende Potenz von 2,

$$TU = 2^f T_0 U_0 \quad \text{mit } 2 \nmid T_0 U_0,$$

so hat man insbesondere:

$$(1.4)\qquad 2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K}) \equiv \frac{TU}{2} \bmod (2^f, 2^{e+2}).$$

Durch Summation über alle Idealklassen von K und durch Vergleich mit dem Wert $\zeta_K(1-2m)$ der Zetafunktion von K kommen die Klassenzahl h_K von K und die von H. W. Leopoldt [9] eingeführten verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen ins Spiel. Es sei dazu χ der mit Hilfe des Kronecker Symbols durch

$$\chi(\mu) = \left(\frac{4D}{\mu}\right)$$

definierte Restklassencharakter. $\zeta_K(s)$ ist bekanntlich das Produkt

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi)$$

aus der Riemannschen Zetafunktion und der zu χ gehörigen Dirichletschen L-Funktion. An der Stelle $1-2m$ hat man dann [9]:

$$\zeta_K(1-2m) = \frac{1}{4m^2} B_{2m} B_\chi^{(2m)},$$

wobei $B_\chi^{(2m)}$ die zu χ gehörige verallgemeinerte Bernoullische Zahl mit dem Index $2m$ bedeutet. Mit Hilfe der Kongruenzen (1.2) und (1.3) erhält man daher:

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{K}$ eine beliebige Idealklasse aus K. Dann gilt:*

$$h_K 2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K}) \equiv \frac{1}{2m} B_{2m} B_\chi^{(2m)} \bmod 2^{e+2},$$

wobei sich $2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K})$ gemäß (1.2) und (1.3) explizit beschreiben läßt.

2. Höhere Dedekindsche Summen. Mit den durch die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} B_\lambda \frac{z^\lambda}{\lambda!}$$

bestimmten Bernoullischen Zahlen B_λ werden die Bernoullischen Polynome $B_\nu(x)$ durch

$$B_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} B_\lambda x^{\nu-\lambda}$$

definiert. Aus diesen entstehen die Bernoullischen Funktionen $P_\nu(x)$ durch periodische Fortsetzung aus dem Einheitsintervall auf die reelle Achse:

$$P_\nu(x) = B_\nu(x) \quad \text{für } x \in [0, 1[, \qquad P_\nu(x+1) = P_\nu(x) \quad \text{für } x \in \mathbf{R}.$$

Im Fall $\nu = 1$ wird $P_1(0) = 0$ festgesetzt. Die Bernoullischen Funktionen $P_\nu(x)$ sind gerade oder ungerade, je nachdem ν gerade oder ungerade ist:

$$(2.1)\qquad P_\nu(-x) = (-1)^\nu P_\nu(x).$$

Seien nun a und $c \neq 0$ zwei teilerfremde ganze rationale Zahlen, und sei $k \geqslant 2$ eine natürliche Zahl. Dann sind die höheren Dedekindschen Summen $S_{2k}^{(\nu)}(a, c)$ für $\nu \in \{0, \ldots, 2k\}$ durch

$$S_{2k}^{(\nu)}(a, c) = \sum_{j \bmod c} P_{2k-\nu}\left(\frac{j}{c}\right) P_\nu\left(\frac{aj}{c}\right)$$

erklärt. In der Summe durchläuft dabei j ein beliebiges vollständiges Restsystem mod c. Aus der Periodizität der Bernoullischen Funktionen erkennt man leicht:

$$(2.2)\qquad S_{2k}^{(\nu)}(a, c) = S_{2k}^{(\nu)}(a', c), \quad \text{falls } a \equiv a' \bmod c,$$

und

$$(2.3)\qquad S_{2k}^{(\nu)}(a, c) = S_{2k}^{(2k-\nu)}(a', c), \quad \text{falls } aa' \equiv 1 \bmod c.$$

Als unmittelbare Folge von (2.1) sieht man:

$$(2.4)\qquad S_{2k}^{(\nu)}(-a, c) = (-1)^\nu S_{2k}^{(\nu)}(a, c),$$

$$(2.5)\qquad S_{2k}^{(\nu)}(a, -c) = S_{2k}^{(\nu)}(a, c).$$

Für rationale Argumente j/c besteht nach G. Frobenius [3] für $P_\nu(j/c)$ eine Darstellung

$$P_\nu\left(\frac{j}{c}\right) = \frac{B_\nu}{c^\nu} - \frac{\nu}{c^\nu} \sum_{\substack{\varrho^{|c|}=1 \\ \varrho \neq 1}} \varrho^{j+1} \frac{R_{\nu-1}(\varrho)}{(\varrho-1)^\nu}$$

durch $|c|$-te Einheitswurzeln. Hierbei bedeuten $R_{\nu-1}(x)$ die von Frobenius [3] eingeführten Eulerschen Polynome. Von diesen wird im folgenden wesentlich die Tatsache

$$R_{\nu-1}(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$$

ausgenutzt. Mit Hilfe obiger Darstellung für $P_\nu(j/c)$ bekommt man [2]:

$$\begin{aligned}(2.6)\quad & S_{2k}^{(\nu)}(a, c)\\ &= \frac{\operatorname{sgn} c}{c^{2k-1}}\left(B_{2k-\nu}B_\nu - \nu(2k-\nu)\sum_{\substack{\varrho^{|c|}=1\\ \varrho\neq 1}} \varrho^{1-a}\frac{R_{2k-1-\nu}(\varrho^{-a})R_{\nu-1}(\varrho)}{(\varrho^{-a}-1)^{2k-\nu}(\varrho-1)^\nu}\right).\end{aligned}$$

