References

[1] W. W. Adams and E. G. Straus, *Non-Archimedian analytic functions taking the same values at the same points*, Illinois J. Math. 15 (1971), pp. 418–424. MR 43 # 3504.

[2] A. Cayford and E. G. Straus, *Differential rings of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 209 (1975), pp. 283–293. MR 52 # 3553.

[3] A. H. Cayford, *A class of integer valued entire functions*, ibid. 141 (1969), pp. 415–432. MR 39 # 5800.

[4] E. G. Straus, *Differential rings of meromorphic functions*, Acta Arith. 21 (1972), pp. 271–284. MR 46 # 7532.

[5] — *Differential rings of a nonarchimedean variable*, in: *Diophantine Approximation and its Applications*, Academic Press, New York, 1973, pp. 295–308. MR 50 # 10309.

Editor's note. The proofsheets sent to the second author have not returned in time, thus the paper has been printed without author's correction. In Lemma 2.4 it is tacitly assumed that $M(r, f)^{-\delta} < r$.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Los Angeles, California
UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA
Vancouver, Canada

Received on 6.12.1985 (1572)

ACTA ARITHMETICA
L (1988)

Nouvelles caractérisations des nombres de Pisot et de Salem

par

ANNETTE DECOMPS-GUILLOUX (Paris) et MARTHE GRANDET-HUGOT (Caen)

1. Introduction, rappels. Soit S l'ensemble des nombres de Pisot, c'est-à-dire l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1 dont tous les conjugués (autres que lui-même) ont un module strictement inférieur à 1 et soit T l'ensemble des nombres de Salem, c'est-à-dire l'ensemble des entiers algébriques supérieurs à 1 dont tous les conjugués (autres que lui-même) ont un module inférieur ou égal à 1, l'un au moins étant de module 1.

Si θ est un élément de S ou T, λ un entier algébrique de $Q(\theta)$, s désigne le degré de θ et l'on note:

$$\theta^{(i)}, \quad i = 2, \ldots, s,$$
$$\lambda^{(i)}, \quad i = 2, \ldots, s,$$

les conjugués respectifs de θ et λ (autres qu'eux-mêmes) alors le nombre

$$\lambda\theta^n + \sum_{i=2}^{s} \lambda^{(i)} \theta^{(i)n}$$

est un entier rationnel. Ainsi, si l'on note pour x réel, $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus voisin, on a, pour $\theta \in S$, à partir d'un certain rang:

$$\|\lambda\theta^n\| = \Big|\sum_{i=2}^{s} \lambda^{(i)} \theta^{(i)n}\Big|$$

et la suite $(\|\lambda\theta^n\|)$ tend vers zéro comme une progression géométrique. Si λ est un élément quelconque de $Q(\theta)$, alors il existe $l \in N$ tel que $l\lambda$ soit entier algébrique, et la suite $(\|\lambda\theta^n\|)$ a, au maximum, l valeurs d'adhérence toutes rationnelles (les suites extraites convergent vers ces valeurs d'adhérence comme des progressions géométriques).

Réciproquement, Pisot a montré [4] que, pour un réel $\theta > 1$, l'existence d'un réel λ non nul tel que soit réalisée l'une ou l'autre des conditions:

$$(1.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\theta^n\|^2 < +\infty$$

ou

$$\theta \text{ algébrique} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|\lambda\theta^n\| = 0 \tag{1.2}$$

entraîne que θ appartient à S et λ à $Q(\theta)$.

Ces résultats datent de 1938, depuis, la question de savoir s'il existe des nombres transcendants tels que la suite $(\|\lambda\theta^n\|)$ tende vers zéro reste posée. En 1947, Pisot a établi [5] que, pour un réel $\theta > 1$, l'existence d'un réel λ non nul tel que soient réalisées les conditions (1.3) et (1.4) (resp. (1.3) et (1.5)) entraîne que θ appartient à S et λ à $Q(\theta)$:

(1.3) la suite $(\|\lambda\theta^n\|)$ a un nombre fini de valeurs d'adhérence,

(1.4) θ est algébrique,

(1.5) la convergence des suites partielles vers les valeurs d'adhérence est $o(n^{-(h+1)})$ (où h désigne le nombre de valeurs d'adhérences irrationnelles).

