ACTA ARITHMETICA
L (1988)

Eine Formel für die Koeffizientensumme von Potenzreihen mit Anwendung auf das Kreis- und Kugelproblem in total reellen algebraischen Zahlkörpern

von

ULRICH RAUSCH (Clausthal)

1. Einleitung. Gegeben sei eine für $\operatorname{Re} u > 0$ konvergente Potenzreihe

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-\nu u}.$$

Bekanntlich kann man, ausgehend von der Gleichung

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\pi i}^{c+\pi i} f(u) e^{\nu u} du \qquad (c > 0),$$

aus der Kenntnis des Verhaltens von f in der Nähe der Geraden $\operatorname{Re} u = 0$ Aussagen über die Koeffizienten a_ν gewinnen, etwa mit Hilfe der Hardy–Littlewoodschen Kreismethode.

Die in dieser Arbeit vorzustellende Summenformel liefert demgegenüber für die summatorische Funktion der a_ν eine Darstellung der Gestalt

$$\sum_{\nu \leqslant x} a_\nu = \int_0^\infty f\left(\frac{u}{x}\right) \Phi_\varepsilon(u)\, du + R_\varepsilon(x)$$

mit einem gewissen Kern Φ_ε, der von einem Parameter $\varepsilon > 0$ abhängt, und einem Rest $R_\varepsilon(x)$, der für nicht-ganzes $x > 1$ mit ε gegen Null strebt. Maßgebend ist hier also das Verhalten von f auf der positiv-reellen Achse.

Als Anwendung dieser Summenformel werden das Kugelproblem sowie seine Analoga in total reellen algebraischen Zahlkörpern betrachtet, was in letzterem Fall zu neuen Abschätzungen der Gitterreste führt.

Im einzelnen gliedert sich die Arbeit wie folgt:

§ 2 enthält Hilfssätze über Integrale, unter anderem die Auswertung eines von zwei Parametern abhängenden Integrals mittels der Sattelpunktmethode. Als vorteilhaft erweist sich hier die Einführung des Faktors $\exp(\varepsilon s^2)$, der die absolute Konvergenz aller vorkommenden Ausdrücke erzwingt, so daß sämtliche Vertauschungen von Grenzprozessen bei Zugrundelegung des Lebesgueschen Integralbegriffs ohne weiteres gerechtfertigt sind.

Die Summenformel für den rationalen Zahlkörper wird in § 3 aufgestellt und in § 4 auf das k-dimensionale Kugelproblem angewandt, wo als erzeugende Potenzreihe die k-te Potenz einer Thetareihe auftritt. Als Resultat ergibt sich eine absolut konvergente Variante der Identität von Hardy, Landau und Walfisz (vgl. [7], Satz 10.4.1), die im Vergleich zu ihrem Vorbild bequemer zu handhaben ist.

Der zweite Teil der Arbeit ist der Übertragung dieser Ergebnisse auf einen total reellen algebraischen Zahlkörper K vom Grade n gewidmet.

Nach vorbereitenden Hilfssätzen überwiegend arithmetischen Charakters in § 5 enthält § 6 die Summenformel für K, und in § 7 schließlich wird das k-dimensionale Kugelproblem in K betrachtet, also das Problem der asymptotischen Auswertung der Anzahl $A_k(x)$ von k-Tupeln $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ ganzer Zahlen aus K, die dem Ungleichungssystem

$$(\nu_1^{(p)})^2 + \ldots + (\nu_k^{(p)})^2 \leqslant x_p \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

genügen, wobei die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ positiv-reelle Variablen sind (der obere Index p bezeichnet die Konjugierten).

Zur analytischen Behandlung solcher Fragen stand bisher allein die Siegelsche Summenformel zur Verfügung, die das Zahlkörper-Analogon der Perronschen Formel für die Koeffizientensumme von Dirichletreihen darstellt. Mit ihrer Hilfe zeigte Schaal [3], [4] im Falle des Kreisproblems $(k = 2)$:

$$A_2(x) = \frac{\pi^n}{d} X + O(X^{\frac{n}{n+1}+\delta}).$$

für $X := x_1 \ldots x_n \geqslant 1$ und jedes $\delta > 0$; d ist die Diskriminante von K. Für $k \geqslant 3$, $n > 1$ waren meines Wissens bis jetzt keine Ergebnisse bekannt.

Bezeichnet ω_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel, so lautet unser Resultat

$$A_k(x) = \omega_k^n \left(\frac{X}{d}\right)^{k/2} + O(X^{\frac{k}{2} - \frac{k}{n(k-1)+2}+\delta}),$$

also speziell für $k = 2$:

$$A_2(x) = \frac{\pi^n}{d} X + O(X^{\frac{n}{n+2}+\delta}).$$

Ein Vergleich im Falle $n = 1$ zeigt, daß diese Verbesserung ungefähr dem Schritt vom Gaußschen zum Sierpińskischen Resultat beim klassischen Kreisproblem entspricht.

Ein Grund für den Erfolg der Methode scheint mir darin zu liegen, daß die hier als erzeugende Funktion dienende Thetareihe dem Gitterpunktproblem angemessener ist als die in der Siegelschen Summenformel auftretende Dirichletreihe, insofern nämlich, als bei ihrer Definition nur auf die Gitterstruktur der ganzen Zahlen aus K Bezug genommen wird und die dem Problem eigentlich fremde Theorie der Einheiten nicht wesentlich eingeht.

In weiteren Arbeiten gedenke ich, meine Untersuchungen auf das Ellipsoidproblem in beliebigen algebraischen Zahlkörpern sowie auf untere Restgliedabschätzungen auszudehnen.

Es sei zum Verständnis des Folgenden noch verabredet, daß eine Abhängigkeit der durch die Symbole O und $\ll$ implizierten Konstanten von Parametern entweder durch Indizierung explizit gekennzeichnet oder in der Formulierung des betreffenden Satzes ein für allemal erwähnt wird.

2. Hilfssätze über Integrale.

Zu $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\Phi(u) = \Phi_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{u^{s-1}}{\Gamma(s+1)} e^{\varepsilon s^2} ds \qquad (u > 0,\ \sigma \in \boldsymbol{R}), \tag{1}$$

wo die Integration über die vertikale Gerade $s = \sigma + it$, $-\infty < t < \infty$, erstreckt wird. Da der Integrand eine ganze Funktion von s ist und für $t \to \pm\infty$ genügend stark verschwindet, ist der Wert $\Phi(u)$ unabhängig von σ. Insbesondere folgt:

$$\Phi(u) \ll_{\sigma,\varepsilon} u^\sigma \qquad \text{für jedes } \sigma \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Weiter setzen wir

$$\chi(\alpha) := \begin{cases} 1 & (0 \leqslant \alpha < 1), \\ \frac{1}{2} & (\alpha = 1), \\ 0 & (\alpha > 1), \end{cases}$$

$$F(V) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_V^\infty e^{-v^2} dv \qquad (V \in \boldsymbol{R})$$

sowie $F(\infty) := 0$ und bemerken, daß $F(0) = 1$ und allgemein

$$\tfrac{1}{2} F(V) = \chi(e^V) - \big(\chi(e^V) - \tfrac{1}{2}\big) F(|V|) \qquad (V \in \boldsymbol{R}). \tag{3}$$

Hilfssatz 1.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u} \Phi(u)\, du = \chi(\alpha) - \big(\chi(\alpha) - \tfrac{1}{2}\big) F\left(\frac{|\log \alpha|}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) \qquad (\alpha \geqslant 0).$$

Beweis. Zunächst sei $\alpha > 0$. Einsetzen von (1) mit $\sigma = 1$ ergibt

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u} \Phi(u)\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{e^{\varepsilon s^2}}{\Gamma(s+1)} \Big\{ \int_0^\infty e^{-\alpha u} u^{s-1} du \Big\} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{e^{\varepsilon s^2}}{\Gamma(s+1)} \Gamma(s) \alpha^{-s} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} e^{\varepsilon s^2}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\alpha e^{v})\,e^{vs}\,dv\Big\}ds$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\alpha e^{v})\exp\Big(-\frac{v^2}{4\varepsilon}\Big)dv$$
$$= \frac{1}{2}F\Big(\frac{\log\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}\Big) = \chi(\alpha)-\big(\chi(\alpha)-\tfrac{1}{2}\big)F\Big(\frac{|\log\alpha|}{2\sqrt{\varepsilon}}\Big).$$

Hierbei wurde neben (3) die bekannte Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} e^{\varepsilon s^2+vs}\,ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\exp\Big(-\frac{v^2}{4\varepsilon}\Big)$$

benutzt.

Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung als Spezialfall $\beta = 0$ enthalten in

HILFSSATZ 2.

$$\int_{0}^{\infty} u^{-\beta}\Phi(u)\,du = \frac{e^{\varepsilon\beta^2}}{\Gamma(\beta+1)} \qquad (\beta\in \mathbf{R}).$$

Beweis.

$$\int_{0}^{\infty} u^{-\beta}\Phi(u)\,du$$
$$= \int_{0}^{1}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(\beta+1)}\frac{u^{s-\beta-1}}{\Gamma(s+1)}e^{\varepsilon s^2}\,ds\Big\}du + \int_{1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{(\beta-1)}\frac{u^{s-\beta-1}}{\Gamma(s+1)}e^{\varepsilon s^2}\,ds\Big\}du$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\Big\{\int_{(\beta+1)} - \int_{(\beta-1)}\Big\}\frac{e^{\varepsilon s^2}}{\Gamma(s+1)}\frac{ds}{s-\beta}$$
$$= \operatorname*{Res}_{s=\beta}\frac{e^{\varepsilon s^2}}{\Gamma(s+1)}\frac{1}{s-\beta} = \frac{e^{\varepsilon\beta^2}}{\Gamma(\beta+1)}. \ \blacksquare$$

Wir betrachten nun das Integral

(4) $$I := \int_{0}^{\infty} e^{-Bu}u^{\beta-2}\Phi(1/u)\,du \qquad (B \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0).$$

Einsetzen von (1) und Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt für $B > 0$

(5) $$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} G(s)\,ds \qquad (\sigma > -\beta)$$

mit

(6) $$G(s) := \frac{\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1-s)}B^{-s-\beta}e^{\varepsilon s^2}.$$

Es sei angemerkt, daß (5) im Falle $\beta > 0$, $-\beta < \sigma < -\beta/2$, auch für $\varepsilon = 0$ noch absolut konvergiert, so daß der Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ unter dem Integralzeichen erlaubt ist. Leichte Umformung ergibt dann

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} I = B^{-\beta/2}\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\beta/2)}\frac{2^{s-1}\Gamma\big(\frac{s}{2}+\frac{\beta}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{\beta}{2}-\frac{s}{2}+1\big)}(2\sqrt{B})^{-s}\,ds = B^{-\beta/2}J_\beta(2\sqrt{B}),$$

wo J_β die Besselfunktion vom Index β bezeichnet (siehe etwa [6], Formel (7.9.2); das in [1], Formel 6.422.6, auf der rechten Seite stehende Minuszeichen ist falsch).

Da wir aber später ε an andere Parameter koppeln wollen, müssen wir I sorgfältiger auswerten. Dies geschieht zunächst für $B \geqslant 1$ mittels der Sattelpunktmethode.

HILFSSATZ 3. *Für* $B \geqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ *ist*

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\varepsilon B}}{B^{\beta/2+1/4}}\cos\Big(2\sqrt{B}-\frac{\pi}{2}\beta-\frac{\pi}{4}\Big)+O_\beta\Big(\frac{e^{-\varepsilon B/2}}{B^{\beta/2+1/2}}\Big)+O_\beta\big(e^{-(\log^2 B)/4}\big).$$

Beweis. (a) *Asymptotische Entwicklung von* $G(s)$. Nach Stirling hat man gleichmäßig für $|\arg s| \leqslant \frac{9}{10}\pi$, $|s| \geqslant \frac{1}{4}$:

$$\log\Gamma(s) = (s-\tfrac{1}{2})\log s - s + \log\sqrt{2\pi} + O(1/|s|),$$

wobei die Zweige der Logarithmen festgelegt sind durch die Bedingung, daß sie für $s > 0$ reell seien. Hieraus folgt für $\beta \geqslant 0$:

$$\log\Gamma(\beta+s) - \{(\beta+s-\tfrac{1}{2})\log s - s + \log\sqrt{2\pi}\}$$
$$= (\beta+s-\tfrac{1}{2})\int_{s}^{\beta+s}\frac{dz}{z} - \beta + O\Big(\frac{1}{|\beta+s|}\Big)$$
$$= (\beta+s-\tfrac{1}{2})\Big\{\frac{\beta}{s}-\int_{0}^{\beta}\frac{u}{s(s+u)}\,du\Big\} - \beta + O\Big(\frac{1}{|\beta+s|}\Big)$$
$$= \beta(\beta-\tfrac{1}{2})\frac{1}{s} - (\beta+s-\tfrac{1}{2})\int_{0}^{\beta}\frac{u}{s(s+u)}\,du + O\Big(\frac{1}{|\beta+s|}\Big)$$
$$\ll_\beta \frac{1}{|s|} \qquad \text{für } |\arg s| \leqslant \tfrac{9}{10}\pi,\ |s| \geqslant \tfrac{1}{4},$$

wie man durch Unterscheidung der Fälle $|s| < 2\beta$, $|s| \geqslant 2\beta$ leicht einsieht. Da ferner

$$\sin \pi s = \frac{i}{2} e^{-\pi i s} \{1 - e^{2\pi i \sigma} \cdot e^{-2\pi t}\} = \frac{i}{2} e^{-\pi i s} \left\{1 + O\left(\frac{1}{t+1}\right)\right\} \qquad (t \geqslant 0)$$

gilt, erhält man insgesamt für die Funktion

$$G(s) = \Gamma(s)\,\Gamma(\beta+s) \cdot \frac{1}{\pi} \sin \pi s \cdot B^{-s-\beta} e^{\varepsilon s^2}$$

aus (6) die folgende asymptotische Entwicklung:

$$(7) \quad G(s) = iB^{-\beta} \exp\left(2s\left(\log \frac{s}{i\sqrt{B}} - 1\right) + (\beta-1)\log s + \varepsilon s^2\right) \cdot \left\{1 + O_\beta\left(\frac{1}{t+1}\right)\right\},$$

gültig im Bereich $0 \leqslant \arg s \leqslant \frac{9}{10}\pi$, $|s| \geqslant \frac{1}{4}$.

(b) *Wahl des Integrationsweges.* Durch (7) wird die Substitution $s \to \sqrt{B}\, s$ nahegelegt, durch die (5) übergeht in

$$(8) \qquad I = \frac{1}{2\pi} b^{-\beta} \int_{(\sigma)} H(s)\, ds \qquad (\sigma > -\beta/b),$$

wobei $b := \sqrt{B}$, $H(s) := -ib^{\beta+1} G(bs)$ gesetzt ist.

Nach (7) gilt im Bereich $0 \leqslant \arg s \leqslant \frac{9}{10}\pi$, $|s| \geqslant 1/(4b)$:

$$(9) \quad H(s) = \exp\left(2bs\left(\log \frac{s}{i} - 1\right) + (\beta-1)\log s + \varepsilon b^2 s^2\right) \cdot \left\{1 + O_\beta\left(\frac{1}{bt+1}\right)\right\};$$

wegen $G(\bar{s}) = \overline{G(s)}$ hat man ferner

$$(10) \qquad H(\bar{s}) = -\overline{H(s)}.$$

Mit einem reellen Parameter a, von dem wir einstweilen nur

$$(11) \qquad 1/(4b) \leqslant a \leqslant 1/4$$

voraussetzen, erklären wir nun folgende Wegstücke:

$$\begin{array}{lll} W_1: & s = a + it & (0 \leqslant t \leqslant a), \\ W_2: & s = (1+i)\varrho & (a \leqslant \varrho \leqslant 1/2), \\ W_3: & s = i + (-1+i)\varrho = -\varrho + i(\varrho+1) & (-1/2 \leqslant \varrho < \infty). \end{array}$$

Die Vereinigung der Kurve $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ mit ihrem Spiegelbild bezüglich der reellen Achse, das Ganze durchlaufen im Sinne wachsenden Imaginärteils, nehmen wir als neuen Integrationsweg W. Wir haben zunächst zu zeigen, daß

$$(12) \qquad I = \frac{1}{2\pi} b^{-\beta} J(W)$$

gilt, wobei wir für Wege W' allgemein

$$J(W') := \int_{W'} H(s)\, ds$$

setzen. Dazu wählen wir in (8) $\sigma = 1$ und betrachten einen Kreisbogen

$$C_R\colon\ s = Re^{i\theta}, \qquad \pi/3 < \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 < 3\pi/4,$$

vom Radius $R > 2$, wo $\theta_0 = \theta_0(R)$ und $\theta_1 = \theta_1(R)$ so bestimmt sind, daß C_R die Gerade $\sigma = 1$ mit W_3 verbindet. Auf C_R hat man

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{2bs(\log(s/i) - 1) &+ (\beta-1)\log s + \varepsilon b^2 s^2\} + \log R \\ &= 2bR\{\log(R/e) \cdot \cos\theta - (\theta - \pi/2)\sin\theta\} + \beta \log R + \varepsilon b^2 R^2 \cos 2\theta \\ &\leqslant \begin{cases} -c\varepsilon b^2 R^2 & (\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/8) \\ -cbR & (5\pi/8 < \theta \leqslant 3\pi/4) \end{cases} \end{aligned}$$

mit passender Konstante $c > 0$, wenn R genügend groß ist. Wegen (9) strebt also $J(C_R) \to 0$ für $R \to \infty$, und da aufgrund von (10) ein entsprechendes Resultat in der unteren Halbebene gilt, folgt (12). Ebenfalls wegen (10) gilt weiter

$$(13) \qquad I = \frac{1}{\pi} b^{-\beta} \operatorname{Re}\{J(W_1) + J(W_2) + J(W_3)\}.$$

