Finally, we add some remarks in local aspect. We are interested in seeking all $\xi \in O_{K'}$ such that

$$\eta\xi \equiv \xi^J \beta^3 \pmod{\mathfrak{L}'^9} \quad \text{with } \beta \in O_{K'}$$

because this congruence implies

$$\eta\xi(\xi^J)^2 \equiv (\xi^J\beta)^3 \pmod{\mathfrak{L}'^9} \quad \text{and} \quad (\xi(\xi^J)^2)(\xi(\xi^J)^2)^J = (\xi\xi^J)^3;$$

that is, $\alpha = \xi(\xi^J)^2$ satisfies the conditions $(*)$ in (a) and (2) in (b) of 2.1.

If $\eta\xi \equiv \xi^J\beta^3 \pmod{\mathfrak{L}'^9}$, then we have

$$\xi/\varepsilon \equiv (\xi/\varepsilon)^J \beta^3 \pmod{\mathfrak{l}'^9}.$$

It is proved that, for any $\gamma \in O_{K'}$ ($\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}'}$), we have

$$\gamma \equiv \gamma^J \beta^3, \quad \text{i.e.} \quad \xi \equiv \varepsilon\gamma \pmod{\mathfrak{l}'^9}$$

if and only if

$$\gamma \equiv \lambda\mu^3 \pmod{\mathfrak{l}'^9},$$

where $\lambda, \mu \in O_{K'}$ ($\lambda, \mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}'}$) such that $\lambda \equiv \lambda^J \pmod{\mathfrak{l}'^9}$. Moreover we see that we have

$$\lambda\mu^3 \equiv 1 + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + (B+BC)\omega^5 + F\omega^6 + (CD-C-D)\omega^7 + H\omega^8 \pmod{\mathfrak{l}'^9}$$

$$(B, C, D, F, H \in \{0, 1, -1\}).$$

Consequently, for $\xi \in O_{K'}$ ($\xi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}'}$) such that

$$\xi \equiv \varepsilon\gamma, \quad \text{i.e.} \quad \equiv \varepsilon\lambda\mu^3 \pmod{\mathfrak{l}'^9},$$

if the principal ideal $(\xi(\xi^J)^2)$ is the cube of an ideal in L', then the extension $M' = L'(\sqrt[3]{\eta\xi(\xi^J)^2})$ has a subfield M, which is an unramified cyclic extension of K such that $[M:K] = 3^2$ and $M \supset L$.

We note that, as $\varepsilon = 1-\omega$ and $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}'^2}$, we have

$$\xi \equiv \varepsilon\gamma \equiv 1-\omega \pmod{\mathfrak{l}'^2}.$$

So, considering the above ω-adic expansions of $\lambda\mu^3 \pmod{\mathfrak{l}'^9}$, we see that, among 3^7 classes of $O_{K'}/\mathfrak{l}'^9$ containing an integer $\equiv 1-\omega \pmod{\mathfrak{l}'^2}$, there are exactly 3^5 classes containing some $\varepsilon\gamma$ as above.

References

[1] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Physica-Verlag, Würzburg–Wien 1970.

[2] M. Ishida, *The genus fields of algebraic number fields*, Lecture Notes in Math. 555, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1976.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY
2-1-1, Fukasawa, Setagaya
Tokyo 158, Japan

Received on 4. 11. 1986 (1686)

ACTA ARITHMETICA
LI (1988)

Stabilität bei symmetrischen h-Basen

von

CHRISTOPH KIRFEL (Bergen, Norwegen)

1. Einleitung. Da symmetrische Basen eine große Rolle im Frobenius- und im Reichweitenproblem spielen, wollen wir zunächst Frobeniuszahl und Reichweite einer Basis natürlicher Zahlen definieren.

Sei $B_k = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq N$, $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = 1$, so ist die *Frobeniuszahl* $g(B_k)$ die größte nicht mit B_k darstellbare ganze Zahl. Dabei wollen wir in unseren Darstellungen nur nicht-negative ganzzahlige Koeffizienten zulassen:

$$g(B_k) = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ nicht darstellbar als } \sum_{j=1}^{k} x_j b_j,\ x_j \in N_0,\ b_j \in B_k\}.$$

Dabei verstehen wir unter N_0 die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Sei nun $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq N$ mit $a_1 = 1 < a_2 < \ldots < a_k$. Dann sind alle natürlichen Zahlen mit A_k darstellbar, und wir können nach der Anzahl der Summanden in einer Darstellung fragen. Mit hA_k wollen wir die Menge derjenigen Zahlen bezeichnen, die mit höchstens h Summanden aus A_k darstellbar sind:

$$hA_k = \{n \in N_0 \mid n = \sum_{j=1}^{k} x_j a_j,\ x_j \in N_0,\ a_j \in A_k,\ \sum_{j=1}^{k} x_j \leqslant h\}.$$

A_k nennen wir dann eine *h-Basis* oder einfach eine *Basis*.

Wir betrachten nun die kleinste Zahl N, die nicht mit höchstens h Summanden aus A_k dargestellt werden kann. Wir nennen $N-1$ die *h-Reichweite* $n_h(A_k)$ von A_k:

$$n_h(A_k) = \min\{n \in N \mid n \notin hA_k\} - 1.$$

Wir setzen $n_0(A_k) = 0$.