Ce résultat appelle la remarque suivante: les conditions (1.3) et (1.4) (resp. (1.3) et (1.5)) ne peuvent être réalisées avec h non nul; elles impliquent en effet que λ appartient à $Q(\theta)$ et par conséquent que les valeurs d'adhérence de la suite $(\|\lambda\theta^n\|)$ sont toutes rationnelles; or, pour $h = 0$, la condition (1.5) est moins bonne que la condition (1.1). Dans le même article de Pisot se trouve la première caractérisation de l'ensemble $S \cup T$ par l'existence, pour $\theta > 1$, d'un réel λ supérieur à 1 tel que l'on ait, pour $n \geqslant 0$:

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \frac{1}{2e\theta(\theta+1)(1+\log\lambda)}. \tag{1.6}$$

Pisot et Salem ont posé la question de savoir si l'on peut trouver une condition unique rassemblant les conditions (1.1) et (1.6) [6] (1964).

Dans un article publié en 1977, Cantor [2] donne un nouveau critère algébrique de rationalité, puis il se propose de résoudre le problème de Pisot et de Salem en améliorant les conditions (1.5) et (1.6), pour cela il applique son critère de deux manières différentes.

Pour améliorer la condition (1.1) Cantor considère d'abord des suites (a_n) prenant k valeurs distinctes modulo 1, mais dans sa démonstration il fait une erreur en appliquant le théorème de Dirichlet.

Ne pouvant utiliser le résultat de Cantor et, puisque seules les suites tendant vers zéro modulo 1 nous intéressent, nous avons appliqué sa méthode à ce cas. Nous avons ainsi établi un critère analytique de rationalité qui nous a permis d'améliorer la condition (1.1). Ceci fait l'objet du paragraphe 2. Une autre amélioration est donnée au paragraphe 3 avec la détermination d'une constante effective.

En ce qui concerne la condition (1.6) nous reprenons les résultats de Cantor, en les complétant, au paragraphe 4, nous ne redonnons pas la démonstration du critère de rationalité (théorème 4.1) bien qu'elle présente quelques inexactitudes dans l'article de Cantor, mais elle se trouve entièrement rédigée dans [3].

Pour les différentes caractérisations, seules les conditions suffisantes sont démontrées, les conditions nécessaires étant triviales; d'autre part les conditions envisagées entraînent que le réel λ appartient à $Q(\theta)$, nous ne le rappelerons pas dans les divers énoncés; ceci correspond aux théorèmes 2.3, 3.1, 5.1, 5.2 et aux corollaires 5.1 et 5.2.

2. Critère analytique de rationalité. Application à une caractérisation de S. Le but de ce paragraphe est d'améliorer la condition (1.1) caractérisant les nombres de Pisot, en la remplaçant par la condition:

$$\|\lambda\theta^n\| = o(1/\sqrt{n}).$$

Nous commençons par établir le critère de rationalité suivant, qui englobe le critère classique reposant sur la notion de fonction à caractéristique bornée [1].

THÉORÈME 2.1 (critère analytique de rationalité). *Soit (a_n) une suite d'entiers rationnels; on considère la fonction f définie au voisinage de l'origine par l'égalité*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On suppose que la fonction f n'est pas constante et qu'elle peut s'exprimer comme quotient de deux fonctions s et t analytiques au voisinage de l'origine:

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \quad t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n,$$

où les suites (s_n) et (t_n) vérifient les égalités suivantes:

$$\sum_{m=n}^{2n-1} |s_m|^2 = o(n^{-\alpha}), \tag{2.1}$$

$$\sum_{m=n}^{2n-1} |t_m|^2 = o(n^{-\beta}), \tag{2.2}$$

où α et β vérifient l'une des conditions (i), (ii) *ou* (iii):

(i) $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$,

(ii) $\alpha = 0$ *et* $\beta > 1$,

(iii) $\alpha > 1$ *et* $\beta = 0$,

alors f est une fonction rationnelle.