In den Fällen $\nu = 0$ und $\nu = 2k$ hat man demnach die einfache Formel:

$$(2.7)\qquad S_{2k}^{(0)}(a, c) = S_{2k}^{(2k)}(a, c) = \frac{\operatorname{sgn} c}{c^{2k-1}}B_{2k}.$$

Da für die $|c|$-ten Einheitswurzeln ϱ

$$\frac{|c|\varrho}{1-\varrho} = \sum_{\lambda=1}^{|c|-1} \lambda\varrho^{-\lambda}$$

eine ganze algebraische Zahl ist und da die Eulerschen Polynome ganz-rationale Koeffizienten besitzen, folgt aus (2.6) die für ungerades c gültige Kongruenz:

$$(2.8)\qquad \frac{\operatorname{sgn} c}{2k-2\nu}S_{2k}^{(2\nu)}(a, c) \equiv \frac{B_{2k-2\nu}B_{2\nu}}{(2k-2\nu)c^{2k-1}} \bmod 2, \qquad \text{falls } 2\nmid c.$$

Weil die Bernoullischen Zahlen für ungerade Indizes $\geqslant 3$ verschwinden, liest man aus (2.6) unmittelbar ab:

$$S_{2k}^{(2\nu+1)}(a, c) \in \boldsymbol{Z}_2, \qquad \text{falls } 2\nmid c.$$

Es gilt jedoch schärfer:

SATZ 3. *Es sei c nicht durch 2 teilbar. Dann bestehen die Kongruenzen:*

$$(2.9)\qquad S_{2k}^{(1)}(a, c) \equiv S_{2k}^{(2k-1)}(a, c) \equiv \frac{c^2-1}{8} \bmod 2$$

und

$$(2.10)\qquad S_{2k}^{(2\nu+1)}(a, c) \equiv 0 \bmod 2 \quad \textit{für alle } \nu \in \{1, \ldots, k-2\}.$$

Beweis. Gemäß (2.6) genügt es, den Fall $c > 0$ zu betrachten. Für alle $j \in \{1, \ldots, c-1\}$ hat man dann

$$P_{2\mu+1}\left(\frac{j}{c}\right) = B_{2\mu+1}\left(\frac{j}{c}\right).$$

Außerdem ist $P_{2\mu+1}(0) = 0$. Daher gilt:

$$S_{2\mu+2\nu+2}^{(2\nu+1)}(a, c) = \sum_{j=1}^{c-1} B_{2\mu+1}\left(\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right)$$

für alle $\nu, \mu \in \boldsymbol{N}_0$. Die Werte der Bernoullischen Polynome an rationalen Argumentstellen j/c genügen der Rekursionsformel [4]:

$$B_\nu\left(\frac{j}{c}\right) = \frac{j^\nu}{c^\nu} - \frac{1}{\nu+1}\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}\binom{\nu+1}{\lambda}B_\lambda\left(\frac{j}{c}\right).$$

Damit bekommt man:

$$\begin{aligned}S_{2\mu+2\nu+2}^{(2\nu+1)}(a, c) &= \sum_{j=0}^{c-1}\frac{j^{2\mu+1}}{c^{2\mu+1}}P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right)\\ &\quad -\frac{1}{2\mu+2}\sum_{\lambda=0}^{2\mu}\binom{2\mu+2}{\lambda}\sum_{j=1}^{c-1}B_\lambda\left(\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right).\end{aligned}$$

Durch Summationstransformation $j \leftrightarrow -j$ prüft man mit Hilfe von (2.1) nach:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{c-1} B_\lambda\left(\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right) &= \sum_{j \bmod c} P_\lambda\left(\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right)\\ &= \sum_{j \bmod c} P_\lambda\left(\frac{-j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{-aj}{c}\right)\\ &= (-1)^{\lambda+1}\sum_{j \bmod c} P_\lambda\left(\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right)\\ &= (-1)^{\lambda+1}\sum_{j=1}^{c-1} B_\lambda\left(\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right)\\ &= \begin{cases}0, & \text{falls } \lambda = 2\varkappa \text{ gerade ist},\\ S_{2\varkappa+2\nu+2}^{(2\nu+1)}(a, c), & \text{falls } \lambda = 2\varkappa+1 \text{ ungerade ist.}\end{cases}\end{aligned}$$

Wegen $B_0(x) = 1$ hat man hiernach insbesondere:

$$\sum_{j=1}^{c-1} P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right) = 0,$$

also auch

$$\sum_{j=1}^{c-1} B_1\left(\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right) = \sum_{j=1}^{c-1}\left(\frac{j}{c}-\frac{1}{2}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right) = \sum_{j=1}^{c-1}\frac{j}{c}P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right).$$

Beachtet man noch

$$\frac{1}{2\mu+2}\binom{2\mu+2}{2\varkappa+1} = \frac{1}{2\varkappa+1}\binom{2\mu+1}{2\varkappa},$$

so erhält man aus alledem die für $\nu \geqslant 0$, $\mu \geqslant 1$ gültige Rekursionsformel:

$$S^{(2\nu+1)}_{2\mu+2\nu+2}(a,c) = \sum_{j=1}^{c-1}\left(\frac{j^{2\mu+1}}{c^{2\mu+1}}-\frac{j}{c}\right)P_{2\nu+1}\left(\frac{aj}{c}\right) - \sum_{\varkappa=1}^{\mu-1}\binom{2\mu+1}{2\varkappa}\frac{1}{2\varkappa+1}S^{(2\nu+1)}_{2\varkappa+2\nu+2}(a,c). \tag{2.11}$$

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich die behaupteten Kongruenzen (2.9) und (2.10) durch vollständige Induktion nach μ beweisen.