Mit h_0 möchten wir die kleinste Summandenanzahl, bei der die Reichweite erstmals das größte Element a_k überschreitet, bezeichnen:

$$h_0 = h_0(A_k) = h_0^{(k)} = \min\{h \in N_0 \mid n_h(A_k) \geqslant a_k\}.$$

Meures [4] entdeckte den zentralen Zusammenhang zwischen Reichweite und Frobeniuszahl, der auch erst die Definition der symmetrischen Basen sinnvoll macht. Es gilt für alle h ab einer genügend großen Schranke h_1:

$$n_h(A_k) = ha_k - g(\bar{A}_k) - 1, \qquad h \geqslant h_1 \geqslant h_0 - 1.$$

Dabei ist $\bar{A}_k$ die sogenannte *Spiegelbasis* von A_k, nämlich

$$\bar{A}_k = \{a_k - a_{k-1}, a_k - a_{k-2}, \ldots, a_k - 1, a_k\}.$$

Einen einfachen Beweis hierfür findet man auch in Selmer [6]. Wir sagen, daß A_k von h_1 ab *stabilisiert* ist, weil dann die Reichweite $n_h(A_k)$ immer mit a_k wächst, falls h um eine Einheit wächst, was für $h < h_1$ nicht immer gelten muß.

Die *symmetrischen Basen* sind nun dadurch definiert, daß

$$A_k = \bar{A}_k,$$

oder anders formuliert:

(1) $$a_{k-j} = a_k - a_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Natürlich ist (1) äquivalent mit

(2) $$a_{k-j} = a_k - a_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, t.$$

Dabei ist $k = 2t$ oder $k = 2t-1$, je nach Parität von k. Bei ungeradem k würde es ausreichen, die Symmetriebedingungen für $j = 1, 2, \ldots, t-1$ zu betrachten. An anderer Stelle müssen wir jedoch von der Bedingung $k = 2t-1$ Gebrauch machen, sodaß wir doch bei dieser Notation bleiben möchten.

Gilt die Elementbeziehung (2) nur für $j = 1, 2, \ldots, T < t$, so nennen wir die Basis A_k *teilsymmetrisch*. Bereits für teilsymmetrische Basen können wir einige Resultate hier finden.

Wegen $1 \in \bar{A}_k$ (auch bei teilsymmetrischen Basen) ist die Bestimmung der Frobeniuszahl $g(\bar{A}_k)$ sehr einfach. Es gilt nämlich $g(\bar{A}_k) = -1$, und damit

$$n_h(A_k) = ha_k, \qquad h \geqslant h_1.$$

D.h. man kann auch die Reichweite $n_h(A_k)$ für $h \geqslant h_1$ sehr leicht berechnen.

In diesem Artikel beschäftigen wir uns nun mit der Bestimmung von guten Schranken für h_1 im Falle teilsymmetrischer Basen. Zunächst möchten wir die bisher bekannten Ergebnisse auf diesem Gebiet zusammentragen.

Ganz allgemein gilt $h_1 \geqslant h_0 - 1$, wobei das Gleichheitszeichen z.B. bei allen *angenehmen* Basen zutrifft. Bei angenehmen Basen verwendet die reguläre Darstellung (vgl. Kap. 2) am wenigsten Summanden von allen möglichen Darstellungen, siehe auch Kirfel und Selmer [3]. Bei symmetrischen Basen ist natürlich Gleichheit in der obengenannten Beziehung ausgeschlossen, weil

$$n_{h_0-1}(A_k) < a_k \leqslant (h_0 - 1)a_k,$$

wenn wir einmal von dem trivialen Fall $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $h_0 = 1$, $h_1 = 0$, der in fast allen ähnlich gelagerten Fragestellungen eine Ausnahme darstellt, absehen. Bei symmetrischen und teilsymmetrischen Basen gilt also für $h_0 > 1$:

$$h_1 \geqslant h_0.$$

Dabei läßt sich über $h_0 = h_0(A_k)$ folgendes sagen: Weil bei symmetrischen Basen $a_k \leqslant 2a_t$, so läßt sich leicht zeigen:

$$h_0(A_t) \leqslant h_0(A_k) \leqslant h_0(A_t) + 1,$$

siehe dazu auch Stokke [8].

Numerische Untersuchungen von symmetrischen Basen haben ergeben, daß in den meisten Fällen $h_0 = h_1$ gilt. Dies führte dazu, daß Prof. Selmer damit begann, $h_0 = h_1$ für $k \leqslant 5$ zu zeigen. Auch unsere Ergebnisse sind von den numerischen Berechnungen inspiriert.

Die Basen mit

(3) $$a_k = a_{k-1} + 1,$$

also spezielle teilsymmetrische Basen, sind früher schon eingehend studiert worden, und wir kennen einige Resultate über die Stabilisierungsgröße h_1. Bereits bei Meures [4] finden wir: Sei

$$k \geqslant 4, \qquad a_k = a_{k-1} + 1, \qquad b = \min\{|\tfrac{1}{2}a_k - a_j| \mid j = 1, 2, \ldots, k-2\}.$$

Dann ist $h_1 \leqslant \frac{1}{2}a_k + b - 1$.

Ist zusätzlich $a_k \leqslant 2a_2$, so gilt $h_1 = a_2 - 1$. Ist dagegen $a_k \geqslant 2a_{k-2}$, so ergibt sich $h_1 = a_{k-1} - a_{k-2}$. Beide Alternativen sind jedoch unmöglich bei symmetrischen Basen mit $k > 4$. Dieses Resultat von Meures findet man wiedergegeben und bewiesen in Selmer [7].