(c) *Auswertung von $J(W_3)$.* Es sei $s = -\varrho + i(\varrho+1) \in W_3$, also $\varrho \geqslant -1/2$. Für die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) &:= -\operatorname{Re}\left\{s\left(\log \frac{s}{i} - 1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\varrho \log(2\varrho^2 + 2\varrho + 1) - \varrho + (\varrho+1) \operatorname{arctg} \frac{\varrho}{\varrho+1} \end{aligned}$$

gilt dann

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \qquad \varphi''(\varrho) = 2\frac{\varrho+1}{(\varrho+1)^2 + \varrho^2} \geqslant \frac{1}{\varrho+1},$$

also mit einem zwischen 0 und ϱ gelegenen ϱ^*:

$$\varphi(\varrho) = \frac{1}{2}\varphi''(\varrho^*)\varrho^2 \geqslant \frac{1}{2}\frac{\varrho^2}{\varrho^*+1} \geqslant \frac{1}{4}\frac{\varrho^2}{\varrho+1};$$

letzteres wegen $\varrho^* \leqslant 2\varrho + 1$. Nach (9) hat man somit auf W_3

$$H(s) \ll_\beta \exp\left(-\frac{b}{2}\frac{\varrho^2}{\varrho+1} + \tfrac{1}{2}(\beta-1)\log(\varrho^2 + (\varrho+1)^2) - \varepsilon b^2(2\varrho+1)\right),$$

also

$$H(s) \ll_\beta \exp\left(-\frac{b}{4}\frac{\varrho^2}{\varrho+1} - \varepsilon b^2(2\varrho+1)\right). \tag{14}$$

Zu $\Delta := \frac{1}{4} b^{-1/3}$ zerlegen wir nun W_3 in den durch $|\varrho| \leqslant \Delta$ charakterisierten Teil W_3^* und den (aus zwei Stücken bestehenden) Rest $W_3 \setminus W_3^* =: W_3^{**}$. Mit (14) folgt sofort

$$J(W_3^{**}) \ll_\beta \left(\int_{-1/2}^{-\Delta} + \int_{\Delta}^{1} + \int_{1}^{\infty}\right) \exp\left(-\frac{b}{4}\frac{\varrho^2}{\varrho+1}\right) d\varrho \ll \exp\left(-\frac{1}{200} b^{1/3}\right),$$

also reichlich

$$J(W_3) = J(W_3^*) + O_\beta(e^{-\log^2 b}). \tag{15}$$

Die Auswertung von $J(W_3^*)$ führen wir zunächst unter der Annahme

$$\varepsilon b^{5/3} \leqslant 1 \tag{16}$$

durch. Aus (9) erhält man

$$J(W_3^*) - \int_{W_3^*} \exp\left(2bs(\log(s/i) - 1) + (\beta-1)\log s + \varepsilon b^2 s^2\right) ds$$
$$\ll_\beta \frac{1}{b} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{-\varepsilon b^2(2\varrho+1)} d\varrho \ll \frac{1}{b} e^{-\varepsilon b^2/2}.$$

Die Entwicklung

$$\psi(s) = -i - \frac{i}{2}(s-i)^2 + O(|s-i|^3) \qquad (|s-i| \leqslant 1/2)$$

der Funktion $\psi(s) := s(\log(s/i) - 1)$ um den Punkt $s = i$ ergibt speziell für $s = i + (-1+i)\varrho \in W_3^*$:

$$\psi(s) = -i - \varrho^2 + O(|\varrho|^3);$$

der Punkt $s = i$ ist also ein Sattelpunkt von $\psi(s)$ und wird von W_3 in der Richtung des steilsten Abstiegs durchquert. Da ferner

$$\log s = \pi i/2 + O(|\varrho|), \qquad s^2 = -1 + O(|\varrho|) \qquad (s \in W_3^*)$$

gilt und $b\Delta^3 + \Delta + \varepsilon b^2 \Delta \ll 1$ ist wegen (16), erhält man

$$\int_{W_3^*} \exp\left(2bs(\log(s/i) - 1) + (\beta-1)\log s + \varepsilon b^2 s^2\right) ds$$
$$= (-1+i) \int_{-\Delta}^{\Delta} \exp\left(-2ib - 2b\varrho^2 + (\beta-1)\frac{\pi i}{2} - \varepsilon b^2 + O_\beta(b|\varrho|^3 + |\varrho| + \varepsilon b^2 |\varrho|)\right) d\varrho$$

$$= \sqrt{2} e^{-i(2b - \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{4}) - \varepsilon b^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^{-2b\varrho^2} \{1 + O_\beta(b|\varrho|^3 + |\varrho| + \varepsilon b^2 |\varrho|)\} d\varrho$$
$$= \sqrt{2} e^{-i(2b - \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{4}) - \varepsilon b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2b\varrho^2} d\varrho + O\left(\int_{\Delta}^{\infty} e^{-2b\varrho^2} d\varrho\right)$$
$$+ O_\beta\left(e^{-\varepsilon b^2} \int_0^\infty e^{-2b\varrho^2} (b\varrho^3 + \varrho + \varepsilon b^2 \varrho) d\varrho\right)$$
$$= \sqrt{\pi} \frac{e^{-\varepsilon b^2}}{b^{1/2}} e^{-i(2b - \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{4})} + O(e^{-\log^2 b}) + O_\beta\left(\frac{1}{b} e^{-\varepsilon b^2/2}\right),$$

also insgesamt

$$J(W_3^*) = \sqrt{\pi} \frac{e^{-\varepsilon b^2}}{b^{1/2}} e^{-i(2b - \frac{\pi}{2}\beta - \frac{\pi}{4})} + O_\beta\left(\frac{1}{b} e^{-\varepsilon b^2/2}\right) + O_\beta(e^{-\log^2 b}). \tag{17}$$

Ist nun (16) nicht erfüllt, dann ergibt (14)

$$J(W_3^*) \ll_\beta e^{-\varepsilon b^2/2} \ll e^{-\log^2 b},$$

so daß (17) in diesem Fall trivialerweise gilt.

(d) *Abschätzung von* $J(W_2)$. Für $s = \sqrt{2} e^{\pi i/4} \varrho \in W_2$ $(a \leqslant \varrho \leqslant 1/2)$ gilt

$$\mathrm{Re}\{s(\log(s/i) - 1)\} = \varrho(\log\varrho + \log\sqrt{2} - 1 + \pi/4) < \tfrac{2}{3}\varrho\log\varrho \leqslant \tfrac{2}{3} a\log a;$$

letzteres wegen $a \leqslant 1/4$, denn $\varrho\log\varrho$ fällt bzw. wächst monoton, je nachdem $\varrho \leqslant 1/e$ oder $\varrho \geqslant 1/e$ ist, und $\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$.

Aufgrund von (11) ist (9) anwendbar; damit folgt

$$J(W_2) \ll_\beta \int_a^{1/2} \exp\left(\tfrac{4}{3} ba\log a + (\beta-1)\log\varrho\right) d\varrho \leqslant e^{\frac{4}{3}ba\log a} \int_a^1 \frac{d\varrho}{\varrho},$$

also

$$J(W_2) \ll_\beta \exp\left(\tfrac{4}{3} ba\log a + \log\log(1/a)\right). \tag{18}$$

(e) *Abschätzung von* $J(W_1)$. Für $s = a + it \in W_1$ $(0 \leqslant t \leqslant a)$ gilt

$$\mathrm{Re}\{s(\log(s/i) - 1)\} = a\log(\sqrt{a^2+t^2}) - a + t\,\mathrm{arc\,tg}(a/t) \leqslant a\log(\sqrt{2}\,a).$$

Wiederum mit (9) folgt

$$J(W_1) \ll_\beta \int_0^a \exp\left(2ba\log(\sqrt{2}\,a) + (\beta-1)\log(\sqrt{a^2+t^2}) + \varepsilon b^2 a^2\right) dt$$
$$\ll_\beta \exp\left(2ba\log(\sqrt{2}\,a) + \varepsilon b^2 a^2\right) \cdot \int_0^a a^{\beta-1}\, dt,$$

also

$$J(W_1) \ll_\beta \exp(2ba\log(\sqrt{2}a)+\varepsilon b^2 a^2). \tag{19}$$

(f) *Wahl von a und Schluß.* Für hinreichend großes b, etwa $b > b_0$, ist die Wahl

$$a := (\log b)/b$$

mit (11) verträglich, und es gilt

$$\tfrac{4}{3} ba\log a+\log\log\left(\frac{1}{a}\right) < -\log^2 b, \quad 2ba\log(\sqrt{2}a)+\varepsilon b^2 a^2 < -\log^2 b,$$

also wegen (18) und (19):

$$J(W_1)+J(W_2) \ll_\beta e^{-\log^2 b}. \tag{20}$$

Für $1 \leqslant b \leqslant b_0$ folgt (20) aus (18) und (19) durch die Wahl $a := 1/4$. Die Behauptung ergibt sich nun aus (13), (15), (17) und (20). ∎

Für kleine Werte von B gestattet I die Entwicklung in eine asymptotische Reihe:

HILFSSATZ 4. *Für $0 \leqslant B \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, $N \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ gilt:*

$$I = \sum_{\nu=0}^{N} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{e^{\varepsilon(\beta+\nu)^2}}{\Gamma(\beta+\nu+1)} B^\nu + O_{\beta,N}(B^{N+1}).$$

Beweis. Der Fall $B = 0$ ist bereits durch Hilfssatz 2 erledigt; es sei also $0 < B \leqslant 1$. Zu $\varrho_N := \beta+N+3/2$ betrachten wir die Wege

W_1': $s = -\varrho_N+it \quad (0 \leqslant t \leqslant \varrho_N)$,

W_2': $s = (-1+i)\varrho \quad (\varrho \geqslant \varrho_N)$.