Zu (2.9): Im Fall $\nu = 0$ betrachte man zunächst $\mu = 1$. Unter der Voraussetzung $2\nmid c$ bekommt man aus (2.11):

$$\begin{aligned} S^{(1)}_4(a,c) &= \sum_{j=1}^{c-1}\left(\frac{j^3}{c^3}-\frac{j}{c}\right)P_1\left(\frac{aj}{c}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{c-1}\left(\frac{j^3}{c^3}-\frac{j}{c}\right)\left(\frac{aj}{c}-\left[\frac{aj}{c}\right]-\frac{1}{2}\right) \\ &\equiv \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{c-1}(j^3-j) \bmod 2 \\ &\equiv \frac{c}{2}\left(\frac{c^2(c-1)^2}{4}-\frac{c(c-1)}{2}\right) \bmod 2 \\ &\equiv \frac{c^2-1}{8} \bmod 2. \end{aligned}$$

Sei nun $\mu \geqslant 2$, und sei für alle $\varkappa \in \{1, \ldots, \mu-1\}$

$$S^{(1)}_{2\varkappa+2}(a,c) \equiv \frac{c^2-1}{8} \bmod 2, \quad \text{falls } 2\nmid c,$$

als richtig angenommen. Berücksichtigt man noch

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa=1}^{\mu-1}\binom{2\mu+1}{2\varkappa}\frac{1}{2\varkappa+1} &= \frac{1}{2\mu+2}\sum_{\varkappa=1}^{\mu-1}\binom{2\mu+2}{2\varkappa+1} \\ &= \frac{1}{2\mu+2}\left(\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\binom{2\mu+2}{2\varkappa+1}-2(2\mu+2)\right) \\ &= \frac{1}{2\mu+2}\left(2^{2\mu+1}-2(2\mu+2)\right) \equiv 0 \bmod 2, \end{aligned}$$

so bekommt man bei Beachtung von $2\nmid c$ aus (2.11):

$$\begin{aligned} S^{(1)}_{2\mu+2}(a,c) &\equiv \sum_{j=1}^{c-1}\left(\frac{j^{2\mu+1}}{c^{2\mu+1}}-\frac{j}{c}\right)P_1\left(\frac{aj}{c}\right)-\frac{c^2-1}{8}\sum_{\varkappa=1}^{\mu-1}\binom{2\mu+1}{2\varkappa}\frac{1}{2\varkappa+1} \bmod 2 \\ &\equiv \sum_{j=1}^{c-1}\left(\frac{j^{2\mu+1}}{c^{2\mu+1}}-\frac{j}{c}\right)\left(\frac{aj}{c}-\left[\frac{aj}{c}\right]-\frac{1}{2}\right) \bmod 2 \\ &\equiv \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{c-1}(j^{2\mu+1}-j) \equiv \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{c-1}(j^3-j) \bmod 2 \\ &\equiv \frac{c^2-1}{8} \bmod 2. \end{aligned}$$

Damit ist die Kongruenz

$$S^{(1)}_{2k}(a,c) \equiv \frac{c^2-1}{8} \bmod 2, \quad \text{falls } 2\nmid c,$$

bewiesen. Da die rechte Seite hierbei nicht von a abhängt, folgt mit Hilfe von (2.3) auch

$$S^{(2k-1)}_{2k}(a,c) \equiv \frac{c^2-1}{8} \bmod 2, \quad \text{falls } 2\nmid c.$$

Zu (2.10): Im Fall $\nu \geqslant 1$ ist $c^{2\nu+1}P_{2\nu+1}(aj/c)$ eine ganze rationale Zahl [11]. Durch vollständige Induktion nach μ erhält man dann aus (2.11):

$$S^{(2\nu+1)}_{2\mu+2\nu+2}(a,c) \equiv 0 \bmod 2, \quad \text{falls } 2\nmid c, \quad \nu \geqslant 1 \text{ und } \mu \geqslant 1,$$

woraus man (2.10) unmittelbar ablesen kann.

3. $2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K}) \bmod 2^{e+2}$ **für den Fall** $2\nmid U$. Es sei $\mathfrak{c}$ ein ganzes primitives Ideal (d.h. ein ganzes Ideal ohne nicht trivialen natürlichen Teiler) aus $\mathfrak{K}$. Dieses sei ohne Einschränkung prim zu 2 gewählt. Dann hat man auch

$$2\nmid \mathfrak{N}(\mathfrak{c}), \tag{3.1}$$

wobei mit $\mathfrak{N}$ die Idealnorm von K bezeichnet sei. Eine $\mathbf{Z}$-Basis α, β von $\mathfrak{c}$ und die Grundeinheit $\varepsilon > 1$ von K bestimmen eine Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vermöge:

$$\varepsilon\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Dabei sind a, b, c und d ganz-rationale Zahlen mit der Eigenschaft $ad-bc = N(\varepsilon)$, wobei N die Zahlnorm von K bedeutet. Für das folgende seien α und β in der kanonischen Form [6]

$$\alpha = g+\sqrt{D} \quad \text{mit } g \in \mathbf{Z} \text{ und } \beta = \mathfrak{N}(\mathfrak{c}) \tag{3.3}$$

gewählt. Mit $\varepsilon = T+U\sqrt{D}$ hat man dann explizit:

$$a = T+gU, \quad b = \frac{U(D-g^2)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{c})}, \quad c = U\mathfrak{N}(\mathfrak{c}), \quad d = T-gU. \tag{3.4}$$