La démonstration utilise les lemmes suivants (les lemmes 2.1 et 2.3 sont démontrés dans [2] aussi nous ne démontrerons que le lemme 2.2):

Lemme 2.1 ([2], [3]). *Soit (y_n) une suite de réels positifs tels que l'on ait*

$$\sum_{i=m}^{2m-1} y_i = O(1);$$

on pose:

$$\delta_n = \sup_{m \geqslant n} \sum_{i=m}^{2m-1} y_i, \qquad \delta_0 = \sup(y_0, \delta_1).$$

Soit $(i_1, \ldots, i_s)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels, on a alors:

$$\sum_{h=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} y_{i_h+m} \leqslant 4 \sum_{j=1}^{s} \delta_j.$$

Lemme 2.2. *Soit (v_n) une suite de nombres complexes vérifiant l'égalité*:

$$\sum_{m=n}^{2n-1} |v_m|^2 = o(n^{-\gamma}) \quad \textit{où} \quad \gamma \geqslant 0.$$

On pose:

$$\varrho_i = \sup_{j \geqslant i} \sum_{h=j}^{2j-1} |v_h|^2,$$

on a alors

(i) $$\sum_{i=0}^{r} |v_i|^2 = \begin{cases} O(1) & \textit{si} \quad \gamma > 0, \\ o(\log r) & \textit{si} \quad \gamma = 0; \end{cases}$$

(ii) $$\sum_{i=0}^{r} |v_i| = \begin{cases} O(1) & \textit{si} \quad \gamma > 1, \\ o(\log r) & \textit{si} \quad \gamma = 1, \\ o(r^{(1-\gamma)/2}) & \textit{si} \quad 0 \leqslant \gamma < 1; \end{cases}$$

(iii) $$\sum_{i=0}^{r} \varrho_i = \begin{cases} O(1) & \textit{si} \quad \gamma > 1, \\ o(\log r) & \textit{si} \quad \gamma = 1, \\ o(r^{1-\gamma}) & \textit{si} \quad 0 \leqslant \gamma < 1. \end{cases}$$

Démonstration. (i). A tout entier r on associe l'entier q défini par l'inégalité:

$$2^q \leqslant r < 2^{q+1}$$

on a alors:

$$\sum_{i=0}^{r} |v_i|^2 \leqslant |v_0|^2 + \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} |v_i|^2,$$

d'où:

$$\sum_{i=0}^{r} |v_i|^2 = \begin{cases} O(1) & \text{si} \quad \gamma > 0, \\ o(q) = o(\log r) & \text{si} \quad \gamma = 0. \end{cases}$$

On en déduit que la série $\sum_{n \in N} |v_n|^2$ converge pour $\gamma > 0$.

(ii). D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on peut écrire:

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |v_i| \leqslant n^{1/2} \Big(\sum_{i=n}^{2n-1} |v_i|^2 \Big)^{1/2}$$

d'où:

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |v_i| = o(n^{(1-\gamma)/2}).$$

En définissant q comme dans (i), on obtient:

$$\sum_{i=0}^{r} |v_i| \leqslant |v_0| + \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} |v_i|,$$

d'où l'on déduit le résultat.

(iii). Les calculs sont analogues aux précédents.

Lemme 2.3 ([2], [3]). *Soit $X = (x_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que*:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |x_{ij}|^2 < n,$$

on a alors

$$|\det X| < 1.$$

Démonstration du théorème 2.1. Nous supposerons $s_0 \neq 0$ et $t_0 = 1$.

(a) si α et β sont strictement positifs, d'après le lemme 2.2, les séries $\sum |s_n|^2$ et $\sum |t_n|^2$ sont convergentes, et f est à caractéristique bornée dans le disque unité, c'est donc une fonction rationnelle, [1].

(b) Pour $\alpha = 0$ et $\beta > 1$, nous utilisons le critère de Kronecker. En effectuant des combinaisons linéaires classiques sur les lignes et les colonnes des déterminants de Kronecker de f, on obtient l'égalité:

$$D_r = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r & \ldots & a_{2r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{0,0} & \ldots & x_{0,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{r,0} & \ldots & x_{r,r} \end{vmatrix}$$

où

$$x_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} t_i t_j a_{m+n-(i+j)}.$$

Plusieurs étapes sont nécessaires. On pose:

$$u_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} t_i s_{m+n-i},$$

$$v_{m,n} = -\sum_{i=0}^{n-1} s_i t_{m+n-i} \quad \text{pour } n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad v_{m,0} = 0;$$

à partir de l'égalité:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} t_i a_{n-i}$$

des calculs élémentaires permettent d'obtenir la relation:

$$x_{m,n} = u_{m,n} + v_{m,n},$$

on établit alors des évaluations distinctes pour $\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |u_{m,n}|^2$ et $\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |v_{m,n}|^2$.