Im Falle $a_k = a_{k-1} + 1$ ist auch die Spiegelbasis $\bar{A}_k$ eine Reichweitenbasis, und wir können $\bar{h}_0 = h_0(\bar{A}_k)$ bestimmen. Mit $\bar{h}_0 + h_0 - 2$ Summanden lassen sich dann sicher alle Zahlen aus

$$[0, (h_0 - 1)a_k] = [g(\bar{A}_k) + 1, (h_0 - 1)a_k]$$

mit Hilfe von $\bar{A}_k$ darstellen. Nach Selmer [7], S. 7.7 gilt dann sofort

$$h_1 \leqslant \bar{h}_0 + h_0 - 2.$$

Rödseth konnte nachweisen (siehe Selmer [7], S. 8.12), daß bei symmetrischen Basen gelten muß

$$h_1 \leqslant \max\left\{h_0, 2h_0 - 2 - \left[\frac{2h_0 - 1}{a_k}\right]\right\}.$$

Rödseths Resultat zeigt, daß $h_1/h_0 < 2$ bei symmetrischen Basen, während

h_1/h_0 für nicht symmetrische Basen beliebig groß werden kann, wie er bereits selbst in [5] erwähnt.

Soweit zunächst einmal die allgemeinen Ergebnisse. Im folgenden wollen wir das bisher Bekannte über die symmetrischen Basen mit kleinen Elementzahlen ($k \leqslant 10$) vorstellen.

Für $3 \leqslant k \leqslant 6$ haben die symmetrischen Basen folgende Form:

$$A_3 = \{1, a_2, a_2+1\}, \quad A_4 = \{1, a_2, 2a_2-1, 2a_2\}, \quad h_0 = a_2-1,$$

$$\left.\begin{array}{l} A_5 = \{1, a_2, a_3, a_2+a_3-1, a_2+a_3\} \\ A_6 = \{1, a_2, a_3, 2a_3-a_2, 2a_3-1, 2a_3\} \end{array}\right\}, \quad h_0 = a_2 + \left|\begin{matrix} a_3 \\ a_2 \end{matrix}\right| - 2.$$

In Selmer [7] und Kirfel [2] ist bereits bewiesen, daß in diesen Fällen $h_1 = h_0$, daß also sogenannte h_0-Stabilität vorliegt. Diese Tatsache hat uns auch auf den Weg zu den neuen Resultaten in diesem Artikel gebracht.

Für größere k gibt es bisher nur numerische Berechnungen, die im Falle $k = 7$, 8 noch auf ähnliche Verhältnisse (h_0-Stabilität) hinweisen, siehe dazu Stokke [8]. Stokke hat sämtliche Basen A_7 und A_8 mit $h_0 \leqslant 20$ zu diesem Zweck getestet.

Bei noch „größeren" Basen $k = 9$, 10 sind aber schon die ersten Gegenbeispiele bekannt, also Fälle, wo $h_1 > h_0$. Selmer [7] und Stokke [8] geben sogar eine ganze Klasse solcher Basen an, die wir am Ende des Artikels vorstellen wollen.

2. Vorschau auf Methoden und Resultate. Bei „größeren" symmetrischen Basen ($k > 6$) macht bereits die Berechnung von h_0 erhebliche Schwierigkeiten, zumindest ist noch keine explizite Formel bekannt, die h_0 als Funktion der Basiselemente angibt. Dagegen sind die Verhältnisse wesentlich einfacher, wenn man sich bei den Darstellungen der Zahlen mit A_k auf einen speziellen Darstellungstyp beschränkt, wenn man nämlich nur reguläre Darstellungen benutzt.

Bei einer *regulären Darstellung* einer Zahl $N \in N$ mit Hilfe von A_k (nicht unbedingt symmetrisch oder teilsymmetrisch) verwendet man das größte Element a_k sooft als möglich, dann das zweitgrößte Element a_{k-1} sooft als möglich u.s.w. Beschränkt man sich nur auf diesen Darstellungstyp, kann man nun nach der sogenannten *regulären h-Reichweite* $g_h(A_k)$ fragen, die nur mit regulären Darstellungen erreicht werden soll. Ähnlich stellt sich die Frage nach dem neuen $\tilde{h}_0$, bei dem die reguläre Reichweite $g_h(A_k)$ erstmals das größte Element a_k erreicht. (Aus $n_h(A_k) \geqslant g_h(A_k)$ folgt natürlich $\tilde{h}_0 \geqslant h_0$.) Beide Probleme sind bereits vollständig gelöst, erstmals von Hofmeister [1]. Wir verwenden jedoch die Darstellung aus Kirfel und Selmer [3].