Es sei $\omega = \alpha/\beta$ gesetzt und definiert:

$$Q(x) = \int_{-d/c}^{x} (t-\omega)^{2m-1}(t-\omega')^{2m-1}\,dt, \tag{3.5}$$

wobei der Strich ′ die Anwendung des nicht identischen Automorphismus von K bedeutet. Nach C. L. Siegel [10] gilt:

$$\zeta(1-2m, \mathfrak{K}) = 2\mathfrak{N}(\mathfrak{c})^{2m-1} \sum_{\nu=0}^{4m-1} \frac{(-1)^\nu c^{4m-1-\nu}}{\nu!(4m-\nu)} Q^{(\nu)}\left(\frac{a}{c}\right) S_{4m}^{(\nu)}(a, c). \tag{3.6}$$

Dabei läßt sich $c^{4m-1-\nu}Q^{(\nu)}\left(\frac{a}{c}\right)$ durch die Komponenten T und U von ε ausdrücken. Es ist [8]:

$$c^{4m-1}Q\left(\frac{a}{c}\right) = 2F_0(T, U) \quad \text{und} \quad \frac{c^{4m-1-\nu}}{\nu!} Q^{(\nu)}\left(\frac{a}{c}\right) = F_\nu(T, U), \tag{3.7}$$

falls $\nu \in \{1, \ldots, 4m-1\}$.

Aus der in [8] gezeigten für alle $\nu \in \{1, \ldots, 4m-1\}$ gültigen Beziehung

$$\frac{c^{4m-1-\nu}}{\nu!(4m-\nu)} Q^{(\nu)}\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{N(\varepsilon)^\nu c^{\nu-1}}{(4m-\nu)!\,\nu} Q^{(4m-\nu)}\left(\frac{a}{c}\right)$$

folgt unmittelbar:

$$\frac{1}{4m-\nu} F_\nu(T, U) = \frac{N(\varepsilon)^\nu}{\nu} F_{4m-\nu}(T, U), \quad \text{falls } \nu \in \{1, \ldots, 4m-1\}. \tag{3.8}$$

Wegen $ad = N(\varepsilon)+bc \equiv N(\varepsilon) \bmod c$ hat man gemäß (2.3) und (2.4):

$$S_{4m}^{(\nu)}(a, c) = N(\varepsilon)^\nu S_{4m}^{(4m-\nu)}(d, c).$$

Mit Hilfe von (3.7) und (3.8) läßt daher (3.6) umformulieren zu:

$$\begin{aligned} \zeta(1-2m, \mathfrak{K}) &= 2\mathfrak{N}(\mathfrak{c})^{2m-1}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{(-1)^\nu}{4m-\nu} F_\nu(T, U)\big(S_{4m}^{(\nu)}(a, c) + S_{4m}^{(4m-\nu)}(d, c)\big) \\ &\qquad + \frac{1}{2m} F_{2m}(T, U) S_{4m}^{(2m)}(a, c)\Bigg). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sei jetzt der Fall $2 \nmid U$ eingehender betrachtet. Gemäß (3.1) und (3.4) hat man dann $2 \nmid c$, und man kann die Kongruenzen (2.8), (2.9) und (2.10) auf die in (3.9) auftretenden Dedekindschen Summen anwenden. Wegen $F_\nu(T, U) \in \boldsymbol{Z}_2$ ergibt das:

$$\begin{aligned} \zeta(1-2m, \mathfrak{K}) \equiv \frac{2\mathfrak{N}(\mathfrak{c})^{2m-1}}{c^{4m-1}}\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{F_{2\nu}(T, U)}{2m-\nu} B_{4m-2\nu} B_{2\nu} + \frac{F_{2m}(T, U)}{2m} B_{2m}^2\right) \bmod 4. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Aus $T^2 - U^2 D = N(\varepsilon)$, $2 \nmid U$ und $D \equiv 3 \bmod 4$ folgt sofort:

$$2 \mid T. \tag{3.11}$$

Ferner ist sicher

$$\frac{2m}{2m-\nu} \in \boldsymbol{Z}_2 \quad \text{oder} \quad \frac{2m}{\nu} \in \boldsymbol{Z}_2. \tag{3.12}$$

Aus der Definition (1.1) für $F_{2\nu}(x, y)$ und der in (3.8) ausgesprochenen Symmetrie in ν und $4m-\nu$ erkennt man damit bei Berücksichtigung von (3.11):

$$\frac{2m}{T(2m-\nu)} F_{2\nu}(T, U) \equiv \binom{2m}{\nu} \bmod 4 \quad \text{für alle } \nu \in \{0, \ldots, 2m-1\}. \tag{3.13}$$

Nach dem Satz von von Staudt und Clausen [5] für die Bernoullischen Zahlen ist

$$2B_{2\nu} \equiv 1 \bmod 2 \quad \text{für alle } \nu \geqslant 1. \tag{3.14}$$

Mit (3.11) und (3.13) bekommt man daher:

$$\frac{4m}{2m-\nu} F_{2\nu}(T, U) B_{4m-2\nu} B_{2\nu} \in \boldsymbol{Z}_2 \quad \text{für alle } \nu \in \{0, \ldots, 2m-1\}. \tag{3.15}$$

Wegen $\binom{2m}{m} = 2\binom{2m-1}{m-1} \equiv 0 \bmod 2$ gilt im Fall $\nu = m$ sogar:

$$2F_{2m}(T, U) B_{2m}^2 \in \boldsymbol{Z}_2. \tag{3.16}$$

In Hinblick auf (3.15) und (3.16) ist es sinnvoll, die Kongruenz (3.10) mit $2m = 2^e n$ zu multiplizieren. Da $\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$ und c ungerade sind, ist

$$c^{2m} \equiv \mathfrak{N}(\mathfrak{c})^{2m} \equiv 1 \bmod 2^{e+2}$$

wahr. Berücksichtigt man noch $c = U\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$, so erkennt man dadurch, daß $2m\zeta(1-2m, \mathfrak{K})$ eine Zahl aus $\boldsymbol{Z}_2$ ist, die der behaupteten Kongruenz (1.2) genügt.