On définit le polynôme $\Pi_{m,r}$ par

$$\Pi_{m,r}(z) = \sum_{k=0}^{r} t_k z^k \sum_{j=m}^{m+r} s_j z^j$$

alors, si n est un entier au plus égal à r, $u_{m,n}$ est le coefficient de z^{m+n} dans $\Pi_{m,r}$ et l'égalité de Parseval entraîne:

$$\sum_{n=0}^{r} |u_{m,n}|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{r} t_k e^{ik\varphi} \sum_{j=m}^{m+r} s_j e^{ij\varphi} \Big|^2 d\varphi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_{k=0}^{r} |t_k| \Big)^2 \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{j=m}^{m+r} s_j e^{ij\varphi} \Big|^2 d\varphi$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=0}^{r} |t_k| \Big)^2 \sum_{j=m}^{m+r} |s_j|^2.$$

D'où

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |u_{m,n}|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{r} |t_k| \Big)^2 \sum_{m=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} |s_{j+m}|^2$$

et d'après le lemme 2.1:

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |u_{m,n}|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{r} |t_k| \Big)^2 \cdot 4 \sum_{i=0}^{r} \delta_i$$

où

$$\delta_i = \sup_{j \geqslant i} \sum_{h=j}^{2j-1} |s_h|^2, \qquad \delta_0 = \sup(s_0^2, \delta_1).$$

De même, en appliquant l'égalité de Parseval au polynôme $\Phi_{m,r}$ défini par:

$$\Phi_{m,r}(z) = \sum_{k=0}^{r} s_k z^k \sum_{j=m}^{m+r} t_j z^j$$

on obtient:

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |v_{m,n}|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{r} |s_k| \Big)^2 \cdot 4 \sum_{i=0}^{r} \mu_i$$

où

$$\mu_i = \sup_{j \geqslant i} \sum_{h=j} |t_h|^2.$$

D'où:

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |x_{m,n}|^2 \leqslant 8 \Big(\Big(\sum_{k=0}^{r} |t_k| \Big)^2 \cdot \sum_{i=0}^{r} \delta_i + \Big(\sum_{k=0}^{r} |s_k| \Big)^2 \cdot \sum_{i=0}^{r} \mu_i \Big)$$

et l'on en déduit, grâce au lemme 2.2, puisque $\alpha = 0$ et $\beta > 1$:

$$\sum_{m=0}^{r} \sum_{n=0}^{r} |x_{m,n}|^2 = o(r).$$

(c) Le cas $\alpha > 1$ et $\beta = 0$ se traite de la même manière si r est assez grand cette quantité est inférieure à $r+1$ qui est l'ordre du déterminant D_r, d'où d'après le lemme 2.3:

$$|D_r| < 1$$

et f est une fraction rationnelle.

De ce critère on déduit le théorème suivant:

Théorème 2.2. *Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h$ des nombres réels vérifiant $|\theta_i| > 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, h$. On suppose qu'il existe des polynômes à coefficients réels $L_1, L_2, \ldots, L_h$ et une suite (a_n) d'entiers rationnels tels que:*

$$\sum_{i=0}^{h} L_i(n) \theta_i^n = a_n + o(n^{-1/2})$$

alors la fonction f définie au voisinage de l'origine par:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est une fraction rationnelle et les nombres $\theta_1, \ldots, \theta_h$ sont des entiers algébriques.

Démonstration. On pose pour $n \in N$:

$$a_n = \sum_{i=1}^{h} L_i(n)\theta_i^n + \mu_n$$

où $\mu_n = o(n^{-1/2})$. On a alors:

$$f(z) = \frac{U(z)}{V(z)} + \mu(z)$$

avec

$$\frac{U(z)}{V(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{h} L_i(n)\theta_i^n\Big) z^n \quad \text{et} \quad \mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n.$$

Les hypothèses du théorème 4.1 sont vérifiées avec

$$s(z) = U(z) + \mu(z)V(z), \qquad t(z) = V(z).$$

On a alors:

$$\sum_{m=n}^{2n-1} |s_m|^2 = o(1)$$

on prend donc $\alpha = 0$; puisque t est un polynôme β peut être choisi quelconque donc supérieur à 1, f est donc une fonction rationnelle et le lemme de Fatou permet de montrer que $\theta_1, \ldots, \theta_h$ sont des entiers algébriques.

