Conspectus materiae tomi LI, fasciculi 1

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange	Address of the Editorial Board and of the exchange	Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches	Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

© Copyright by Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1988

ISBN 83-01-08197-X ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

Charles Pisot

Charles Pisot, Professeur à Bordeaux puis à Paris, est décédé le 7 mars 1984. Avant d'évoquer son influence et celle de son oeuvre sur le développement de la Théorie des Nombres en France, commençons par rappeler très brièvement sa vie et sa carrière.

*

Charles Pisot est né le 2 mars 1910, à Obernai, dans le Bas-Rhin. Il y fera toutes ses études secondaires.

Il est reçu à l'Ecole Normale Supérieure en 1929. Il est major de l'agrégation de mathématiques en 1932 puis, à sa sortie de l'Ecole, est nommé caïman, agrégé-préparateur si vous préférez, ce qui lui permet de se lancer dans la recherche.

Il soutient sa thèse le 23 mars 1938. Il est nommé Maître de Conférences à Bordeaux en 1946, puis Professeur en 1948. Il quittera Bordeaux en 1955 pour être nommé Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, où il restera jusqu'à sa retraite en 1979. Durant toute cette période, il sera en même temps Maître de Conférences à l'Ecole Polytechnique.

Charles Pisot recevra plusieurs prix scientifiques, dont le grand prix de la ville de Paris décerné en 1966 par l'Académie des Sciences.

*

Venons-en maintenant à l'Oeuvre de Charles Pisot et tout d'abord situons son influence dans le milieu mathématique français.

Les mathématiques françaises sont remplies de grands noms de la Théorie des Nombres: Fermat, Galois, Lagrange, Liouville et bien d'autres. Peu de pays peuvent prétendre égaler ce palmarès. Mais curieusement, à l'époque où Charles Pisot commençait sa carrière de chercheur, la Théorie de Nombres français subissait une éclipse regrettable. Charles Pisot n'eut pas de "patron" théoricien des nombres pour la simple raison qu'il n'y en avait alors aucun en France. Par sa thèse impressionnante tout d'abord, puis par son extraordinaire rayonnement comme directeur de recherche ensuite, Charles Pisot va relancer la Théorie des Nombres française, en qualité et en volume, sur la scène internationale.

Le nombre des élèves de Charles Pisot, dans toute la France et aussi quelques pays étrangers, est de l'ordre d'une vingtaine. Mais ce serait sous-estimer l'influence de Charles Pisot sur la Théorie des Nombres que de la réduire aux seuls élèves "directs". Patrice Philippon, qui a soutenu sa thèse en 1984, était l'élève de Daniel Bertrand, qui était l'élève de Michel Waldschmidt, qui était l'élève de Jean Fresnel, qui était l'élève d'Yvette Amice, qui était elle-même l'élève de Charles Pisot. Cela n'est qu'un exemple parmi beaucoup d'autres; l'instrument privilégié de l'action de Charles Pisot fut la fondation vers 1960 du très célèbre séminaire DPP, Delange–Pisot–Poitou, où furent formés le plus grand nombre des théoriciens des nombres français de notre génération.

*

Pour ce qui est de l'oeuvre elle-même, elle est d'abord connue évidemment au travers des fameux "nombres de Pisot"; on dit aussi nombres de Pisot–Vijayaraghavan (PV-numbers), tandis que Pisot lui-même, avec sa modestie bien connue et son accent inimitable, parlait des nombres de la classe S (en hommage aux travaux de Salem sur ce sujet).

Rappelons qu'il s'agit des entiers algébriques θ dont tous les autres conjugués sont intérieurs au disque-unité. On voit aisément que, pour un tel nombre, θ^n est très proche d'un entier: plus exactement θ^n diffère de l'entier le plus proche un d'une quantité ε_n égale, dès que n est assez grand, à la somme des puissances des autres conjugués, et donc décroissant exponentiellement vers 0.

Charles Pisot établit en premier lieu la réciproque de cette propriété en utilisant la fonction génératrice de Lagrange $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ et un critère de rationnalité de Borel.

La décroissance de ε_n était dans cette démonstration supposée exponentielle, ce qui amenait bien sûr à poser la question: quels sont les nombres réels $\theta > 1$ tels que

$$\theta^n = u_n + \varepsilon_n,$$

où u_n est une suite d'entiers rationnels et ε_n une suite tendant vers 0?