Mit Hilfe von (3.13) und (3.14) resultiert wegen $B_0 = 1$:

$$\begin{aligned} &\frac{4}{T}\left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{2m}{2m-\nu} F_{2\nu}(T, U) B_{4m-2\nu} B_{2\nu} + F_{2m}(T, U) B_{2m}^2\right) \\ &\qquad \equiv \sum_{\nu=1}^{m-1} \binom{2m}{\nu} + \frac{1}{2}\binom{2m}{m} \equiv \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=0}^{2m} \binom{2m}{\nu} - 2\right) \equiv 2^{2m-1} - 1 \equiv 1 \bmod 2. \end{aligned}$$

Multipliziert man mit $UT/2$ und beachtet, daß 2 nicht in U aufgeht, so sieht man auch, daß (1.4) unter der Voraussetzung $2\nmid U$ erfüllt ist.

4. Zwischenrechnungen. Es sei

$$Q(x, v, w) = \frac{((2m-1)!)^2}{(4m-1)!}\sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{4m-1}{2m-1-\varrho}(-1)^{\varrho}(x-v)^{2m-1-\varrho}(x-w)^{2m-\varrho}$$

gesetzt. Für dieses von den beiden reellen Parameter v und w abhängige Polynom in x hat man:

$$Q'(x, v, w) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, v, w) = (x-v)^{2m-1}(x-w)^{2m-1} \tag{4.1}$$

und daher für alle $\nu\in\{1, \ldots, 4m-1\}$:

$$\begin{aligned} Q^{(\nu)}(x, v, w) &= \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial x^{\nu-1}}(x-v)^{2m-1}(x-w)^{2m-1} \\ &= \sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{\varrho}\frac{\partial^{\varrho}}{\partial x^{\varrho}}(x-v)^{2m-1}\frac{\partial^{\nu-1-\varrho}}{\partial x^{\nu-1-\varrho}}(x-w)^{2m-1} \\ &= \sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{\varrho}\varrho!(\nu-1-\varrho)!\binom{2m-1}{\varrho}\binom{2m-1}{\nu-1-\varrho}(x-v)^{2m-1-\varrho}(x-w)^{2m-\nu+\varrho}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wegen $(-1)^{\varrho} = \binom{-1}{\varrho}$ bekommt man damit für alle $\nu\in\{0, \ldots, 4m-1\}$:

$$\begin{aligned} &Q^{(\nu)}(x, v, w) \\ &= \frac{((2m-1)!)^2}{(4m-1-\nu)!}\sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{\nu-1}{\varrho}\binom{4m-1-\nu}{2m-\nu-\varrho}(x-v)^{2m-1-\varrho}(x-w)^{2m-\nu+\varrho}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Gemäß (4.2) gilt offensichtlich für alle $\nu\in(1, \ldots, 4m-1\}$:

$$Q^{(\nu)}(x, v, w) = Q^{(\nu)}(x, w, v). \tag{4.4}$$

Nach (3.2) ist $\varepsilon\beta = c\alpha+d\beta$. Setzt man $\tau = \beta/\alpha$, so erhält man

$$\varepsilon\tau = c+d\tau, \tag{4.5}$$

und daraus $c/d+\tau = \alpha'\varepsilon\beta/dN(\alpha)$, so daß

$$\begin{aligned} &\frac{d^{4m-1-\nu}N(\alpha)^{2m-1}}{\nu!(4m-\nu)}Q^{(\nu)}\left(-\frac{c}{d}, \tau', \tau\right) \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}((2m-1)!)^2}{(4m)!}\binom{4m}{\nu}\sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{\nu-1}{\varrho}\binom{4m-1-\nu}{2m-\nu-\varrho} \\ &\qquad\times(\varepsilon\beta)^{2m-\nu+\varrho}\alpha^{\nu-\varrho-1}(\varepsilon'\beta')^{2m-1-\varrho}\alpha'^{\varrho} \end{aligned} \tag{4.6}$$

für alle $\nu\in\{0, \ldots, 4m-1\}$ richtig ist. Genau so erkennt man:

$$\begin{aligned} &\frac{N(\alpha)^{2m-1}}{\nu!(4m-\nu)}Q^{(\nu)}(0, \tau', \tau) \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}((2m-1)!)^2}{(4m)!}\binom{4m}{\nu}\sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{\nu-1}{\varrho}\binom{4m-1-\nu}{2m-\nu-\varrho}\beta^{2m-\nu+\varrho}\alpha^{\nu-\varrho-1}\beta'^{2m-1-\varrho}\alpha'^{\varrho} \end{aligned} \tag{4.7}$$

für alle $\nu\in\{0, \ldots, 4m-1\}$. Wendet man auf die beiden letzten Gleichungen den nicht identischen Automorphismus $'$ von K an und führt die Summentransformation $\varrho\leftrightarrow 2m-1-\varrho$ durch, so folgt für alle $\nu\in\{0, \ldots, 4m-1\}$:

$$\begin{aligned} &\frac{d^{4m-1-\nu}N(\alpha)^{2m-1}}{\nu!(4m-\nu)}N(\omega)^{2m-\nu}Q^{(\nu)}\left(-\frac{d}{c}, \tau, \tau'\right) \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}((2m-1)!)^2}{(4m)!}\binom{4m}{\nu}N(\varepsilon)^{\nu}\sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{\nu-1}{2m-1-\varrho}\binom{4m-\nu-1}{\varrho} \\ &\qquad\times(\varepsilon\beta)^{-2m+\nu+\varrho}\alpha^{4m-\nu-1-\varrho}(\varepsilon'\beta')^{2m-1-\varrho}\alpha'^{\varrho} \end{aligned} \tag{4.8}$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{N(\alpha)^{2m-1}}{\nu!(4m-\nu)}N(\omega)^{2m-\nu}Q^{(\nu)}(0, \tau, \tau') \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}((2m-1)!)^2}{(4m)!}\binom{4m}{\nu}\sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{\nu-1}{2m-1-\varrho}\binom{4m-\nu-1}{\varrho} \\ &\qquad\times\beta^{-2m+\nu+\varrho}\alpha^{4m-\nu-1-\varrho}\beta'^{2m-1-\varrho}\alpha'^{\varrho}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ein Vergleich von (4.6) und (4.7) mit (4.8) und (4.9) ergibt mit Hilfe von (4.4) für alle $\nu\in\{1, \ldots, 4m-1\}$:

$$\frac{N(\omega)^{2m-\nu}d^{4m-1-\nu}}{\nu!(4m-\nu)}Q^{(\nu)}\left(-\frac{d}{c}, \tau', \tau\right) = \frac{N(\varepsilon)^{\nu}d^{\nu-1}}{(4m-\nu)!\nu}Q^{(4m-\nu)}\left(-\frac{d}{c}, \tau', \tau\right) \tag{4.10}$$

und

$$\frac{N(\omega)^{2m-\nu}}{\nu!(4m-\nu)}Q^{(\nu)}(0, \tau', \tau) = \frac{1}{(4m-\nu)!\nu}Q^{(4m-\nu)}(0, \tau', \tau). \tag{4.11}$$

Schreibt man

$$\begin{aligned} (x-v)^{2m-1}(x-w)^{2m-1} &= \left(\left(x-\frac{v+w}{2}\right)^2-\left(\frac{v-w}{2}\right)^2\right)^{2m-1} \\ &= \sum_{\varrho=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{\varrho}(-1)^{\varrho+1}\left(x-\frac{v+w}{2}\right)^{2\varrho}\left(\frac{v-w}{2}\right)^{4m-2-2\varrho}, \end{aligned}$$

so ersieht man aus (1.1) und (4.1):

$$Q(x, v, w) = F_0\left(x - \frac{v+w}{2}, \frac{v-w}{2\sqrt{D}}\right) + C(v, w) \tag{4.12}$$

mit einer von v und w abhängigen Integrationskonstante $C(v, w)$. Differenzieren nach x ergibt für alle $\nu \in \{1, \ldots, 4m-1\}$:

$$\frac{1}{\nu!} Q^{(\nu)}(x, v, w) = F_\nu\left(x - \frac{v+w}{2}, \frac{v-w}{2\sqrt{D}}\right). \tag{4.13}$$

Mit (4.5) und der speziellen Form (3.3) der kanonischen Basis folgt:

$$-\frac{c}{d} - \frac{\tau'+\tau}{2} = \frac{\beta(UD-gT)}{dN(\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{\tau'-\tau}{2\sqrt{D}} = \frac{\beta(T-gU)}{dN(\alpha)}.$$

Einsetzen in (4.12) und (4.13) liefert:

$$d^{4m-1} Q\left(-\frac{c}{d}, \tau', \tau\right) = \frac{\beta^{4m-1}}{N(\alpha)^{4m-1}} F_0(UD-gT, T-gU) + C(\tau', \tau), \tag{4.14}$$

$$d^{4m-1} Q\left(-\frac{c}{d}, \tau, \tau'\right) = \frac{\beta^{4m-1}}{N(\alpha)^{4m-1}} F_0(UD-gT, T-gU) + C(\tau, \tau') \tag{4.15}$$

und

$$\frac{d^{4m-\nu-1}}{\nu!} Q^{(\nu)}\left(-\frac{c}{d}, \tau', \tau\right) = \frac{\beta^{4m-\nu-1}}{N(\alpha)^{4m-\nu-1}} F_\nu(UD-gT, T-gU) \tag{4.16}$$

für alle $\nu \in \{1, \ldots, 4m-1\}$. Entsprechend findet man:

$$Q(0, \tau', \tau) = \frac{\beta^{4m-1}}{N(\alpha)^{4m-1}} F_0(-g, 1) + C(\tau', \tau), \tag{4.17}$$

$$Q(0, \tau, \tau') = \frac{\beta^{4m-1}}{N(\alpha)^{4m-1}} F_0(-g, 1) + C(\tau, \tau') \tag{4.18}$$

und

$$\frac{1}{\nu!} Q^{(\nu)}(0, \tau', \tau) = \frac{\beta^{4m-\nu-1}}{N(\alpha)^{4m-\nu-1}} F_\nu(-g, 1) \tag{4.19}$$

für alle $\nu \in \{1, \ldots, 4m-1\}$. Die Gleichungen (4.10) und (4.11) lassen sich damit umformulieren zu:

$$\frac{N(\varepsilon)^\nu}{4m-\nu} F_\nu(UD-gT, T-gU) = \frac{N(\alpha)^{2m-\nu}}{\nu} F_{4m-\nu}(UD-gT, T-gU) \tag{4.20}$$

und

$$\frac{1}{4m-\nu} F_\nu(-g, 1) = \frac{N(\alpha)^{2m-\nu}}{\nu} F_{4m-\nu}(-g, 1). \tag{4.21}$$