Le théorème 2.3 est un cas particulier du précédent, on prend alors $h = 1$.

THÉORÈME 2.3. *Un réel θ supérieur à 1 appartient à S si, et seulement si, il existe un réel λ non nul tel que l'on ait:*

$$\|\lambda\theta^n\| = o(n^{-1/2}). \tag{2.3}$$

3. Caractérisation de S par une condition asymptotique sur $\|\lambda\theta^n\|$. Détermination d'une constante effective. L'intérêt du théorème 3.1 réside dans le fait que la condition asymptotique se traduit par une inégalité qui fait intervenir une constante effective; il se déduit du critère Kronecker car le critère analytique ne s'applique pas ici.

Dans ce paragraphe et dans les suivants on écrira, pour $\theta > 1$ et $\lambda \neq 0$, la décomposition modulo 1 de $\lambda\theta^n$ sous la forme:

$$\lambda\theta^n = a_n + \varepsilon_n,$$

avec $a_n \in Z$ et $\varepsilon_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ de telle sorte que $|\varepsilon_n| = \|\lambda\theta^n\|$.

THÉORÈME 3.1. *Soit θ un réel supérieur à 1; θ appartient à S si, et seulement si, il existe deux réels λ et a vérifiant respectivement:*

$$\lambda > 0 \quad \text{et} \quad a < 1/2(1+\theta)^2$$

tels que l'on ait:

$$\|\lambda\theta^n\| < a/\sqrt{n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0. \tag{3.1}$$

Démonstration. En remplaçant λ par $\lambda\theta^{n_0}$, on peut supposer que l'on a:

$$|\varepsilon_n| < a/\sqrt{n+n_0} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0.$$

On pose:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{\lambda}{1-\theta z} + \varepsilon(z)$$

avec

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n.$$

On conserve les notations utilisées pour démontrer le théorème 1.1, soit:

$$s(z) = \lambda + (1-\theta z)\varepsilon(z), \qquad t(z) = 1-\theta z$$

et

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \quad \text{où} \quad s_0 = \lambda + \varepsilon_0,\ s_n = \varepsilon_n - \theta\varepsilon_{n-1},$$

$$t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n \quad \text{où} \quad t_0 = 1,\ t_1 = -\theta,\ t_n = 0 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Les coefficients $u_{m,n}$ et $v_{m,n}$ s'écrivent alors:

$$u_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} t_i s_{m+n-i} = s_{m+n} - \theta s_{m+n-1}, \qquad v_{m,n} = -\sum_{i=0}^{n-1} s_i t_{m+n-i}.$$

On en déduit les égalités:

$$v_{m,n} = 0 \ \text{ si } \ m \geqslant 1, \quad v_{0,n} = s_{n-1}\theta \ \text{ pour } \ n \geqslant 1, \quad v_{0,0} = 0,$$

et, en supposant $n_0 > 2$, les majorations:

$$|s_n| < \frac{a(1+\theta)}{\sqrt{n+n_0-1}} \qquad \forall n \geqslant 0,$$

$$|u_{m,n}| < \frac{a(1+\theta)^2}{\sqrt{m+n+n_0-2}} \qquad \forall (m, n) \in N^2,$$

$$|v_{0,n}| < \frac{a\theta(1+\theta)}{\sqrt{n+n_0-2}} \qquad \forall n \geqslant 0.$$

On obtient alors, en majorant $\sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{r} v_{m,n}^2$ et $\sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{r} u_{m,n}^2$ les inégalités:

$$\sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{r} v_{m,n}^2 = \sum_{n=0}^{r} v_{0,n}^2 \leqslant a^2\theta^2(1+\theta)^2 \sum_{n=0}^{r}\frac{1}{n+n_0-2}+s_0^2$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{r} v_{m,n}^2 = O(\log r) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{r} u_{m,n}^2 \leqslant (1+\theta)^2 \sum_{m=0}^{r}\sum_{j=0}^{r} s_{m+j}^2.$$