W' sei die Vereinigung der Kurve $W_1' \cup W_2'$ mit ihrem Spiegelbild bezüglich der reellen Achse, durchlaufen im Sinne wachsenden Imaginärteils. Fast wörtlich wie in Teil (b) des Beweises von Hilfssatz 3 zeigt man, daß man in (5) den Integrationsweg durch W' ersetzen darf, wenn man die Residuen des Integranden an den Stellen $s_\nu = -(\beta+\nu)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, N+1)$ berücksichtigt. Diese sind gegeben durch

$$\operatorname*{Res}_{s=s_\nu} G(s) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{e^{\varepsilon(\beta+\nu)^2}}{\Gamma(\beta+\nu+1)} B^\nu.$$

Direkt aus (6) ersieht man, daß

$$\int_{W_1'} G(s)\,ds \ll_{\beta,N} B^{\varrho_N-\beta} = B^{N+3/2},$$

und es gilt für $s = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}\varrho \in W_2'$:

$$\operatorname{Re}\left\{2s\left(\log\frac{s}{i\sqrt{B}}-1\right)\right\} = 2\varrho(-\log\varrho+\tfrac{1}{2}\log B+\tfrac{1}{2}\log 2-1+\pi/4)$$
$$< -2\varrho\log\varrho+\varrho_N\log B,$$

also nach (7):

$$\int_{W_2'} G(s)\,ds \ll_\beta B^{\varrho_N-\beta}\int_1^\infty e^{-2\varrho\log\varrho+(\beta-1)\log(\sqrt{2}\varrho)}\,d\varrho \ll_\beta B^{N+3/2}.$$

Wegen $G(\bar{s}) = \overline{G(s)}$ hat man somit insgesamt

$$I = \sum_{\nu=0}^{N+1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{e^{\varepsilon(\beta+\nu)^2}}{\Gamma(\beta+\nu+1)} B^\nu + O_{\beta,N}(B^{N+3/2}).$$

Steckt man hier noch den letzten Term der Summe ins Restglied, so erhält man die Behauptung. ∎

3. Die Summenformel im rationalen Zahlkörper. Für reelles x sei

$$\langle x\rangle := \min_{\substack{\nu\in\mathbf{Z}\\ \nu\neq x}} |x-\nu|,$$

der Abstand von x zur nächstgelegenen von x verschiedenen ganzen Zahl.

SATZ 1. *Gegeben sei eine Folge (a_ν) komplexer Zahlen, und es sei*

$$A^*(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \chi\left(\frac{\nu}{x}\right) \quad (x \geqslant 1).$$

Mit einer auf $[0, \infty)$ monoton wachsenden Funktion ψ und zwei Konstanten D_0, $D \geqslant 0$ gelte

$$|a_\nu| \leqslant \psi(\nu) \leqslant D_0(\nu+1)^D \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

so daß also die Potenzreihe

$$f(u) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-\nu u}$$

für $u > 0$ absolut konvergiert. Dann gilt für $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$:

$$A^*(x) = \int_0^\infty f\left(\frac{u}{x}\right)\Phi(u)\,du + O\left(\psi(2x)(1+x\sqrt{\varepsilon})\exp\left(-\frac{\langle x\rangle^2}{40\varepsilon x^2}\right)\right)$$
$$+O\left(x^{D+1}\exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon}\right)\right),$$

wobei die O-Konstanten nur von D_0 und D abhängen.

Insbesondere hat man also für jedes feste $x \geqslant 1$

$$A^*(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^\infty f\left(\frac{u}{x}\right)\Phi(u)\,du.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gilt (die Vertauschbarkeit von Summation und Integration ist durch (2) und (21) gewährleistet):

$$A^*(x) - \int_0^\infty f\left(\frac{u}{x}\right)\Phi(u)\,du = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu \left(\chi\left(\frac{\nu}{x}\right) - \frac{1}{2}\right) F\left(\frac{|\log(\nu/x)|}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\ll \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq x}}^\infty |a_\nu| \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon}\log^2\frac{\nu}{x}\right),$$

denn $F(V) \ll \exp(-\frac{1}{2}V^2)$ für $V \geqslant 0$.

Es gibt eine nur von D abhängige Konstante $D_1 > 2$ derart, daß die Funktion

$$u^D \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon}\log^2\frac{u}{x}\right)$$

für $u \geqslant D_1 x$ monoton fällt. Folglich ist

$$\sum_{\nu \geqslant D_1 x + 1} |a_\nu| \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon}\log^2\frac{\nu}{x}\right) \ll \int_{D_1 x}^\infty u^D \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon}\log^2\frac{u}{x}\right)du$$

$$= x^{D+1}\int_{D_1}^\infty u^D \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon}\log^2 u\right)du$$

$$\ll x^{D+1}\exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon}\right).$$

Weiter hat man

$$\Big(\sum_{0\leqslant \nu < x/2} + \sum_{2x < \nu < D_1 x + 1}\Big)|a_\nu| \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon}\log^2\frac{\nu}{x}\right) \ll x^{D+1}\exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon}\right),$$

und wegen

$$\log^2\frac{\nu}{x} \geqslant \frac{1}{4}\frac{(x-\nu)^2}{x^2} \qquad (\tfrac{1}{2}x \leqslant \nu \leqslant 2x)$$

gilt für die verbleibende Summe:

$$\sum_{\substack{x/2 \leqslant \nu \leqslant 2x\\ \nu \neq x}} |a_\nu| \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon}\log^2\frac{\nu}{x}\right) \ll \psi(2x) \sum_{x/2 \leqslant \nu \leqslant 2x} \exp\left(-\frac{1}{32\varepsilon}\frac{(x-\nu)^2}{x^2}\right)$$

$$\leqslant \psi(2x)\exp\left(-\frac{\langle x\rangle^2}{40\varepsilon x^2}\right)\sum_{\nu=-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{(x-\nu)^2}{160\varepsilon x^2}\right).$$

Die unendliche Reihe hier ist

$$\ll 1 + \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{160\varepsilon x^2}\right)du \ll 1 + x\sqrt{\varepsilon};$$

damit folgt die Behauptung. ∎

4. Eine Variante der Identität von Hardy, Landau und Walfisz. Für $k \in \mathbf{Z}$, $k \geqslant 2$ sei

$$a_k(\nu) := \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_k)\in \mathbf{Z}^k\\ \nu_1^2+\ldots+\nu_k^2=\nu}} 1 \qquad (\nu \in \mathbf{Z},\ \nu \geqslant 0),$$

die Anzahl der Darstellungen von ν als Summe von k Quadraten, sowie

$$A_k(x) := \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant x} a_k(\nu) \qquad (x \geqslant 1).$$

Im folgenden machen wir Gebrauch von der Ungleichung

$$a_k(\nu) \ll_{k,\delta} (\nu+1)^{k/2-1+\delta} \qquad (\delta > 0), \tag{22}$$

die im nächsten Paragraphen allgemein für total reelle algebraische Zahlkörper bewiesen werden wird. Wir setzen ferner

$$S_k := \frac{1}{\pi}x^{(k-1)/4}\sum_{\nu=1}^\infty a_k(\nu)\frac{e^{-\varepsilon\pi^2\nu x}}{\nu^{(k+1)/4}}\cos\left(\pi\left(2\sqrt{x\nu} - \frac{k+1}{4}\right)\right)$$

und bezeichnen mit ω_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel:

$$\omega_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)}.$$

Satz 2. *Für $x^{-2} \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ und jedes $\delta > 0$ gilt*

$$A_k(x) = \omega_k x^{k/2} + S_k + O(x^{k/2+\delta}\sqrt{\varepsilon}),$$

wobei die O-Konstante nur von k und δ abhängt.