5. $2m\zeta(1-2m, \mathfrak{R}) \bmod 2^{e+2}$ **für den Fall** $2|U$. Mit Hilfe von Reziprozitätsgesetzen für höhere Dedekindsche Summen läßt sich aus der von K. Barner [1] gefundenen Formel für $\zeta(1-2m, \mathfrak{R})$ die folgende Darstellung herleiten [7]:

$$\begin{aligned}\zeta(1-2m, \mathfrak{R}) &= 2\frac{N(\alpha)^{2m-1}}{\beta^{2m-1}}\Bigg(\sum_{\nu=1}^{4m-1} \frac{d^{4m-\nu-1}}{\nu!(4m-\nu)} Q^{(\nu)}\left(-\frac{c}{d}, \tau', \tau\right) \operatorname{sgn} d (S_{4m}^{(\nu)}(c, d)) \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{4m-1} \frac{1}{\nu!(4m-\nu)} Q^{(\nu)}(0, \tau', \tau) B_{4m-\nu} B_\nu \\ &\quad + \frac{1}{4m}\left(Q\left(-\frac{c}{d}, \tau', \tau\right) - Q(0, \tau', \tau)\right) B_{4m} \\ &\quad + \frac{N(\omega)^{2m}}{4m}\left(Q\left(-\frac{c}{d}, \tau, \tau'\right) - Q(0, \tau, \tau')\right) B_{4m}\Bigg).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Im Gegensatz zu (3.6) sind hier die Nenner der Dedekindschen Summen im wesentlichen durch die zu $c = U\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$ teilerfremde Zahl d bestimmt. Im folgenden werde nun $2|U$ vorausgesetzt. Dann ist d eine ungerade Zahl, und die Kongruenzen (2.9), (2.10) und (2.11) können auf (5.1) angewendet werden.

Wegen $ad - bc = N(\varepsilon)$ hat man $-bc \equiv N(\varepsilon) \bmod d$. Gemäß (2.3) und (2.4) ist daher

$$N(\varepsilon)^\nu S_{4m}^{(4m-\nu)}(c, d) = S_{4m}^{(\nu)}(-b, c).$$

Mit Hilfe der Formeln (2.7) und (4.14) bis (4.21) folgt somit aus (5.1):

$$\begin{aligned}\zeta(1-2m, \mathfrak{R}) &= \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{2\beta^{2m-\nu}}{(4m-\nu)N(\alpha)^{2m-\nu}} F_\nu(UD-gT, T-gU) \\ &\quad \times \operatorname{sgn} d (S_{4m}^{(\nu)}(c, d) + N(\omega)^{2m-\nu} S_{4m}^{(\nu)}(-b, d)) \\ &\quad + \frac{1}{m} F_{2m}(UD-gT, T-gU) \operatorname{sgn} d \cdot S_{4m}^{(2m)}(c, d) \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{2\beta^{2m-\nu}}{(4m-\nu)N(\alpha)^{2m-\nu}} F_\nu(-g, 1)(1 + N(\omega)^{2m-\nu}) B_{4m-\nu} B_\nu \\ &\quad - \frac{1}{m} F_{2m}(-g, 1) B_{2m}^2.\end{aligned} \tag{5.2}$$

In der kanonischen Basis (3.3) von $\mathfrak{c}$ darf g modulo $\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$ abgeändert werden. Da 2 nicht $\mathfrak{N}(\mathfrak{c})$ teilt, kann

$$g \equiv 0 \bmod 2^r \tag{5.3}$$

mit einer für das Folgende genügend großen natürlichen Zahl r erreicht werden. Dann bestehen insbesondere die Kongruenzen:

$$(5.4)\quad F_\nu(UD-gT,\, T-gU) \equiv F_\nu(UD,\, T) \bmod 2^r \quad \text{für alle } \nu \in \{0, \ldots, 4m-1\},$$

$$F_{2\nu}(-g,\, 1) \equiv F_{2\nu}(0,\, 1) \equiv 0 \bmod 2^r \quad \text{für alle } \nu \in \{0, \ldots, 2m-1\},$$

$$d = T-gU \equiv T \bmod 2^r, \qquad N(\alpha) = g^2-D \equiv -D \bmod 2^r,$$

$$N(\omega) = \frac{g^2-D}{\mathfrak{N}(\mathfrak{c})} \equiv 1 \bmod 2.$$

Berücksichtig man, daß die Bernoullischen Zahlen für ungerade Indizes $\nu \geqslant 3$ verschwinden, und wendet die Kongruenzen (2.9), (2.10) und (2.11) für die Dedekindschen Summen an, so erhält man bei Beachtung von (5.4) aus (5.2):

$$(5.5)\quad 2m\zeta(1-2m,\, \mathfrak{K})$$
$$\equiv \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{2m\beta^{2m-2\nu}}{(2m-\nu)D^{2m-2\nu}T^{4m-1}} F_{2\nu}(UD,\, T)\big(1+N(\omega)^{2m-2\nu}\big) B_{4m-2\nu}B_{2\nu}$$
$$+\frac{2}{T^{4m-1}} F_{2m}(UD,\, T) B_{2m}^2 \bmod 2^{e+2}.$$

