ACTA ARITHMETICA
L (1988)

Über die Anzahl quadratvoller Zahlen in kurzen Intervallen und ein verwandtes Gitterpunktproblem

von

PETER GEORG SCHMIDT (Marburg)

1. Einleitung. Eine natürliche Zahl q heiße *quadratvoll*, wenn jeder Primteiler p von q mindestens zweimal in q aufgeht: $p|q \Rightarrow p^2|q$. $Q(x)$ sei die Anzahl der quadratvollen Zahlen $\leqslant x$.

P. Shiu [7] zeigte

$$\sum_{\substack{x<q\leqslant x+h\\ p|q\Rightarrow p^2|q}} 1 = Q(x+h)-Q(x) \sim \frac{\zeta(3/2)}{2\zeta(3)} x^{\theta} \quad (x\to\infty) \tag{1.1}$$

für $0.1526 \leqslant \theta < 1/2$ und $h := x^{1/2+\theta}$. In [6] konnte ich den Gültigkeitsbereich von (1.1) auf $68/451 < \theta < 1/2$ $(68/451 < 0.1508)$ ausdehnen.

In dieser Note wird (1.1) für

$$\frac{1}{7}-\frac{2}{7575} \leqslant \theta < \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{7}-\frac{2}{7575} < 0.1426\right) \tag{1.2}$$

bewiesen; die untere θ-Schranke von P. Shiu also um etwa 1/100 verkleinert.

(1.1), (1.2) ist eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 2 und 3. Satz 2 ist ein Gitterpunktsatz, der auf Abschätzungen zweidimensionaler Exponentialsummen beruht.

2. Bezeichnungen. Für $x, y \in \mathbf{R}$, $x \geqslant 1$, sei(1)

$$Q(x) := \# \{q \in \mathbf{N} |\ q \leqslant x;\ p \text{ prim},\ p|q \Rightarrow p^2|q\},$$
$$D_{2,3}(x) := \# \{(m, n) \in \mathbf{N}^2 |\ m^2 n^3 \leqslant x\},$$
$$\Delta_{2,3}(x) := D_{2,3}(x) - \zeta(\tfrac{3}{2})\, x^{1/2} - \zeta(\tfrac{2}{3})\, x^{1/3},$$
$$D_{2,3,6}(x) := \# \{(m, n, k) \in \mathbf{N}^3 |\ m^2 n^3 k^6 \leqslant x\},$$

(1) $\#\ M$ sei die Anzahl der Elemente der Menge M.

$$\Delta_{2,3,6}(x) := D_{2,3,6}(x) - \zeta(3)\zeta(\tfrac{3}{2})\, x^{1/2} - \zeta(2)\zeta(\tfrac{2}{3})\, x^{1/3} - \zeta(\tfrac{1}{2})\zeta(\tfrac{1}{3})\, x^{1/6},$$

$$\psi(y) := y - [y] - \tfrac{1}{2}.$$

3. Exponentenpaare. „Exponentenpaare" gewinnen bei der Abschätzung gewisser Exponentialsummen zunehmend an Bedeutung. Wegbereitend waren u.a. J. G. van der Corput [1], E. Phillips [4], E. C. Titchmarsh [10], B. R. Srinivasan [8] und G. Kolesnik [3]. Ich werde Srinivasansche Exponentenpaare verwenden.

Das Dreieck $D := \{(x_0, x_1) \in \boldsymbol{R}^2 |\ 0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 - x_0 \leqslant \frac{1}{6}\}$ mit den Ecken $(0, 0)$, $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$, $(0, \frac{1}{6})$ wird durch die geradentreuen projektiven Abbildungen

$$A\colon (x_0, x_1) \to \left(\frac{x_0}{2+4x_0}, \frac{x_0+x_1}{2+4x_0}\right)$$

und

$$AB\colon (x_0, x_1) \to \left(\frac{1-2x_1}{8-8x_1}, \frac{2-2x_0-2x_1}{8-8x_1}\right)$$

in sich abgebildet; denn die A- und die AB-Bilder der Ecken von D liegen, wie man mühelos nachrechnet, in D:

(3.1) $$A\colon D \to D, \qquad AB\colon D \to D.$$

Definition. EP sei die kleinste konvexe Teilmenge des $\boldsymbol{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(0, 0) \in EP,$$

$$(x_0, x_1) \in EP \Rightarrow A(x_0, x_1) \in EP, \quad AB(x_0, x_1) \in EP.$$

Aus (3.1) folgt $EP \subset D$, insbesondere

(3.2) $$0 \leqslant 2x_0 \leqslant x_1 \leqslant \tfrac{1}{3} \quad \text{für alle } (x_0, x_1) \in EP.$$

Hilfssatz 1. *Die Elemente von EP sind „Exponentenpaare der Dimension 2" gemäß B. R. Srinivasan* [8], *Definition* 2. *Ich werde sie kurz „Exponentenpaare" nennen.*

Beweis. Aus [8], Definition 2, folgt unmittelbar, daß die Menge der Exponentenpaare konvex und $(0, 0)$ ein Exponentenpaar ist. Nach [8], Theorem 4 und Theorem 8′, sind mit (x_0, x_1) auch $A(x_0, x_1)$ und $AB(x_0, x_1)$ Exponentenpaare.

4. Ein Gitterpunktproblem.

Satz 1. *Ist* $x \geqslant 2$, $(\lambda_0, \lambda_1) \in EP$ *ein festes Exponentenpaar und*

$$\delta := \frac{2}{5} \cdot \frac{\lambda_1 - 2\lambda_0}{14(1-\lambda_1) - (\lambda_1 - 2\lambda_0)},$$

so gilt

$$\Delta_{2,3,6}(x) \ll (x^{(1-\delta)/7} + x^{3/22}) \log^2 x.$$

Bemerkung. $(\lambda_0, \lambda_1) = (0, 0)$ liefert bereits

$$\Delta_{2,3,6}(x) \ll x^{1/7} \log^2 x.$$

Der Beweis des Satzes 1 stützt sich auf die beiden folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 2 ([9], Theorem 5; siehe auch [8], S. 285, Zeilen 9–19). *Sind die Konstanten* $\varrho, \sigma > 0$, *ist* $z > 0$, $M \geqslant \frac{1}{2}$, $N \geqslant \frac{1}{2}$, $B := \{(m, n) \in \boldsymbol{N}^2 |\ M < m \leqslant 2M,\ N < n \leqslant 2N,\ m > n,\ m^{1+\varrho} n^{\sigma} \leqslant z\}$, $F := zM^{-\varrho} N^{-\sigma}$, $M \ll F$, $(s_0, s_1) \in EP$ *ein festes Exponentenpaar und* $s := s_1 - s_0$, *so gilt*

$$\sum_{(m,n)\in B} \psi(zm^{-\varrho} n^{-\sigma}) \ll (F^{1-2s} M^{1+4s_0} N^{3-4s_1})^{1/(3-2s)} + (FM)^{1/4} N + F^{-1/2} MN.$$

Eine Verallgemeinerung von [5], Satz 1, ist

Hilfssatz 3 ([2], Satz 5; [11], Satz 1). *Ist* $x \geqslant 1$, (α, β, γ) *eine Permutation des Tripels* (2, 3, 6) *und*

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x) := \sum_{\substack{m^\alpha + \beta n^\gamma \leqslant x \\ m > n}} \psi\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right),$$

so gilt

$$\Delta_{2,3,6}(x) = -\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)} S_{\alpha,\beta,\gamma}(x) + O(x^{1/11}).$$

Beweis des Satzes 1. Sei $(\lambda_0, \lambda_1) \in EP$ ein beliebiges aber festes Exponentenpaar. Dann sind auch

$$(l_0, l_1) := A^2 B(\lambda_0, \lambda_1) = \left(\frac{1-2\lambda_1}{4(5-6\lambda_1)}, \frac{3-2\lambda_0-4\lambda_1}{4(5-6\lambda_1)}\right) \in EP$$

und

$$(r_0, r_1) := (AB)^2(\lambda_0, \lambda_1) = \left(\frac{1+\lambda_0-\lambda_1}{4(3+\lambda_0-3\lambda_1)}, \frac{5+2\lambda_0-4\lambda_1}{8(3+\lambda_0-3\lambda_1)}\right) \in EP$$

Exponentenpaare. Aus (3.2) folgt

$$9l_0 + 2l_1 - \frac{3}{4} = -\frac{\lambda_0 + 2\lambda_1}{5 - 6\lambda_1} \leqslant 0$$

und

$$9r_0 + 2r_1 - \frac{3}{4} = \frac{\frac{5}{4} + 2\lambda_0 - \lambda_1}{3 + \lambda_0 - 3\lambda_1} > 0.$$