Bemerkungen. 1. Der Einfachheit halber unterdrücke ich die bekannten Verschärfungen von (22), die darin bestehen, daß der Faktor $(\nu+1)^\delta$ durch eine passende Funktion geringerer Größenordnung ersetzt wird (beispielsweise für $k \geqslant 5$ durch 1). Jede dieser Verschärfungen schlägt sich unmittelbar in einer entsprechenden Verkleinerung des O-Terms von Satz 2 nieder.

2. Zu welchen Restgliedabschätzungen beim Kreis- und Kugelproblem Satz 2 letztlich führt, hängt natürlich von den Ergebnissen über Exponentialsummen ab, die man zur Auswertung von S_k heranzieht. Allerdings ist hier das Verfahren gegenüber dem üblichen Weg insofern vereinfacht, als sich die parallele Betrachtung des gemittelten Gitterrests erübrigt.

Die bei trivialer Abschätzung des Cosinus erzielten Resultate sind als Spezialfälle in Satz 4 enthalten.

Beweis. Nach (22) ist

$$A_k^*(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_k(\nu)\chi\left(\frac{\nu}{x}\right) = A_k(x) + O(x^{k/2-1+\delta}),$$

und Satz 1 ergibt

$$A_k^*(x) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)\Phi(u)\,du + O(x^{k/2+\delta}\sqrt{\varepsilon})$$

mit

$$f(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_k(\nu)e^{-\nu u} = \theta^k(u/\pi),$$

wobei die Thetafunktion

$$\theta(v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\nu^2 v} \qquad (v > 0)$$

bekanntlich der Relation

$$\theta(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}\theta\left(\frac{1}{v}\right)$$

genügt. Durch Einsetzen der hieraus folgenden Gleichung

$$f\left(\frac{u}{x}\right) = \left(\frac{\pi x}{u}\right)^{k/2} f\left(\frac{\pi^2 x}{u}\right)$$

und Vertauschung von Integration und Summation erhält man

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)\Phi(u)\,du = (\pi x)^{k/2}\int_0^{\infty} u^{-k/2}\Phi(u)\,du$$

$$+(\pi x)^{k/2}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_k(\nu)\int_0^{\infty} e^{-\pi^2\nu x/u}u^{-k/2}\Phi(u)\,du.$$

Hier ergibt sich der erste Summand rechter Hand nach Hilfssatz 2 zu

$$\omega_k x^{k/2} e^{\varepsilon k^2/4} = \omega_k x^{k/2} + O(x^{k/2}\varepsilon),$$

während die übrigen Integrale nach der Substitution $u \to u^{-1}$ vom Typ (4) mit $\beta = k/2$, $B = \pi^2\nu x$ sind, so daß mit Hilfssatz 3 folgt:

$$(\pi x)^{k/2}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_k(\nu)\int_0^{\infty} e^{-\pi^2\nu x/u}u^{-k/2}\Phi(u)\,du$$

$$= S_k + O\left(x^{(k-2)/4}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_k(\nu)\frac{e^{-\varepsilon\pi^2\nu x/2}}{\nu^{(k+2)/4}}\right) + O\left(x^{k/2}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_k(\nu)e^{-(\log^2(\pi^2\nu x))/4}\right).$$

Wegen (22) und $\varepsilon \geqslant x^{-2}$ ist hier der erste O-Term

$$\ll x^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\frac{k}{4}-\frac{3}{2}+\delta}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\pi^2\nu x} \ll x^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}(\varepsilon x)^{-\frac{k}{4}+\frac{1}{2}-\delta} \leqslant x^{\frac{k}{2}-1+\delta},$$

und für den zweiten O-Term gilt

$$x^{k/2}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_k(\nu)e^{-(\log^2(\pi^2\nu x))/4} \leqslant x^{k/2}e^{-(\log^2 x)/4}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_k(\nu)e^{-(\log^2(\pi^2\nu))/4} \ll 1;$$

es folgt die Behauptung. ∎

5. Weitere Hilfssätze. Gegeben sei ein algebraischer Zahlkörper K vom Grade $[K:Q] = n$. Die r_1 reellen und $2r_2$ komplexen konjugierten Körper $K^{(p)}$ seien in der üblichen Weise numeriert, und es sei $r = r_1 + r_2 - 1$. Mit N oder N_k bezeichnen wir die Norm, mit S die Spur in K.

HILFSSATZ 5. *Im Falle $r > 0$ sei U eine torsionsfreie Untergruppe von endlichem Index in der Einheitengruppe von K; im Falle $r = 0$ sei $U = \{1\}$. Zu beliebig gegebenen reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n > 0$ mit $x_{p+r_2} = x_p$ für $p = r_1+1, \ldots, r_1+r_2$ existiert dann ein $\eta \in U$ derart, daß*

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \ll_U |\eta^{(p)}|\,x_p \ll_U (x_1 \ldots x_n)^{1/n} \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

Der Beweis verläuft analog zu dem von Hilfssatz 6 aus [5].

HILFSSATZ 6. *Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{r} \neq (0)$ aus K sei $d_K(\mathfrak{r})$ die Anzahl der Idealteiler von $\mathfrak{r}$; d bezeichne die gewöhnliche (rationale) Teilerfunktion. Dann gilt*

$$d_K(\mathfrak{r}) \leqslant \{d(N(\mathfrak{r}))\}^n.$$

Beweis. Der Fall $\mathfrak{r} = (1)$ ist klar; also sei $\mathfrak{r} \neq (1)$, und zwar

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \ldots \mathfrak{p}_l^{m_l} \qquad (m_j \geqslant 1)$$

mit paarweise verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ aus K. Wegen der Multiplikativität von d_K und d dürfen wir annehmen, daß die $\mathfrak{p}_j$ alle in derselben rationalen Primzahl p aufgehen, etwa

$$N(\mathfrak{p}_j) = p^{f_j}, \quad f_j \geqslant 1 \quad (j = 1, \ldots, l).$$

Bekanntlich ist $f_1 + \ldots + f_l \leqslant n$, also insbesondere $l \leqslant n$. Es folgt

$$d_K(\mathfrak{r}) = (m_1+1)\ldots(m_l+1) \leqslant (m_1 f_1 + \ldots + m_l f_l + 1)^n = \{d(N(\mathfrak{r}))\}^n. \; ∎$$

Von jetzt an sei K *total reell*. Eine Zahl $\nu \in K$ heißt total positiv, $\nu \succ 0$, wenn $\nu^{(p)} > 0$ für $p = 1, \ldots, n$; wir schreiben $\nu \succcurlyeq 0$ (oder auch $0 \preccurlyeq \nu$), wenn $\nu \succ 0$ oder $\nu = 0$ gilt.

Zu einem ganzen oder gebrochenen Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ aus K und einer ganzen rationalen Zahl $k \geqslant 2$ definieren wir

$$a_k(\nu; \mathfrak{a}) := \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_k) \\ \nu_1,\ldots,\nu_k \in \mathfrak{a} \\ \nu_1^2+\ldots+\nu_k^2 = \nu}} 1 \quad (\nu \in K), \tag{23}$$

die Anzahl der Darstellungen der Zahl ν als Summe von k Quadraten von Zahlen aus $\mathfrak{a}$. Offenbar ist $a_k(\nu; \mathfrak{a}) = 0$, wenn nicht $0 \preccurlyeq \nu \in \mathfrak{a}^2$ gilt. Im Falle $\mathfrak{a} = (1)$ schreiben wir kurz

$$a_k(\nu; (1)) =: a_k(\nu).$$

Hilfssatz 7. *Für jedes $\delta > 0$ gilt*

$$a_2(\nu) \ll (N(\nu)+1)^{\delta} \quad (\nu \succcurlyeq 0),$$

wobei die $\ll$-Konstante nur von K und δ abhängt.