Zur Bestimmung von $\tilde{h}_0$ und $g_h(A_k)$ muß zunächst folgender Divisionsalgorithmus durchgeführt werden, dessen Algorithmusgrößen wir auch im

folgenden laufend benutzen werden:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & \\ a_2 = f_1 a_1, & 0 = r_1 < a_1, \\ a_3 = f_2 a_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < a_2, \\ a_4 + r_2 = f_3 a_3 + r_3, & 0 \leqslant r_3 < a_3, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{i+1} + r_{i-1} = f_i a_i + r_i, & 0 \leqslant r_i < a_i, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_k + r_{k-2} = f_{k-1} a_{k-1} + r_{k-1}, & 0 \leqslant r_{k-1} < a_{k-1}. \end{array}$$

Dann gilt, wie Selmer in [3] zeigt:

$$\tilde{h}_0 = \tilde{h}_0^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} (f_j - 1), \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} g_h(A_k) = (h - \tilde{h}_0) a_k + g_{\tilde{h}_0}(A_k), & h \geqslant \tilde{h}_0 - 1, \\ g_{\tilde{h}_0}(A_k) = \sum_{j=1}^{k-1} (f_j - 1) a_j + a_k - 1 = 2a_k - r_{k-1} - 2. & \end{array}\right. \tag{5}$$

Bei den früheren Ergebnissen brachten wir oft h_1 mit h_0 in Verbindung. Jetzt möchten wir h_1 mit $\tilde{h}_0$ in Verbindung bringen, da wir über letzteres sehr viel genauer Bescheid wissen. Wir werden zwar h_1 nicht exakt berechnen können, wir können aber eine nach unserer Ansicht gute obere Schranke angeben. Unser Hauptresultat ist nämlich $h_1 \leqslant \tilde{h}_0$, sofern die Basis A_k symmetrisch ist. Auch für teilsymmetrische Basen werden wir einige Ergebnisse angeben.

3. Besondere Eigenschaften regulärer Darstellungen. Für den Beweis unseres Hauptergebnisses benötigen wir die Aussagen aus dem folgenden Lemma. Bei der zweiten Aussage handelt es sich um die Verallgemeinerung der recht triviallen Beobachtung, daß $x_j \leqslant f_j$, wenn $N = \sum_{j=1}^{k-1} x_j a_j$ eine reguläre Darstellung von $N \in N$, $N < a_k$ mit A_k ist und f_j dem obigen Divisionsalgorithmus entnommen ist (Erklärung: $(f_j+1) a_j > a_{j+1}$).

LEMMA. *Sei* $N \in N$, $N < a_k$ *und* $N = \sum_{j=1}^{k-1} x_j a_j$ *die reguläre Darstellung von* N *mit* A_k *(nicht unbedingt teilsymmetrisch). Wir bezeichnen mit* $q_1 < q_2 < \dots < q_m$ *sämtliche Indizes* j *mit* $x_j = f_j$. *Dann gilt:*

(6) *Es gibt* $1 \leqslant i_0 < q_1$ *und* $q_j < i_j < q_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, *sodaß* $x_{i_0} \leqslant f_{i_0} - 2$ *und* $x_{i_j} \leqslant f_{i_j} - 2$.

$$\sum_{j=q}^{Q} x_j \leqslant \sum_{j=q}^{Q} (f_j-1)+1, \qquad 1<q\leqslant Q<k. \tag{7}$$

Beweis. Wir setzen $q_j = b$ und $q_{j+1}=c$. Dann ist $c=b+1$ unmöglich, denn

$$f_{b+1}a_{b+1}+f_b a_b = a_{b+2}+r_b-r_{b+1}+a_{b+1}+r_{b-1}-r_b > a_{b+2},$$

was der Regularität der Darstellung widerspricht.

Angenommen $x_j=f_j-1$, $j=b+1,\ b+2,\ \dots,\ c-1$, so ist

$$f_c a_c+(f_{c-1}-1)a_{c-1}+\dots+(f_{b+1}-1)a_{b+1}+f_b a_b = a_{c+1}+(a_c-r_c)+r_{b-1} > a_{c+1},$$

was uns den gleichen Widerspruch wie oben bringt. Also findet sich „zwischen" $x_b=f_b$ und $x_c=f_c$ immer noch ein $x_j\leqslant f_j-2$, $b<j<c$ und unsere Behauptung (6) ist bewiesen, wenn wir noch bedenken, daß natürlich $q_1>1$, und

$$f_{q_1}a_{q_1}+(f_{q_1-1}-1)a_{q_1-1}+\dots+(a_2-1) = a_{q_1+1}+a_{q_1}-r_{q_1}-1 \geqslant a_{q_1+1}.$$

Die Summe von aufeinanderfolgenden Koeffizienten $\sum_{j=q}^{Q} x_j$ kann somit wie in (7) abgeschätzt werden.

Folgende Behauptung ergibt sich als direkte Konsequenz aus unserem Lemma:

Die Zahlen $N<a_k$ mit der maximalen regulären Koeffizientensumme $\sum_{j=1}^{k-1} x_j = \tilde{h}_0$ (solche Zahlen müssen existieren wegen der Definition von $\tilde{h}_0$) haben entweder $x_j=f_j-1$ für alle $j=1,2,\dots,k-1$ oder haben die Form wie im Lemma mit Gleichheit in $x_{i_j}=f_{i_j}-2$, $j=0,1,\dots,m-1$. Man kann leicht zeigen, daß es höchstens 2^{k-2} solche N gibt.

4. Stabilität bei symmetrischen und teilsymmetrischen h-Basen. Im folgenden möchten wir teilsymmetrische Basen A_k betrachten ($k=2t$ oder $k=2t-1$), die folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_{k-j}=a_k-a_j, \qquad j=1,2,\dots,t-1 \qquad (\text{also } T=t-1), \tag{8}$$

$$a_k\leqslant 2a_t. \tag{9}$$

Selbstverständlich werden hiermit alle symmetrischen Basen erfaßt. Für gerades k beschreibt dies jedoch einen allgemeineren Basistyp. Lediglich bei ungeradem k fällt die Symmetriebedingung für $j=t-1$ mit der für $j=t$ zusammen, und Basen mit (8) sind für ungerades k automatisch symmetrisch.