Die Gerade $9x_0+2x_1=3/4$ schneidet demnach die Verbindungsstrecke der Exponentenpaare (l_0, l_1) und (r_0, r_1). Da EP konvex ist, ist der Schnittpunkt

$$(4.1)\quad (s_0, s_1)=\left(\frac{5(1-\lambda_1)-(\lambda_1-2\lambda_0)}{100(1-\lambda_1)-4(\lambda_1-2\lambda_0)}, \frac{15(1-\lambda_1)+3(\lambda_1-2\lambda_0)}{100(1-\lambda_1)-4(\lambda_1-2\lambda_0)}\right)\in EP$$

ein Exponentenpaar, das die Relation

$$(4.2)\qquad 9s_0+2s_1=\tfrac{3}{4}$$

erfüllt. Ferner genügt (s_0, s_1) wegen (3.2) der Ungleichung

$$(4.3)\qquad s:=s_1-s_0=\frac{5(1-\lambda_1)+2(\lambda_1-2\lambda_0)}{50(1-\lambda_1)-2(\lambda_1-2\lambda_0)}\geqslant\frac{5(1-\lambda_1)}{50(1-\lambda_1)}=\frac{1}{10}.$$

Nun sei (α, β, γ) eine Permutation des Tripels (2, 3, 6) und

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x, M, N):=\sum_{\substack{m^\alpha+\beta n^\gamma\leqslant x\\ m>n\\ M<m\leqslant 2M\\ N<n\leqslant 2N}}\psi\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right).$$

Ist die Summe $S_{\alpha,\beta,\gamma}(x, M, N)$ nicht leer, so ist

$$(4.4)\qquad M\geqslant\tfrac{1}{2},\quad N\geqslant\tfrac{1}{2},\quad N/M<2\ll 1$$

und

$$(4.5)\qquad M^{\alpha+\beta}N^\gamma<x.$$

Letzteres ist äquivalent zu

$$(4.6)\qquad F:=(xM^{-\beta}N^{-\gamma})^{1/\alpha}>M.$$

Zur Abschätzung von $S_{\alpha,\beta,\gamma}(x, M, N)$ wende ich Hilfssatz 2 mit $\varrho:=\beta/\alpha$, $\sigma:=\gamma/\alpha$, $z:=x^{1/\alpha}$ und $F=(xM^{-\beta}N^{-\gamma})^{1/\alpha}$ an. Die Voraussetzungen sind wegen (4.1), (4.4) und (4.6) erfüllt. Man erhält

$$(4.7)\qquad S_{\alpha,\beta,\gamma}(x, M, N)$$
$$\ll(F^{1-2s}M^{1+4s_0}N^{3-4s_1})^{1/(3-2s)}+(FM)^{1/4}N+F^{-1/2}MN.$$

Ich behandle die Terme rechts einzeln, zuerst die beiden letzten. Aus (4.4), (4.5), $\alpha\geqslant 2$ und $\gamma\leqslant 6$ folgt

$$(4.8)\qquad (FM)^{1/4}N=x^{\frac{1}{4\alpha}}(M^{\alpha+\beta}N^\gamma)^{\frac{3}{22}-\frac{1}{4\alpha}}\left(\frac{N}{M}\right)^{1-\frac{3\gamma}{22}}\ll x^{3/22}$$

und

$$(4.9)\qquad F^{-1/2}MN=x^{-\frac{1}{2\alpha}}(M^{\alpha+\beta}N^\gamma)^{\frac{3}{22}+\frac{1}{2\alpha}}\left(\frac{N}{M}\right)^{1-\frac{3\gamma}{22}}\ll x^{3/22}.$$

Den Hauptterm

$$(4.10)\qquad H:=(F^{1-2s}M^{1+4s_0}N^{3-4s_1})^{1/(3-2s)}$$

setze ich unter Berücksichtigung der Relation (4.2) in die zu (4.8) und (4.9) analoge Form

$$(4.11)\qquad H=\left\{x^{11(1-2s)}(M^{\alpha+\beta}N^\gamma)^{\alpha(5-6s)-11(1-2s)}\left(\frac{N}{M}\right)^{\alpha(6-\gamma)(5-6s)}\right\}^{1/(11\alpha(3-2s))}.$$