Beweis. Wegen $a_2(0) = 1$ können wir die Untersuchung auf ganze Zahlen $\nu \succ 0$ aus K beschränken. Wir betrachten den Erweiterungskörper $K(i)$. Es ist $[K(i):K] = 2$, und die $2n$ Konjugierten über Q von $\gamma_1 + i\gamma_2 \in K(i)$ $(\gamma_1, \gamma_2 \in K)$ sind gegeben durch

$$\gamma_1^{(p)} + i\gamma_2^{(p)}, \quad \gamma_1^{(p)} - i\gamma_2^{(p)} \quad (p = 1, \ldots, n),$$

wobei der obere Index p die Konjugation in bezug auf K bezeichnet. In $K(i)$ zerfällt die Gleichung $\nu = \nu_1^2 + \nu_2^2$ in

$$\nu = \nu_1^2 + \nu_2^2 = (\nu_1 + i\nu_2)(\nu_1 - i\nu_2), \tag{24}$$

so daß wir jeder Lösung (ν_1, ν_2) von (24) den Teiler $\nu_1 + i\nu_2$ von ν in $K(i)$ zuordnen können. Um festzustellen, wie viele dieser Teiler jeweils dasselbe Hauptideal erzeugen, betrachten wir zwei Lösungen (ν_1, ν_2) und (μ_1, μ_2) von (24) derart, daß $\nu_1 + i\nu_2$ und $\mu_1 + i\mu_2$ assoziiert sind, etwa $\mu_1 + i\mu_2 = H(\nu_1 + i\nu_2)$ mit einer Einheit $H \in K(i)$. Es folgt

$$\nu = (\mu_1 + i\mu_2)(\mu_1 - i\mu_2) = H(\nu_1 + i\nu_2) \cdot \bar{H}(\nu_1 - i\nu_2) = |H|^2 \nu,$$

also $|H| = 1$. Da man denselben Schluß für alle Konjugierten von H durchführen kann, haben diese sämtlich den Betrag 1, und folglich gehört H zur endlichen Menge der Einheitswurzeln von $K(i)$. Somit ist $a_2(\nu)$ beschränkt durch ein konstantes Vielfaches der Anzahl der Hauptidealteiler von (ν) in $K(i)$, also

$$a_2(\nu) \ll d_{K(i)}((\nu)) \leqslant \{d(N(\nu)^2)\}^{2n} \ll N(\nu)^{\delta}$$

wegen Hilfssatz 6 und $N_{K(i)}(\nu) = N_K(\nu)^2$. ∎

Bemerkung. Wie das Beispiel $K = Q(\sqrt{3})$, $e^{2\pi i/3} \in K(i)$ zeigt, kann $K(i)$ außer ± 1, $\pm i$ noch weitere Einheitswurzeln enthalten.

Hilfssatz 8. *Für jedes $\delta > 0$ gilt*

$$a_k(\nu; \mathfrak{a}) \ll (N(\nu)+1)^{k/2-1+\delta} \quad (\nu \succcurlyeq 0),$$

wo die $\ll$-Konstante nur von K, $\mathfrak{a}$, k und δ abhängt.

Beweis. Es gibt eine natürliche Zahl m derart, daß $m\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal ist; damit folgt

$$a_k(\nu; \mathfrak{a}) = a_k(m^2\nu; m\mathfrak{a}) \leqslant a_k(m^2\nu),$$

so daß es genügt, die Behauptung für $a_k(\nu)$ zu beweisen, wobei wir wegen Hilfssatz 7 gleich $k \geqslant 3$ voraussetzen können. Da ferner $a_k(0) = 1$ sowie $a_k(\eta^2\nu) = a_k(\nu)$ für jede Einheit $\eta \in K$ gilt, dürfen wir uns nach Hilfssatz 5 auf solche ganzen $\nu \succ 0$ aus K beschränken, für die

$$N(\nu)^{1/n} \ll \nu^{(p)} \ll N(\nu)^{1/n} \quad (p = 1, \ldots, n)$$

ist. In der Gleichung

$$\nu_1^2 + \ldots + \nu_k^2 = \nu$$

bestehen bei jeder Wahl der Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{k-2}$ genau

$$a_2(\nu - \nu_1^2 - \ldots - \nu_{k-2}^2) \ll N(\nu)^{\delta}$$

Möglichkeiten für das Paar (ν_{k-1}, ν_k). Jede der ganzen Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{k-2}$ ist ihrerseits den Ungleichungen

$$|\nu_j^{(p)}| \leqslant \sqrt{\nu^{(p)}} \quad (p = 1, \ldots, n)$$

unterworfen, so daß für sie nicht mehr als

$$\prod_{p=1}^{n} (2\sqrt{\nu^{(p)}} + 1) \ll \sqrt{N(\nu)}$$

Werte in Frage kommen. Es folgt die Behauptung. ∎

Hilfssatz 9. *Für Y, $\varkappa \geqslant D > 0$ gilt*

$$\sum_{\eta \succ 0} \prod_{p=1}^{n} (Y\eta^{(p)} + 1)^{-\varkappa} \ll Y^{-n\varkappa} \log^r(Y+1),$$

wobei die Summation über alle total positiven Einheiten $\eta \in K$ erstreckt wird. Die $\ll$-Konstante hängt nur von K und D ab.

Beweis. Der Fall $r = 0$, d.h. $K = Q$, ist trivial; also sei $r \geqslant 1$, und $\eta_1, \ldots, \eta_r$ sei ein System total positiver Grundeinheiten von K. Zu $m_1, \ldots, m_r \in Z$ definieren wir

$$Q_p := \sum_{q=1}^{r} m_q \log \eta_q^{(p)} \quad (p = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Wegen $\det(\log \eta_q^{(p)})_{p,q=1,\dots,r} \neq 0$ läßt sich das System der ersten r Gleichungen (25) nach den m_q auflösen, und eine einfache Rechnung ergibt

$$\sum_{p=1}^{r} |Q_p| \geqslant c_1 \sum_{q=1}^{r} |m_q| \tag{26}$$

mit einer Körperkonstanten $c_1 > 0$. Wir behaupten nun

$$Q_p \geqslant c_2 \sum_{q=1}^{r} |m_q| \quad \text{für mindestens ein } p \in \{1, \dots, n\}, \tag{27}$$

wo $c_2 = c_1 r^{-2}$. Wegen (26) ist nämlich

$$|Q_{p_0}| \geqslant \frac{c_1}{r} \sum_{q=1}^{r} |m_q| \quad \text{für ein } p_0 \in \{1, \dots, r\};$$

wäre also (27) falsch, so wäre

$$Q_{p_0} \leqslant -\frac{c_1}{r} \sum_{q=1}^{r} |m_q|$$

und damit

$$Q_n = -\sum_{p=1}^{r} Q_p > \frac{c_1}{r} \sum_{q=1}^{r} |m_q| - (r-1) c_2 \sum_{q=1}^{r} |m_q| = c_2 \sum_{q=1}^{r} |m_q|$$

im Widerspruch zur Annahme.

Aus (27) ergibt sich für die Spur von $\eta = \eta_1^{m_1} \dots \eta_r^{m_r}$:

$$S(\eta) = \sum_{p=1}^{n} e^{Q_p} > \exp\{c_2 \sum_{q=1}^{r} |m_q|\};$$

es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\eta>0} \prod_{p=1}^{n} (Y\eta^{(p)}+1)^{-\varkappa} &= \sum_{\eta>0} \prod_{p=1}^{n} (Y+\eta^{(p)})^{-\varkappa} \\ &\leqslant \sum_{m_1,\dots,m_r=-\infty}^{\infty} \Big(Y^n + Y^{n-1} \exp\{c_2 \sum_{q=1}^{r} |m_q|\}\Big)^{-\varkappa} \\ &\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{r-1} (Y^n + Y^{n-1} e^{c_2 m})^{-\varkappa}, \end{aligned}$$

denn die Lösungsanzahl von $\sum_{q=1}^{r} |m_q| = m$ ist $\ll (m+1)^{r-1}$.

Aufspalten der Summe bei $m = \left[\frac{2}{c_2} \log(Y+1)\right]$ liefert nun die Behauptung. ∎

6. Die Summenformel in total reellen Zahlkörpern. K sei weiterhin ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ mit $x_1, \dots, x_n > 0$ setzen wir $X := x_1 \dots x_n$ und

$$\langle x \rangle := X \cdot \min_{1 \leqslant p \leqslant n} \min_{\substack{0 \leqslant \nu \leqslant 2x \\ \nu^{(p)} \neq x_p}} \left| \frac{\nu^{(p)}}{x_p} - 1 \right|,$$

wobei das innere Minimum erstreckt wird über alle ganzen $\nu \in K$ mit $0 \leqslant \nu^{(q)} \leqslant 2x_q$ für $q = 1, \dots, n$ und $\nu^{(p)} \neq x_p$. Im Falle $K = \boldsymbol{Q}$ reduziert sich diese Definition auf die von § 3. Für total positive Einheiten $\eta \in K$ gilt offenbar

$$\langle \eta x \rangle = \langle x \rangle \tag{28}$$

mit $\eta x := (\eta^{(1)} x_1, \dots, \eta^{(n)} x_n)$.

Satz 3. *Die komplexwertige zahlentheoretische Funktion $a(\nu)$ sei definiert für alle ganzen $\nu \succcurlyeq 0$ aus K und besitze die Invarianzeigenschaft*

$$a(\eta\nu) = a(\nu) \qquad (\eta \in U), \tag{29}$$

wobei U eine Untergruppe von endlichem Index in der Gruppe der total positiven Einheiten von K ist.

Mit einer auf $[0, \infty)$ monoton wachsenden Funktion ψ und zwei Konstanten D_0, $D \geqslant 0$ gelte ferner

$$|a(\nu)| \leqslant \psi(N(\nu)) \leqslant D_0 (N(\nu)+1)^D \qquad (\nu \succcurlyeq 0), \tag{30}$$

so daß also die Potenzreihe

$$f(u_1, \dots, u_n) := \sum_{\nu \succcurlyeq 0} a(\nu) \exp\{-\sum_{p=1}^{n} \nu^{(p)} u_p\}$$

für $u_1, \dots, u_n > 0$ absolut konvergiert.