Wir betrachten nun $A_t=\{1,a_2,\dots,a_t\}\subseteq A_k$ und berechnen das zugehörige $\tilde{h}_0$. Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir konsequen-

terweise $\tilde{h}_0^{(t)}$. Wir setzen

$$H=\tilde{h}_0^{(t)}=\sum_{j=1}^{t-1}(f_j-1).$$

Dabei ist natürlich $g_H(A_t)\geqslant a_t$ und

$$g_{H-1}(A_t)=a_t-r_{t-1}-2\geqslant a_d-r_{d-1}-2\geqslant a_d-a_{d-1}-1$$

für alle $1<d\leqslant t$, weil $a_i-r_{i-1}=f_{i-1}a_{i-1}-r_{i-2}\geqslant a_{i-1}-r_{i-2}$. Falls nun $g_H(A_k)\geqslant a_{k-d}$, so ist

$$\begin{aligned} g_H(A_k) &\geqslant a_{k-d}+g_{H-1}(A_t)\geqslant a_{k-d}+a_d-a_{d-1}-1\\ &\geqslant a_k-a_{d-1}-1=a_{k-d+1}-1, \end{aligned}$$

d.h. $g_H(A_k)\geqslant a_{k-d+1}$. Insgesamt haben wir somit induktiv gezeigt, daß $g_H(A_k)\geqslant a_{k-1}=a_k-1$, also auch $g_H(A_k)\geqslant a_k$. D.h.

$$\tilde{h}_0^{(k)}=\tilde{h}_0^{(t)},$$

also $f_t=f_{t+1}=\dots=f_{k-1}=1$.

Hauptergebnis unseres Artikels ist nun folgender

SATZ. *Sei A_k eine teilsymmetrische Basis mit* (8) *und* (9) *und sei* $H=\tilde{h}_0^{(t)}=\sum_{j=1}^{t-1}(f_j-1)$ *sowie* $k=2t$ *oder* $k=2t-1$, *dann gilt*

$$n_h(A_k)=ha_k,\qquad h\geqslant H\qquad (\textit{also } h_1\leqslant H).$$

Beweis. Es sei

$$N=x_k a_k+x_{k-1}a_{k-1}+\dots+x_1$$

die reguläre Darstellung von $N\in\mathbf{N}$ mit A_k. Dann ist wegen (9)

$$x_{k-1}+x_{k-2}+\dots+x_t\leqslant 1.$$

Wir möchten nun für alle $N\in\mathbf{N}$ mit $N\leqslant Ha_k$ eine Darstellung mit höchstens H Summanden aus A_k finden. Dabei brauchen wir uns lediglich um solche N zu kümmern, wo

$$x_k+x_{k-1}+\dots+x_1>H.$$

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß

$$x_k+x_{k-1}+\dots+x_t\leqslant H-1, \tag{10}$$

was immer der Fall ist, solange $x_k\leqslant H-2$. Dann finden wir einen Index $1\leqslant i<t$, sodaß

$$x_k+x_{k-1}+\dots+x_{i+1}<H, \tag{11}$$

$$x_k+x_{k-1}+\dots+x_{i+1}+x_i\geqslant H \qquad (x_i>0). \tag{12}$$

Es sei $X = x_i a_i + x_{i-1} a_{i-1} + \ldots + x_1$. Wir bestimmen $Z \in N$, $Z = z_i a_i + z_{i-1} a_{i-1} + \ldots + z_1$, sodaß die Darstellung regulär ist und $X + Z = a_{i+1} = f_i a_i + r_i - r_{i-1}$. Dann können wir schreiben:

$$
\begin{aligned}
N &= x_k a_k + x_{k-1} a_{k-1} + \ldots + x_{i+2} a_{i+2} + (x_{i+1}+1) a_{i+1} - Z \\
&= (x_k - z_i - z_{i-1} - \ldots - z_1) a_k + z_1 a_{k-1} + z_2 a_{k-2} + \ldots \\
&\quad + z_i a_{k-i} + x_{k-1} a_{k-1} + x_{k-2} a_{k-2} + \ldots + (x_{i+1}+1) a_{i+1}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Diese Darstellung verwendet höchstens H Summanden wegen (11). Wir müssen lediglich untersuchen, ob der Koeffizient vor a_k nicht negativ wird, also ob $x_k - z_i - z_{i-1} - \ldots - z_1 \geqslant 0$.

Dies zeigen wir folgendermaßen:

(i) $x_{k-1} + x_{k-2} + \ldots + x_{i+1} \leqslant \sum_{j=i+1}^{t-1} (f_j - 1) + 1$,

(ii) $x_i + z_i \leqslant f_i$,

(iii) $z_{i-1} + z_{i-2} + \ldots + z_1 \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} (f_j - 1)$.

Dann ist nämlich mit Hilfe von (12)

$$x_k - \sum_{j=1}^{i} z_j \geqslant H - x_{k-1} - x_{k-2} - \ldots - x_{i+1} - x_i - z_i - z_{i-1} - \ldots - z_1 \geqslant -2.$$

Damit haben wir dann bereits $h_1 \leqslant H+2$ gezeigt, wenn man den Beweisschluß hinter Punkt (C) noch berücksichtigt.