Wegen der aus (3.2) und (4.3) resultierenden Ungleichung $1/10\leqslant s\leqslant 1/3$ und wegen $\alpha\geqslant 2$ und $\gamma\leqslant 6$ ist $\alpha(5-6s)-11(1-2s)\geqslant 2(5-6s)-11(1-2s)$ $=10s-1\geqslant 0$ und $\alpha(6-\gamma)(5-6s)\geqslant 0$. Daher folgt aus (4.4), (4.5) und (4.11)

$$H\ll x^{(5-6s)/(11(3-2s))}.$$

Setzt man für s den Ausdruck (4.3) ein, so erhält man

$$(4.12)\qquad H\ll x^{(1-\delta)/7}\quad\text{mit}\quad\delta=\frac{2}{5}\cdot\frac{\lambda_1-2\lambda_0}{14(1-\lambda_1)-(\lambda_1-2\lambda_0)},$$

und (4.7)–(4.10) und (4.12) ergeben

$$(4.13)\qquad S_{\alpha,\beta,\gamma}(x, M, N)\ll x^{(1-\delta)/7}+x^{3/22}.$$

Da man für jede Permutation (α, β, γ) des Tripels (2, 3, 6) die in Hilfssatz 3 auftretende Summe $S_{\alpha,\beta,\gamma}(x)$ in $O(\log^2 x)$ Summen der Form $S_{\alpha,\beta,\gamma}(x, M, N)$ zerlegen kann, folgt schließlich aus (4.13) und Hilfssatz 3 die Behauptung des Satzes 1.

Setzt man in Satz 1

$$(\lambda_0, \lambda_1):=A^2B(AB)^2(A^2B)^3(0, 0)=\left(\frac{4061}{105884}, \frac{3509}{26471}\right),$$

so erhält man

$$\delta=\frac{2}{5}\cdot\frac{2957}{639979}>\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{1515}=7\cdot\frac{2}{7575}$$

und somit

Satz 2. *Für $x\to\infty$ gilt*

$$\Delta_{2,3,6}(x)=o(x^{\frac{1}{7}-\frac{2}{7575}}).$$

5. Quadratvolle Zahlen. Den Zusammenhang zwischen (1.1), (1.2) und Satz 2 enthält

Satz 3. *Aus $27/205<\vartheta<1/2$ und $\Delta_{2,3,6}(x)=o(x^\vartheta)$ folgt*

$$Q(x+h)-Q(x) \sim \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{2\zeta(3)} x^{\theta}$$

für $\vartheta \leqslant \theta < 1/2$ *und* $h := x^{1/2+\theta}$.

Zum Beweis des Satzes 3 benötige ich

HILFSSATZ 4 ([6], Satz 1). *Für* $x \geqslant 1$ *gilt*

$$\Delta_{2,3}(x) \ll x^{27/205}.$$

Beweis des Satzes 3. Da sich jede quadratvolle Zahl q eindeutig in der Form $q = m^2 r^3$ mit quadratfreiem r schreiben läßt, gilt

$$Q(x) = \sum_{m^2 r^3 \leqslant x} \mu^2(r) = \sum_{m^2 r^3 \leqslant x} \sum_{nk^2 = r} \mu(k) = \sum_{m^2 n^3 k^6 \leqslant x} \mu(k),$$

und daher für $1 \leqslant t \leqslant x^{1/12}$

$$(5.1) \qquad Q(x+h)-Q(x) = \sum_{\substack{x < m^2 n^3 k^6 \leqslant x+h \\ k \leqslant t}} \mu(k) + O\Big(\sum_{\substack{x < m^2 n^3 k^6 \leqslant x+h \\ k > t}} 1\Big).$$