Wegen $D \equiv 3 \bmod 4$ und der Voraussetzung $2|U$ ist die Pellsche Gleichung $T^2-U^2D = N(\varepsilon)$ nur erfüllt, wenn $N(\varepsilon) = 1$ und $U^2D \equiv 0 \bmod 8$ ist. Man hat daher:

$$(5.6)\qquad U \equiv 0 \bmod 4.$$

Aus (1.1), (3.12), (4.20) und (5.4) schließt man:

$$(5.7)\quad \frac{2m}{(2m-\nu)U} F_{2\nu}(UD,\, T) \equiv -\binom{2m}{\nu} \bmod 4 \quad \text{für alle } \nu \in \{0, \ldots, 2m-1\}.$$

Mit (3.14) und (5.6) folgt also:

$$(5.8)\qquad \frac{2m}{2m-\nu} F_{2\nu}(UD,\, T) B_{4m-2\nu} B_{2\nu} \in \mathbf{Z}_2,$$

so daß man aus (5.5) schon

$$2m\zeta(1-2m,\, \mathfrak{K}) \in \mathbf{Z}_2$$

ablesen kann.

Es sei $\nu = 2^i\nu_0$ mit $2\nmid \nu_0$. Ist dabei $i > e$, so folgt aus $2\nmid D$, $2\nmid T$, $2\nmid\beta = \mathfrak{N}(\mathfrak{c})$, $2\nmid N(\omega)$ und (5.6) und (5.7):

$$(5.9)\quad \frac{2m\beta^{2m-2\nu}}{(2m-\nu)D^{4m-2\nu}T^{4m}} F_{2\nu}(UD,\, T)\big(1+N(\omega)^{2m-2\nu}\big) B_{4m-2\nu}B_{2\nu}$$
$$\equiv \frac{4m}{2m-\nu} F_{2\nu}(UD,\, T) B_{4m-2\nu} B_{2\nu} \bmod 2^{e+2}.$$

Diese Kongruenz ist auch im Fall $i \leqslant e$ richtig. Denn dann ist 2^{e-i} ein Teiler von $2m/\nu$. Für alle nicht durch 2 teilbaren z aus $\mathbf{Z}_2$ gilt daher:

$$\frac{2m}{\nu} z^{2\nu} \equiv \frac{2m}{\nu} \bmod 2^{e+2} \quad \text{und} \quad \frac{2m}{\nu} z^{2m-2\nu} \equiv \frac{2m}{\nu} \bmod 2^{e+2}.$$

Beachtet man (4.20) und (5.4), so erkennt man:

$$(5.10)\quad \frac{2m\beta^{2m-2\nu}}{(2m-\nu)D^{4m-2\nu}T^{4m}} F_{2\nu}(UD,\, T)\big(1+N(\omega)^{2m-2\nu}\big) B_{4m-2\nu}B_{2\nu}$$
$$\equiv \frac{2m\beta^{2m-2\nu}N(\alpha)^{2m-2\nu}}{\nu D^{4m-2\nu}T^{4m}} F_{4m-2\nu}(UD,\, T)\big(1+N(\omega)^{2m-2\nu}\big) B_{4m-2\nu}B_{2\nu}$$
$$\equiv \frac{4m}{\nu} N(\alpha)^{2m-2\nu} F_{4m-2\nu}(UD,\, T) B_{4m-2\nu} B_{2\nu}$$
$$\equiv \frac{4m}{2m-\nu} F_{2\nu}(UD,\, T) B_{4m-2\nu} B_{2\nu} \bmod 2^{e+2}.$$

Die zu beweisende Kongruenz (1.3) resultiert jetzt durch Einsetzen von (5.9) bzw. (5.10) in (5.5).

Genau so wie im Fall $2\nmid U$ erkennt man mit Hilfe von (3.14) und (5.7), daß (1.4) auch im Fall $2|U$ richtig ist.

Literatur

[1] K. Barner, *Über die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reell-quadratischer Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen*, J. Number Theory 1 (1969), 28–64.

[2] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. 3 (1953), 513–522.

[3] G. Frobenius, *Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaften (1910), 809–847. Mathematische Werke 3, Berlin–Heidelberg–New York 1968, 440–478.

[4] J. W. L. Glaisher, *On the value of certain series*, Quarterly J. Math. 31 (1900), 193–227.

[5] G. H. Hardy und E. M. Wright, *Zahlentheorie*, München 1958.

[6] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2. Aufl., Berlin–Heidelberg–New York 1964.

[7] H. Lang, *Über Anwendungen höherer Dedekindscher Summen auf die Struktur elementar-arithmetischer Klasseninvarianten reell-quadratischer Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. 254 (1972), 17–32.

[8] — *Über die Werte $\zeta(2-p,\, \mathfrak{K})$ der Zetafunktion einer Idealklasse aus einem reell-quadratischen Zahlkörper*, ibid. 361 (1985), 35–46.

[9] H. W. Leopoldt, *Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen*, Abh. math. Sem. Ur Hamburg 22 (1958), 131–140.
[10] C. L. Siegel, *Bernoullische Zahlen und quadratische Zahlkörper*, Nachr. Akad. W Göttingen, Math. Phys. Kl. (1968), 7–38.
[11] H. S. Vandiver, *On generalisations of the numbers of Bernoulli and Euler*, Proceedi National Akad. Sciences 23 (1937), 555–559.

WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT, MATHEMATISCHES INSTITUT
Einsteinstraße 62, D-4400 Münster

Eingegangen am 12.11.1986 (16