Von den Argumenten (i)–(iii) sind (ii) und (iii) am einfachsten einzusehen. Wegen $X + Z = \sum_{j=1}^{i} (x_j + z_j) a_j = f_i a_i + r_i - r_{i-1}$ ist (ii) sofort einsichtig. Wegen der Regularität der Darstellung von Z ist $\sum_{j=1}^{i-1} z_j a_j < a_i$ und $\sum_{j=1}^{i-1} z_j \leqslant \tilde{h}_0^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} (f_j - 1)$, was sofort aus (5) folgt. Also gilt (iii). Dagegen war (i) etwas schwieriger zu zeigen. Wegen (7) gilt

$$x_{k-1} + x_{k-2} + \ldots + x_{i+1} \leqslant \sum_{j=i+1}^{k-1} (f_j - 1) + 1.$$

Nun ist aber, wie anfangs gezeigt, $f_j = 1$, $j = t, t+1, \ldots, k-1$ und damit gilt (i).

Was wir bisher gezeigt haben, liegt also noch zwei Einheiten von unserem Ziel entfernt. Gilt in zweien der Ungleichungen (12), (i), (ii) oder (iii) echte Ungleichheit, oder gilt in einer der Ungleichungen echte Ungleichheit mit Seitendifferenz $\geqslant 2$, so sind wir fertig. Wir können deshalb davon ausgehen, daß in den Beziehungen (12), (i), (ii) und (iii) bis auf höchstens eine das Gleichheitszeichen gilt.

(A) Gilt Gleichheit in (ii), (iii) und (12), so gibt es entweder einen größten Index $1 < q < i$ mit $z_q = f_q$. Wegen (6) und des Gleichheitszeichens in (iii) muß dann $z_j = f_j - 1$ für $j = q+1, q+2, \ldots, i-1$. Oder aber es gilt $z_j = f_j - 1$ für $j = 1, 2, \ldots, i-1$. In diesem Fall setzen wir $q = 0$ und $a_0 = 0$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
a_{i+1} = X + Z &= (x_i + z_i) a_i + z_{i-1} a_{i-1} + \ldots + z_1 + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j \\
&\geqslant f_i a_i + (f_{i-1} - 1) a_{i-1} + \ldots + (f_{q+1} - 1) a_{q+1} + f_q a_q + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j \\
&\geqslant a_{i+1} + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j,
\end{aligned}
$$

ganz ähnlich wie im Beweis des Lemmas. Also ist $x_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, i-1$. Wegen der Gleichheit in (12) ist dann $N = x_k a_k + x_{k-1} a_{k-1} + \ldots + x_i a_i \in HA_k$ und wir sind fertig.

(B) Gilt Gleichheit in (i) und (ii), so ist insbesondere

$$\sum_{j=i+1}^{k-1} x_j = \sum_{j=i+1}^{k-1} (f_j - 1) + 1.$$

Es existiert dann ein kleinster Index $k > p > i$ mit $x_p = f_p$. Wegen (6) ist dann $x_j = f_j - 1$ für $j = i+1, i+2, \ldots, p-1$, also

$$
\begin{aligned}
x_p a_p &+ x_{p-1} a_{p-1} + \ldots + x_{i+1} a_{i+1} + (x_i + z_i) a_i \\
&= f_p a_p + (f_{p-1} - 1) a_{p-1} + \ldots + (f_{i+1} - 1) a_{i+1} + f_i a_i > a_{p+1},
\end{aligned}
$$

während $x_p a_p + x_{p-1} a_{p-1} + \ldots + x_1 < a_{p+1}$. D.h. es gibt ein $Y \in N$, $Y < z_i a_i$ $(z_i > 0)$ mit $x_p a_p + x_{p-1} a_{p-1} + \ldots + x_1 + Y = a_{p+1}$. Sei $Y = y_i a_i + y_{i-1} a_{i-1} + \ldots + y_1$ die reguläre Darstellung von Y, dann ist $y_i < z_i$. Damit erhalten wir eine neue Darstellung unserer ursprünglichen Zahl N:

$$
\begin{aligned}
N &= x_k a_k + x_{k-1} a_{k-1} + \ldots + x_{p+2} a_{p+2} + (x_{p+1} + 1) a_{p+1} - Y \\
&= (x_k - y_i - y_{i-1} - \ldots - y_1) a_k + y_1 a_{k-1} + y_2 a_{k-2} + \ldots \\
&\quad + y_i a_{k-i} + x_{k-1} a_{k-1} + \ldots + x_{p+2} a_{p+2} + (x_{p+1} + 1) a_{p+1},
\end{aligned} \tag{14}
$$

wobei die Darstellung wegen (11) höchstens H Summanden benutzt. Wieder müssen wir den Koeffizienten vor a_k untersuchen. Natürlich ist

(iv) $x_i + y_i \leqslant f_i - 1$,

(v) $y_{i-1} + y_{i-2} + \ldots + y_1 \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} (f_j - 1)$.