Dann gestattet die summatorische Funktion

$$A^*(x) := \sum_{\nu \succcurlyeq 0} a(\nu) \prod_{p=1}^{n} \chi\left(\frac{\nu^{(p)}}{x_p}\right)$$

für $X \geqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ die Darstellung

$$\begin{aligned} A^*(x) = \int_0^{\infty} \dots \int f\left(\frac{u_1}{x_1}, \dots, \frac{u_n}{x_n}\right) \Phi(u_1) \dots \Phi(u_n)\, du_1 \dots du_n \\ + O\left(\psi(2^n X)(1 + X\sqrt{\varepsilon}) \exp\left(-\frac{\langle x \rangle^2}{40\varepsilon X^2}\right)\right) \\ + O\left(X^{D+1} \exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \tag{31}$$

wobei die O-Konstanten nur von K, U, D_0 und D abhängen.

Offensichtlich ist Satz 1 hierin als Spezialfall $K = Q$ enthalten.

Beweis. Wegen (28) und (29) bleiben beide Seiten von (31) beim Übergang von x zu ηx $(\eta \in U)$ unverändert. Aufgrund von Hilfssatz 5 können wir daher voraussetzen, daß

$$X^{1/n} \ll x_p \ll X^{1/n} \quad (p = 1, \ldots, n).$$

Nach Hilfssatz 1 hat man für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ (der Summationsindex T durchlaufe alle Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$):

$$\prod_{p=1}^{n} \int_0^\infty e^{-\alpha_p u_p} \Phi(u_p)\, du_p$$

$$= \sum_T (-1)^{|T|} \prod_{p\notin T} \chi(\alpha_p) \cdot \prod_{p\in T} \left\{ (\chi(\alpha_p) - \tfrac{1}{2}) F\left(\frac{|\log \alpha_p|}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \right\}$$

$$= \prod_{p=1}^{n} \chi(\alpha_p) + O\left(\sum_{T \neq \emptyset} \prod_{p\notin T} \chi(\alpha_p) \cdot \prod_{p\in T} \left\{ |\chi(\alpha_p) - \tfrac{1}{2}| \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \alpha_p \right) \right\} \right).$$

Hier setzen wir $\alpha_p = \nu^{(p)}/x_p$, multiplizieren mit $a(\nu)$, summieren über alle ganzen $\nu \geqslant 0$ und vertauschen Summation und Integration, was wegen (2) und (30) erlaubt ist; das ergibt

$$A^*(x) = \int_0^\infty \ldots \int f\left(\frac{u_1}{x_1}, \ldots, \frac{u_n}{x_n} \right) \Phi(u_1) \ldots \Phi(u_n)\, du_1 \ldots du_n + O\left(\sum_{T\neq\emptyset} \sum\nolimits_T \right)$$

mit

$$\sum\nolimits_T := \sum_{\nu \geqslant 0} |a(\nu)| \prod_{p\notin T} \chi\left(\frac{\nu^{(p)}}{x_p} \right) \cdot \prod_{p\in T} \left\{ \left| \chi\left(\frac{\nu^{(p)}}{x_p} \right) - \frac{1}{2} \right| \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \frac{\nu^{(p)}}{x_p} \right) \right\}.$$

Es sei nun $T \subset \{1, \ldots, n\}$ beliebig, fest mit $T \neq \emptyset$, etwa $1 \in T$. Wir wollen die Summe $\sum_T$ abschätzen und spalten sie dazu in Teilsummen $\sum_T(M)$ auf, die aus $\sum_T$ durch Einschränkung von ν auf gewisse Mengen M hervorgehen.

Zunächst betrachten wir die ganzen $\nu \succ 0$ mit $\nu^{(q)} > 2x_q$ für mindestens ein q; diese liefern nur dann einen Beitrag, wenn $q \in T$, etwa $q = 1$. Es sei also

$$M_1 := \{\nu \succ 0 \mid \nu^{(1)} > 2x_1\}.$$

Für gegebene $l_1, \ldots, l_n \in Z$ genügt jeweils höchstens ein ganzes $\nu \in K$ dem Ungleichungssystem

$$l_p \leqslant \nu^{(p)} < l_p + 1 \quad (p = 1, \ldots, n);$$

ferner wissen wir aus dem Beweis von Satz 1, daß

$$\sum_{l > 2x_p} l^D \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \frac{l}{x_p} \right) \ll x_p^{D+1} \exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon} \right).$$

Damit folgt:

$$\sum\nolimits_T(M_1) \ll \sum_{\nu\in M_1} \prod_{p\notin T} \left\{ (\nu^{(p)}+1)^D \chi\left(\frac{\nu^{(p)}}{x_p} \right) \right\} \cdot \prod_{p\in T} \left\{ (\nu^{(p)}+1)^D \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \frac{\nu^{(p)}}{x_p} \right) \right\}$$

$$\ll \left\{ \prod_{p\notin T} \sum_{0 \leqslant l \leqslant x_p} (l+2)^D \right\} \cdot \left\{ \sum_{l > 2x_1} l^D \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \frac{l}{x_1} \right) \right\}$$

$$\times \prod_{2 \leqslant p \in T} \left\{ \sum_{0 \leqslant l \leqslant 2x_p} (l+2)^D + \sum_{l > 2x_p} l^D \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \frac{l}{x_p} \right) \right\}$$

$$\ll X^{D+1} \exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon} \right).$$

Es bleibt

$$M_2 := \{\nu \geqslant 0 \mid \nu^{(p)} \leqslant 2x_p \ (p = 1, \ldots, n)\}$$

zu untersuchen. Wie bei Satz 1 schließt man

$$\sum\nolimits_T(M_2) \leqslant \psi(2^n X) \sum_{\nu\in M_2} \prod_{p\in T} \left| \chi\left(\frac{\nu^{(p)}}{x_p} \right) - \frac{1}{2} \right| \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \frac{\nu^{(p)}}{x_p} \right)$$

$$\leqslant \psi(2^n X) \sum_{\substack{\nu\in M_2 \\ \nu^{(1)} \neq x_1}} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon} \log^2 \frac{\nu^{(1)}}{x_1} \right)$$

$$\ll X^D \exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon} \right) \sum_{\substack{\nu\in M_2 \\ \nu^{(1)} < x_1/2}} 1$$

$$+ \psi(2^n X) \sum_{\substack{\nu\in M_2 \\ x_1/2 \leqslant \nu^{(1)} \neq x_1}} \exp\left(-\frac{1}{32\varepsilon} \frac{(x_1 - \nu^{(1)})^2}{x_1^2} \right)$$

$$\ll X^{D+1} \exp\left(-\frac{1}{20\varepsilon} \right)$$

$$+ \psi(2^n X) \exp\left(-\frac{\langle x \rangle^2}{40\varepsilon X^2} \right) \sum_{\nu\in M_2} \exp\left(-\frac{1}{160\varepsilon} \left(\frac{\nu^{(1)}}{x_1} - 1 \right)^2 \right).$$

Da für $l = 0, 1, 2, \ldots$ jeweils höchstens zwei Zahlen $\nu \in M_2$ der Ungleichung

$$\frac{l}{2^{n-1} X} \leqslant \left| \frac{\nu^{(1)}}{x_1} - 1 \right| < \frac{l+1}{2^{n-1} X}$$

genügen, folgt hier weiter

$$\sum_{\nu\in M_2} \exp\left(-\frac{1}{160\varepsilon}\left(\frac{\nu^{(1)}}{x_1}-1\right)^2\right) \ll \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{40\cdot 4^n X^2 \varepsilon} l^2\right) \ll 1+X\sqrt{\varepsilon}$$

und damit die Behauptung. ■

7. Zum Kugelproblem in total reellen Zahlkörpern.

Satz 4. *Es sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n, $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein ganzes oder gebrochenes Ideal aus K und $k \geqslant 2$ ganz rational. Zu positiven reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ sei $A_k(x;\mathfrak{a})$ definiert als die Anzahl der k-Tupel $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ von Zahlen aus $\mathfrak{a}$, die dem Ungleichungssystem*

$$(\nu_1^{(p)})^2 + \ldots + (\nu_k^{(p)})^2 \leqslant x_p \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

genügen.

Für $X := x_1 \ldots x_n \geqslant 1$ und jedes $\delta > 0$ gilt dann

$$A_k(x;\mathfrak{a}) = \omega_k^n \left(\frac{X}{dN(\mathfrak{a})^2}\right)^{k/2} + O\left(X^{\frac{k}{2}-\frac{k}{n(k-1)+2}+\delta}\right),$$

wo $\omega_k = \pi^{k/2}\Gamma(\frac{1}{2}k+1)^{-1}$ das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel und d die Diskriminante von K bezeichnet. Die O-Konstante hängt nur von K, $\mathfrak{a}$, k und δ ab.