Ce phénomène est exceptionnel, car on sait depuis Koksma que pour presque tout $\theta > 1$, la suite θ^n est équirépartie modulo 1. Quels sont alors les cas de "très mauvaise" répartition modulo 1 de la suite θ^n, en ce sens par exemple que la mesure associée est concentrée sur un nombre fini de points? Cette question n'est toujours pas élucidée et les principaux résultats sont tous dûs à Charles Pisot:

– si $\theta > 1$, $\lambda \neq 0$, et si

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n, \quad \text{avec } u_n \in \boldsymbol{Z} \text{ et } \sum_n |\varepsilon_n|^2 < \infty,$$

alors θ est un nombre de Pisot et λ un nombre du corps $\boldsymbol{Q}(\theta)$;

– si dans l'énoncé précédent on suppose en outre θ algébrique, il suffit alors que ε_n tende vers 0 pour aboutir à la même conclusion (en particulier $(3/2)^n$ ne peut pas tendre vers 0 modulo 1).

– en corollaire un théorème de transcendance: pour que le nombre réel λ soit transcendant, il faut et il suffit que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} \cos(\pi\lambda x^n)$ diverge pour tout x supérieur à 1.

Au passage, ce résultat utilise dans un sens le fait que tout corps algébrique réel est engendré par un nombre de Pisot. Cette propriété en apparence anodine joue à notre avis un rôle très important dans la théorie des approximations simultanées de plusieurs nombres réels: elle permet en tout cas, comme l'a noté C. Pisot, de donner divers critères d'algébricité liés à l'existence d'approximations convenables assez régulières.

C. Pisot a remarqué ensuite que si $\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$, avec $u_n \in \boldsymbol{Z}$ et ε_n tendant vers 0, la quantité $u_{n+1} - (u_n^2/u_{n-1})$ tend aussi vers 0, ce qui entraîne la dénombrabilité des couples (λ, θ) en question, et le conduisit à étudier les suites (u_n) déterminées par la condition que pour $n \geqslant 2$, u_{n+1} est l'entier le plus voisin de u_n^2/u_{n-1}.

Il montre alors que la limite u_{n+1}/u_n existe, et obtient l'inclusion

$$S \subset \Sigma \subset E$$

(S ensemble des nombres de Pisot, Σ ensemble des nombres réels $\sigma > 1$ tels qu'il existe un nombre réel λ non nul vérifiant $\lambda\sigma^n = u_n + \varepsilon_n$, $u_n \in \boldsymbol{Z}$ et $|\varepsilon_n| \leqslant c < 1/(2(\sigma+1)^2)$, et E ensemble des limites u_{n+1}/u_n relatives aux suites (u_n) introduites ci-dessus).

C. Pisot montrait que, si $u_0 = 2$ ou 3, la suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire. Plusieurs questions étaient alors posées:

– la suite (u_n) satisfait-elle toujours une relation de récurrence linéaire?

– a-t-on $S = E$?

La première n'a reçu de réponse (négative) que récemment: Boyd a montré (1977) que, si $u_0 = 14$ et $u_1 = 23$, ou si $u_0 = 31$ et $u_1 = 51$, la suite (u_n) ne satisfait pas une telle relation.

La réponse à la deuxième question est beaucoup plus ancienne et tout à fait inattendue: R. Salem a montré (1944) que l'ensemble S était fermé (l'ensemble E est évidemment dense sur $[1, +\infty]$), prouvant également que tout point de S était limite de points de l'ensemble T (les nombres de Salem) des entiers algébriques supérieurs à 1 dont tous les conjugués ont un module inférieur ou égal à 1, avec égalité pour au moins l'un d'entre eux (et donc pour pous les autres sauf 1). On sait d'ailleurs maintenant que $S \cup T \subset E$.

Ce résultat allait être le point de départ de nombreuses recherches:

– détermination par Dufresnoy et Pisot des 4 plus petits éléments de l'ensemble S, puis du plus petit élément de l'ensemble dérivé S' (qui n'est autre que le nombre d'or), en utilisant une idée nouvelle à laquelle conduisaient les travaux de Schur: approcher la fraction rationnelle attachée à un nombre de Pisot θ par des fractions rationnelles ayant un pôle unique dans le disque unité ouvert, quotients de deux polynômes réciproques, et dont le développement de Taylor à l'origine coïncide jusqu'au rang n avec celui de la fraction rationnelle limite;

– utilisation de familles normales de fractions rationnelles pour retrouver la propriété de fermeture de l'ensemble S;

– généralisation de ces familles normales pour découvrir, en utilisant les techniques de l'analyse p-adique, de nouvelles familles de nombres algébriques, les ensembles S_q, qui ont également la propriété d'être fermés.