Gilt in einer dieser Beziehungen oder in (12) echte Ungleichheit, so haben wir

$$x_k - \sum_{j=1}^{i} y_j \geqslant H + 1 - \{ \sum_{j=i+1}^{i-1} (f_j - 1) + 1 + f_i - 1 + \sum_{j=1}^{i-1} (f_j - 1) \} \geqslant 0,$$

und wir sind fertig. Wir müssen also von Gleichheit in (12), (iv) und (v) ausgehen. Es gibt dann ähnlich wie oben entweder einen größten Index $1 < q < i$, sodaß $y_q = f_q$. Dann gilt wieder $y_j = f_j - 1$ für $j = q+1, q+2, \ldots, i-1$. Oder aber es ist $y_j = f_j - 1$ für $j = 1, 2, \ldots, i-1$, und genau wie oben setzen wir dann $q = 0$ und $a_0 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= x_p a_p + x_{p-1} a_{p-1} + \ldots + x_{i+1} a_{i+1} + (x_i + y_i) a_i \\ &\quad + y_{i-1} a_{i-1} + \ldots + y_1 + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j \\ &\geqslant f_p a_p + (f_{p-1} - 1) a_{p-1} + \ldots + (f_{q+1} - 1) a_{q+1} + f_q a_q \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j \geqslant a_{p+1} + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j. \end{aligned}$$

Wieder folgt $x_j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, i-1$, was uns wegen der Gleichheit in (12) $N = x_k a_k + x_{k-1} a_{k-1} + \ldots + x_i a_i \in HA_k$ liefert. Damit sind wir wieder am Ziel.

(C) Bleibt nur noch der Fall, wo Gleichheit in (i), (iii) und (12) gilt, aber nicht in (ii). Wie schon erwähnt, muß dann die Seitendifferenz in (ii) gleich 1 sein, weil Seitendifferenz $\geqslant 2$ schon erledigt ist und der Fall mit Gleichheit in allen genannten Beziehungen bereits unter (A) abgehandelt wurde. Sei nun p definiert wie unter (B) und q wie unter (A). Dann ist

$$\begin{aligned} x_p a_p + x_{p-1} a_{p-1} + \ldots + x_{i+1} a_{i+1} + (x_i + z_i) a_i + z_{i-1} a_{i-1} + \ldots + z_1 + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j \\ \geqslant f_p a_p + (f_{p-1} - 1) a_{p-1} + \ldots + (f_{q+1} - 1) a_{q+1} + f_q a_q + \sum_{j=1}^{i-1} x_j a_j \geqslant a_{p+1}, \end{aligned}$$

während $x_p a_p + x_{p-1} a_{p-1} + \ldots + x_1 < a_{p+1}$. Deshalb gibt es wieder ein $Y \in N$, $Y \leqslant Z$ mit $x_p a_p + x_{p-1} a_{p-1} + \ldots + x_1 + Y = a_{p+1}$. Sei $Y = y_i a_i + y_{i-1} a_{i-1} + \ldots + y_1$ die reguläre Darstellung von Y, dann gilt wieder $x_i + y_i \leqslant x_i + z_i = f_i - 1$, also (iv) und natürlich auch (v). Mit den gleichen Argumenten wie unter (B) schließen wir den Punkt (C) ab.

Damit haben wir für alle $N \in N$ mit (10) eine Darstellung mit höchstens H Summanden aus A_k gefunden. D.h. aber $n_H(A_k) \geqslant (H-1) a_k + a_t - 1$. Nun ist aber $(H-1) a_k + a_t \in HA_k$ und es gilt sogar $n_H(A_k) \geqslant (H-1) a_k + a_t$.

Sei $n \in N_0$, $n < a_t$, so gibt es eine Darstellung

$$n = u_{t-1} a_{t-1} + u_{t-2} a_{t-2} + \ldots + u_1 \quad \text{mit} \quad u_{t-1} + u_{t-2} + \ldots + u_1 \leqslant H,$$

z.B. die reguläre. Also ist auch

$$\begin{aligned} Ha_k - n = (H - u_{t-1} - u_{t-2} - \ldots - u_1) a_k \\ + u_1 a_{k-1} + u_2 a_{k-2} + \ldots + u_{t-1} a_{k-t+1} \in HA_k, \end{aligned} \tag{15}$$

und die noch fehlenden $a_k - a_t$ Zahlen lassen sich also auch noch mit höchstens H Summanden darstellen.

Insgesamt gilt $n_H(A_k) = Ha_k$, was zu zeigen war, denn ohne weiteres folgt dann $n_h(A_k) = ha_k$, $h \geqslant H$.

Korollar. *Sei A_k eine symmetrische Basis mit $k = 2t$ oder $k = 2t-1$ und $H = \tilde{h}_0^{(t)} = \sum_{j=1}^{t-1} (f_j - 1)$, dann gilt $n_h(A_k) = ha_k$, $h \geqslant H$ (also $h_1 \leqslant H$).*

Bemerkung. Die Symmetriebedingungen wurden nur an den Stellen (13), (14) und (15) benutzt. In allen drei Fällen wird die Bedingung für $j = t$ nicht benötigt, weil in (13) und (14) $i < t$ gilt.

Wie anfangs schon erwähnt, gibt es eine Reihe von Beispielen symmetrischer Basen mit $h_1 > h_0$ für $k = 9, 10$. Wir finden diese in Stokke [8] oder auch in Selmer [7]. Betrachtet man den folgenden Basistyp bei ungeradem h_0: $\hat{A}_5 = \{1, h_0, h_0+2, 2h_0+2, \frac{1}{2}(3h_0^2+3h_0+4)\}$, $h_0 = h_0^{(5)} \geqslant 3$, und erweitert man diesen zu symmetrischen $\hat{A}_9$ oder $\hat{A}_{10}$, so ist

$$\begin{aligned} n_{h_0}(\hat{A}_9) &= 3h_0^2 + 4h_0 + 2, & h_0 &= h_0^{(5)} \geqslant 3, \\ n_{h_0}(\hat{A}_{10}) &= \tfrac{1}{2}(9h_0^2 + 7h_0 + 4), & h_0 &= h_0^{(5)} \geqslant 5, \end{aligned}$$