Mit den in § 2 vereinbarten Bezeichnungen gelten nun die folgenden Identitäten

$$(5.2) \qquad \sum_{\substack{m^2 n^3 k^6 \leqslant x \\ k \leqslant t}} \mu(k) = \sum_{k \leqslant t} \mu(k) D_{2,3}\left(\frac{x}{k^6}\right)$$
$$= \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} x^{1/2} + \frac{\zeta(\frac{2}{3})}{\zeta(2)} x^{1/3} - \zeta(\tfrac{3}{2}) x^{1/2} \sum_{k>t} \frac{\mu(k)}{k^3} - \zeta(\tfrac{2}{3}) x^{1/3} \sum_{k>t} \frac{\mu(k)}{k^2}$$
$$+ \sum_{k \leqslant t} \mu(k) \Delta_{2,3}(x/k^6)$$

und

$$(5.3) \qquad \sum_{\substack{m^2 n^3 k^6 \leqslant x \\ k > t}} 1 = D_{2,3,6}(x) - \sum_{k \leqslant t} D_{2,3}(x/k^6)$$
$$= \zeta(\tfrac{3}{2}) x^{1/2} \sum_{k>t} \frac{1}{k^3} + \zeta(\tfrac{2}{3}) x^{1/3} \sum_{k>t} \frac{1}{k^2} + \zeta(\tfrac{1}{2}) \zeta(\tfrac{1}{3}) x^{1/6}$$
$$+ \Delta_{2,3,6}(x) - \sum_{k \leqslant t} \Delta_{2,3}(x/k^6).$$

Wegen $1 \leqslant t \leqslant x^{1/12}$, $(x+h)^{1/2} - x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{\theta} \cdot \{1 + O(x^{\theta - 1/2})\} \ll x^{\theta}$, $(x+h)^{1/3} - x^{1/3} \ll x^{\theta - 1/6}$ und $(x+h)^{1/6} - x^{1/6} \ll x^{\theta - 1/3}$ folgt aus (5.2), (5.3), Hilfssatz 4 und $\Delta_{2,3,6}(x) = o(x^{\vartheta})$

$$\sum_{\substack{x < m^2 n^3 k^6 \leqslant x+h \\ k \leqslant t}} \mu(k) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{2\zeta(3)} x^{\theta} \cdot \{1 + O(x^{\theta - 1/2} + t^{-2})\} + O\Big(\sum_{k \leqslant t} (x/k^6)^{27/205}\Big)$$

und

$$\sum_{\substack{x < m^2 n^3 k^6 \leqslant x+h \\ k > t}} 1 = O(x^{\theta} t^{-2}) + o(x^{\vartheta}) + O\Big(\sum_{k \leqslant t} (x/k^6)^{27/205}\Big),$$

und daher nach (5.1)

$$Q(x+h)-Q(x) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{2\zeta(3)} x^{\theta} \cdot \{1 + O(x^{\theta - 1/2} + t^{-2})\} + o(x^{\vartheta}) + O(x^{27/205} t^{43/205}).$$

Da $\vartheta > 27/205$ vorausgesetzt ist, kann man τ so wählen, daß $0 < \tau \leqslant 1/12$ und $\frac{43}{205}\tau < \vartheta - \frac{27}{205}$ gilt. Mit $t := x^{\tau}$ folgt Satz 3.

Literaturverzeichnis

[1] J. G. van der Corput, *Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem*, Math. Ann. 84 (1921), S. 53–79.

[2] J. Duttlinger, *Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung und ein verwandtes Gitterpunktproblem*, Dissertation, Frankfurt/Main 1972.

[3] G. Kolesnik, *On the method of exponent pairs*, Acta Arith. 45 (1985), S. 115–143.

[4] E. Phillips, *The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method*, Quart. J. Math. (Oxford) 4 (1933), S. 209–225.

[5] P. G. Schmidt, *Zur Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung*, J. Reine Angew. Math. 229 (1968), S. 34–42.

[6] — *Zur Anzahl quadratvoller Zahlen in kurzen Intervallen*, Acta Arith. 46 (1986), S. 159–164.

[7] P. Shiu, *On square-full integers in a short interval*, Glasgow Math. J. 25 (1984), S. 127–134.

[8] B. R. Srinivasan, *Lattice point problem of many dimensional hyperboloids III*, Math. Ann. 160 (1965), S. 280–311.

[9] — *On the number of Abelian groups of a given order*, Acta Arith. 23 (1973), S. 195–205.

[10] E. C. Titchmarsh, *On Epstein's zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1934), S. 485–500.

[11] M. Vogts, *Teilerprobleme in drei Dimensionen*, Math. Nachr. 101 (1981), S. 243–256.

FACHBEREICH MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT
D-3550 Marburg/Lahn
BRD

Eingegangen am 4.3.1986 (1599)