S'il reste de nombreux mystères au niveau même des questions qui ont motivé l'introduction des nombres de Pisot–Vijayaraghavan, leur intervention dans d'autres domaines des mathématiques semble encore plus mystérieuse:

– en analyse harmonique: ensembles d'unicité;

– en théorie des fonctions de variable complexe: généralisation du théorème de Polya sur les fonctions entières de type exponentiel;

– construction d'ensembles de difféomorphismes pseudo-Anosov; sans parler bien sûr de leur intervention dans d'autres branches de la théorie des nombres.

Si l'on ne peut dire que C. Pisot les ait toutes pressenties, du moins aura-t-il été le premier à sentir et à montrer qu'il s'agissait là d'un chapitre important des mathématiques.

*

A une époque où un nombre croissant de mathématiciens se spécialisaient de façon "pointue", il faut souligner la variété des recherches de C. Pisot, et peut-être plus encore son ouverture d'esprit vers des domaines scientifiques très divers. En particulier il a collaboré de façon fructueuse avec des biologistes et des physiciens. Les auteurs de ce texte évoquent avec un sourire nostalgique sa passion pour les papillons... Son enseignement enfin reflétait cette ouverture et son cours de techniques mathématiques pour la physique à l'Université Paris VI a certainement représenté une étape importante dans les rapports parfois difficiles entre les deux disciplines.

Ce ne sont là qu'incidences d'un "humanisme" dont l'homme plein d'énergie, mais modeste et parfois timide que nous avons connu ne s'est jamais départi.

Y. Amice, M.-J. Bertin, F. Bertrandias, A. Decomps, F. Dress, M. Grandet, M. Mendès France, G. Rauzy

ACTA ARITHMETICA
LI (1988)

Publications de Charles Pisot

1. *Sur une propriété caractéristique de certains entiers algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), p. 892–894.
2. *Sur certaines propriétés caractéristiques des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 203 (1936), p. 148–150.
3. *Sur la répartition modulo 1 des puissances successives d'un même nombre*, C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), p. 312–314.
4. *Sur la répartition modulo 1*, C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), p. 1853–1855.
5. *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques* (Thèse, Paris 23 mars 1938), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sér. 2, 7 (1938), p. 205–248.
6. *Un algorithme pour l'approximation simultanée de deux nombres réels*, C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938), p. 1069–1071.
7. *Sur quelques approximations rationnelles des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938), p. 1862–1864.
8. *Sur la répartition modulo 1*, Acta Arith. 3 (1939), p. 174–179.
9. (avec J. G. van der Corput) *Sur la discrépance modulo un*, Proc. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam 42 (1939), I, p. 476–486; II, p. 554–565; III, p. 713–722.
10. *Sur un problème de Waring généralisé*, Proc. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam 42 (1939), I, p. 346–354; II, p. 400–411; III, p. 566–572.
11. *Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946), p. 988–990.
12. *Sur les fonctions analytiques arithmétiques et presque arithmétiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946), p. 1027–1028.
13. *Répartition* (mod. 1) *des puissances successives des nombres réels*, Comment. Math. Helv. 19 (1946-47), p. 153–160.
14. *Propriétés arithmétiques des coefficients des séries de Taylor*, C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), p. 438–440.
15. *Démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers*, Séminaire Bourbaki (déc. 1949).
16. (avec J. Dufresnoy) *Prolongement analytique de la série de Taylor*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 68 (1951), p. 105–124.
17. (avec J. Dufresnoy) *Sur un problème de Siegel relatif à un ensemble fermé de nombres algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 235 (1952), p. 1592–1593.
18. (avec J. Dufresnoy) *Sur un point particulier de la solution d'un problème de Siegel*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), p. 30–31.
19. Collaboration au *Traité de Théorie des fonctions*, tome 1, *Principes, Méthodes générales de H. Milloux*, Gauthier-Villars, Paris 1953.
20. (avec J. Dufresnoy) *Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., Sér. 3, 70 (1953), p. 105–133.
21. (avec J. Dufresnoy) *Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Bull. Soc. Math. France, Sér. 2, 77 (1953), p. 129–136.
22. (avec R. Weil) *Sur la loi de Hardy en hérédité mendélienne*, Procès-verbaux Soc. Sci. Phys. Nat. Bordeaux (1948–53), p. 76–81.