also jeweils $h_1 > h_0$. Soweit sich das mit dem Computer verfolgen ließ, galt $h_1 = h_0 + 1$. Untersucht wurden alle Basen $\hat{A}_9$ mit $h_0 \leqslant 79$ und alle $\hat{A}_{10}$ mit $h_0 \leqslant 63$. Bei der Berechnung von $\tilde{h}_0^{(5)}$ muß man die Restklasse von h_0 (mod 4) beachten. Es ist $\tilde{h}_0^{(5)} = (7h_0 - 7)/4$, falls $h_0 \equiv 1$ (mod 4) und $\tilde{h}_0^{(5)} = (7h_0 - 5)/4$, falls $h_0 \equiv 3$ (mod 4). Damit ist unsere Schranke in jedem Fall besser als die anfänglich erwähnte Schranke von Rödseth $h_1 \leqslant \max\{h_0, 2h_0 - 2 - [(2h_0 - 1)/a_k]\} = R$.

Stokke und Selmer geben weitere Basen mit $h_1 = h_0 + 1$ an:

$h_0^{(5)} = h_0$	a_2	a_3	a_4	a_5	$n_{h_0}(A_9)$	$n_{h_0}(A_{10})$	H	R	h_1
7	5	18	32	144	615		10	12	8
9	9	21	38	227	469		14	16	10
11	7	39	72	468	2969		16	20	12
11	11	16	27	214	437	624	17	20	12
11	11	18	29	238	485	694	18	20	12

Erweitert man A_5 aus der Tabelle zu symmetrischen Basen A_{10}, so ergeben die ersten drei Basen $h_0^{(10)} = h_1 = h_0 + 1$, während bei den letzten beiden Basen gilt $h_0^{(10)} = h_0 = h_1 - 1$.

Für eine Reihe von Basen ist mit unserem Resultat, $h_1 \leqslant \tilde{h}_0$, bereits die gesamte Frage nach h_1 beantwortet. Gilt nämlich

(16) $$\bar{h}_0^{(t)} = h_0^{(k)}$$

(= $h_0^{(t)}$ oder $h_0^{(t)}+1$, weil $h_0^{(t)} \leqslant h_0^{(k)} \leqslant h_0^{(t)}+1$, siehe oben), dann is $h_0 \leqslant h_1 \leqslant \bar{h}_0$, also $h_1 = h_0 = \bar{h}_0^{(t)}$, und wir haben h_1 exakt bestimmt. Ist z.I A_{t-1} angenehm, so gilt natürlich (16), also $h_1 = h_0$. Insbesondere gilt (16) fü alle $k \leqslant 6$ und damit h_0-Stabilität für $k \leqslant 6$. Ähnlich genügt es zu wissen, da A_{t-1} „schwach angenehm" (siehe Kirfel und Selmer [3]) ist, um $h_1 = h_0$ z zeigen. Gilt nun $h_0(A_{t-1}) = \bar{h}_0^{(t-1)}$ und $f_{t-1} = 1$, also $a_t + r_{t-2} < 2a_{t-1}$, s haben wir ebenfalls h_0-Stabilität gezeigt. Dies betrifft z.B. alle symmetrische Basen A_7 und A_8 mit $a_4 < a_3 + f_2 a_2$. Sucht man nach Basen A_7 und A_8 mi $h_1 > h_0$, so müssen wir A_3 als nicht angenehm voraussetzen. Bisher hat ma allerdings solche Basen noch nicht finden können.

Abschließend möchten wir wenigstens eine nicht-symmetrische Basi vorstellen, die dennoch von unserem Satz erfaßt wird. Betrachtet man $A_($ $= \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$, so ist A_6 nicht symmetrisch, erfüllt aber (8) und (9), un nach dem Satz gilt $h_1 = h_0 = \bar{h}_0 = 2$, was sich leicht nachprüfen läßt.

Herrn Prof. E. S. Selmer möchte ich herzlich für die gründliche Durch sicht des Artikels, wobei er mich auf eine Reihe Vereinfachungen aufmerksar machte, danken. Über ihn bin ich auch erst auf das Problem der Stabilisie rung bei symmetrischen Basen gestoßen.

Literaturverzeichnis

[1] G. Hofmeister, *Über eine Menge von Abschnittsbasen*, J. Reine Angew. Math. 213 (1963 43–57.

[2] C. Kirfel, *h_0-Stabilität bei symmetrischen Basen A_5 und A_6*, Inst. Rap. No 45, Math. Inst Univ. Bergen, 1986.

[3] C. Kirfel und E. S. Selmer, *Regular h-ranges and weakly pleasant h-bases*, Math. Scan 59 (1986), 30–40.

[4] G. Meures, *Zusammenhang zwischen Reichweite und Frobeniuszahl*, Staatsexamensarbei Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, 1977.

[5] Ö. J. Rödseth, *On h-bases for n*, Math. Scand. 48 (1981), 165–183.

[6] E. S. Selmer, *On the postage stamp problem with three stamp denominations*, ibid. 4 (1980), 29–71.

[7] — *The local postage stamp problem*, Part 1: *General theory*, Inst. Rap. No 42, Math. Inst Univ. Bergen, 1986.

[8] R. Stokke, *Symmetrische h-Basen für n* (auf Norwegisch), Diplomarbeit, Math. Inst., Uni Bergen, 1986.

Eingegangen am 13.1.1987 (169