Beweis. Zunächst sei $\mathfrak{a}$ ganz. Wir betrachten

$$A_k^*(x;\mathfrak{a}) := \sum_{\nu \geqslant 0} a_k(\nu;\mathfrak{a})\,\chi\left(\frac{\nu^{(1)}}{x_1}\right)\ldots\chi\left(\frac{\nu^{(n)}}{x_n}\right),$$

summiert über alle ganzen $\nu \geqslant 0$ aus K, wo $a_k(\nu;\mathfrak{a})$ durch (23) definiert ist. Aus Hilfssatz 8 folgert man leicht

$$A_k(x;\mathfrak{a}) = A_k^*(x;\mathfrak{a}) + O(X^{k/2-1+\delta}),$$

und Satz 3 ergibt für $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$:

$$A_k^*(x;\mathfrak{a}) = \int_0^{\infty}\!\!\ldots\int \theta^k\left(\frac{u_1}{\pi x_1}, \ldots, \frac{u_n}{\pi x_n};\mathfrak{a}\right)\Phi(u_1)\ldots\Phi(u_n)\,du_1\ldots du_n$$
$$+O(X^{k/2-1+\delta}\{1+X\sqrt{\varepsilon}\})$$

mit der für $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v_1, \ldots, v_n > 0$, erklärten Thetafunktion

$$\theta(v;\mathfrak{a}) = \sum_{\nu\in\mathfrak{a}} \exp\{-\pi \sum_{p=1}^{n} (\nu^{(p)})^2 v_p\}.$$

Für diese besteht nach [2], Satz 160, die Transformationsformel

$$\theta(v;\mathfrak{a}) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})\sqrt{d}\sqrt{v_1\ldots v_n}}\,\theta\left(\frac{1}{v};\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right),$$

wo $\mathfrak{d}$ die Differente von K bezeichnet. Damit erhält man nach leichter Umformung für obiges Integral den Ausdruck

$$\left(\frac{\pi^n X}{dN(\mathfrak{a})^2}\right)^{k/2} \sum_{0\leqslant\nu\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-2}} a_k\left(\nu;\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)\prod_{p=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-\pi^2\nu^{(p)}x_p u}\,u^{k/2-2}\,\Phi\left(\frac{1}{u}\right)du.$$

Hier hat der Term mit $\nu = 0$ nach Hilfssatz 2 den Wert

$$\omega_k^n\left(\frac{X}{dN(\mathfrak{a})^2}\right)^{k/2} e^{\varepsilon k^2 n/4} = \omega_k^n\left(\frac{X}{dN(\mathfrak{a})^2}\right)^{k/2} + O(X^{k/2}\varepsilon),$$

und für $\nu \succ 0$ gilt den Hilfssätzen 3 und 4 zufolge mit $B = \pi^2\nu^{(p)}x_p$:

$$\int_0^{\infty} e^{-Bu}\,u^{k/2-2}\,\Phi\left(\frac{1}{u}\right)du \ll \begin{cases} e^{-\varepsilon B/2}B^{-(k+1)/4} + e^{-(\log^2 B)/4} & (B \geqslant 1),\\ 1 & (B \leqslant 1)\end{cases}$$
$$\ll \varepsilon^{-(k-1)/4-3\delta}(B+1)^{-k/2-3\delta} \quad \text{in jedem Fall.}$$

Es folgt, wenn man noch Hilfssatz 8 heranzieht:

$$\left(\frac{\pi^n X}{dN(\mathfrak{a})^2}\right)^{k/2} \sum_{0<\nu\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-2}} a_k\left(\nu;\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)\prod_{p=1}^{n}\int_0^{\infty} e^{-\pi^2\nu^{(p)}x_p u}\,u^{k/2-2}\,\Phi\left(\frac{1}{u}\right)du$$
$$\ll X^{k/2}\varepsilon^{-n(k-1)/4-3n\delta} \sum_{0<\nu\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-2}} N(\nu)^{k/2-1+\delta}\prod_{p=1}^{n}(\nu^{(p)}x_p+1)^{-k/2-3\delta}$$
$$\ll X\varepsilon^{-n(k-1)/4-3n\delta} \sum_{0<\nu\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-2}} \prod_{p=1}^{n}(\nu^{(p)}x_p+1)^{-1-2\delta}.$$

Da sich $(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-2}$ durch Multiplikation mit einer geeigneten natürlichen Zahl in ein ganzes Ideal überführen läßt, ändert es nichts an der Größenordnung, wenn wir ν in der letzten Summe nur die total positiven *ganzen* Zahlen von K durchlaufen lassen. Diese teilen wir in Klassen von assoziierten Zahlen ein und wählen gemäß Hilfssatz 6 aus jeder Klasse einen Repräsentanten ν mit

$$(XN(\nu))^{1/n} \ll \nu^{(p)}x_p \ll (XN(\nu))^{1/n} \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{0<\nu\in(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-2}} \prod_{p=1}^{n}(\nu^{(p)}x_p+1)^{-1-2\delta} \ll \sum_{\substack{\nu\succ 0\\(\nu)}}\sum_{\eta\succ 0}\prod_{p=1}^{n}\left((XN(\nu))^{1/n}\eta^{(p)}+1\right)^{-1-2\delta},$$

wobei die äußere Summe über besagtes Repräsentantensystem und die innere über alle total positiven Einheiten $\eta \in K$ erstreckt wird. Nach Hilfssatz 9 können wir dies weiter abschätzen durch

$$\sum_{\substack{\nu \succ 0 \\ (\nu)}} (XN(\nu))^{-1-2\delta} \log^r\left((XN(\nu))^{1/n}+1\right) \ll \frac{1}{X} \sum_{\substack{\nu \succ 0 \\ (\nu)}} \frac{1}{N(\nu)^{1+\delta}} \leqslant \frac{1}{X} \zeta_K(1+\delta) \ll \frac{1}{X},$$

wo ζ_K die Dedekindsche Zetafunktion von K bezeichnet. Wir haben somit insgesamt

$$A_k(x;\, \mathfrak{a}) = \omega_k^n \left(\frac{X}{dN(\mathfrak{a})^2}\right)^{k/2} + O\left(X^{k/2-1+\delta}\{1+X\sqrt{\varepsilon}\}\right) + O\left(\varepsilon^{-n(k-1)/4-3n\delta}\right),$$

und die Wahl

$$\varepsilon := \tfrac{1}{2} X^{-2k/(n(k-1)+2)}$$

ergibt, wenn man noch δ durch $\delta/(6n)$ ersetzt, die Behauptung für ganzes $\mathfrak{a}$.

Ist aber $\mathfrak{a}$ ein gebrochenes Ideal, so ist $m\mathfrak{a}$ ganz bei passendem natürlichem m, und wegen $A_k(x;\, \mathfrak{a}) = A_k(m^2 x;\, m\mathfrak{a})$ folgt aus dem soeben Bewiesenen die Behauptung auch in diesem Fall.

Literatur

[1] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York and London 1965.

[2] E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Nachdruck, New York 1970.

[3] W. Schaal, *Übertragung des Kreisproblems auf reell-quadratische Zahlkörper*, Math. Ann. 145 (1962), S. 273–284.

[4] — *On the expression of a number as the sum of two squares in totally real algebraic number fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), S. 529–537.

[5] C. L. Siegel, *Additive Theorie der Zahlkörper II*, Math. Ann. 88 (1923), S. 184–210.

[6] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford University Press, Oxford 1967.

[7] A. Walfisz, *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Warszawa 1957.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Erzstraße 1
D-3392 Clausthal-Zellerfeld
Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen am 1.8.1986 (1664)

ACTA ARITHMETICA
L (1988)

Correction to the paper "Densities for 3-class ranks of pure cubic fields", Acta Arith. 46 (1986), pp. 227–242

by

FRANK GERTH III (Austin, Tex.)

Since we are considering the case where $3 \nmid g_L$ in Equation (2.3), we need $n \equiv \pm 1 \pmod 9$ in Equation (2.4). This condition on n imposes restrictions that invalidate Lemma 3.1. However, Lemma 3.1 can be omitted because it is not used elsewhere in the paper.

In Equation (3.11), in order to guarantee that $n = p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t} \equiv \pm 1 \pmod 9$, we insert $\delta_{a_1}(p_1)$ after $\sum_{a_1=1}^{2}$. In Lemma 3.2, we multiply the right side of the equation by $\frac{1}{3}$ to account for $\delta_{a_1}(p_1)$. Then we must also multiply the right sides of Formulas (4.1) through (4.4) by $\frac{1}{3}$. Equation (4.5) is correct because $d_{t,c}$ depends on the quotient of $|S_{t,c;x}|$ and $|S_{t;x}|$, and hence the $\frac{1}{3}$ factors cancel out. Hence no change is necessary in the statements of the theorems and propositions in the paper.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TEXAS
Austin, Texas 78712
U.S.A.

Received on 16.2.1987 (1709)