Compte tenu de la majoration:

$$\sum_{h=j}^{2j-1} s_h^2 \leqslant \frac{a^2(1+\theta)^2 j}{j+n_0-1} < a^2(1+\theta)^2$$

on peut appliquer le lemme 2.1 à la suite (s_h^2); on a donc

$$\sum_{i=0}^{r}\delta_i \leqslant (r+1)a^2(1+\theta)^2+\sigma_0$$

où

$$\sigma_0 = \max\left(a^2(1+\theta)^2, s_0^2\right),$$

soit finalement:

$$\sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{r} u_{m,n}^2 \leqslant 4a^2(1+\theta)^4(r+1)+\sigma_0(\theta+1)^2.$$

En utilisant l'inégalité:

$$x_{m,n}^2 \leqslant u_{m,n}^2+v_{m,n}^2+2|u_{m,n}v_{m,n}|,$$

on obtient:

$$\sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{r} x_{m,n}^2 \leqslant 4a^2 r(1+\theta)^4+O(\log r)$$

et, si la constante a satisfait à:

$$a < 1/2(1+\theta)^2,$$

à partir d'un certain rang, on a:

$$|D_r| < 1.$$

4. Critère algébrique de rationalité. Avant de rappeler ce critère nous indiquons quelques notations qui seront conservées dans la suite de ce travail.

On considère une série formelle $\sum_{n\in N} c_n X^n \in Z[[X]]$, et on lui associe une famille de matrices $A(P_n)$, où P_n designe un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_n$ des suites strictement croissantes de $n+1$ entiers naturels. On note un élément P_n de $\mathscr{P}_n$ sous la forme:

$$P_n = (p_0, p_1, \ldots, p_n), \quad 0 \leqslant p_0 < p_1 < \ldots < p_n.$$

Pour définir la matrice $A(P_n)$ on considère une suite (t_n) de nombres complexes telle que $t_0 = 1$, et l'on pose, pour $(m, n)\in N^2$:

$$x_{m,n} = \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} t_h t_k c_{m+n-(h+k)},$$

et l'on définit $A(P_n)$ par l'égalité:

$$A(P_n) = \begin{bmatrix} x_{p_0,0} & x_{p_0,1} & \ldots & x_{p_0,n} \\ x_{p_1,0} & x_{p_1,1} & \ldots & x_{p_1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p_n,0} & x_{p_n,1} & \ldots & x_{p_n,n} \end{bmatrix}.$$

Le théorème s'énonce alors de la manière suivante:

THÉORÈME 4.1 ([2]). *Soit $\sum_{n\in N} c_n X^n$ une série formelle à coefficients entiers rationnels telle que $c_0 \neq 0$ et soit (t_n) une suite de nombres complexes telle que $t_0 = 1$.*

On suppose qu'il existe un entier $r > 0$ tel que pour tout $P_r \in \mathscr{P}_r$ on ait:

$$|\mathrm{Det}\, A(P_r)| < 1$$

alors la série formelle $\sum_{n\in N} c_n X^n$ représente une fraction rationnelle.

5. Application du critère de rationalité à une nouvelle caractérisation des nombres de Pisot et de Salem.

THÉORÈME 5.1 (Cantor). *Un réel θ supérieur à 1 appartient à l'ensemble $S\cup T$ si, et seulement si, il existe des réels λ, μ et σ vérifiant respectivement:*

$$\lambda > \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \sigma \leqslant 1, \quad 0 < \mu \leqslant 1,$$

tels que l'on ait, pour $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$:

$$(5.1)\qquad (1+\theta)^2 \sum_{i=m}^{m+n-1} (\varepsilon_{i+1}-\theta\varepsilon_i)^2 < \mu n^\sigma,$$

en supposant en outre réalisée l'inégalité:

$$(5.2)\qquad \mu^{1/\sigma} \leqslant \frac{\sigma}{e\left(\log\left(a_0^2+\frac{1}{(\theta+1)^3}\right)+2\sigma\right)}.$$

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce théorème qui se trouve dans [3] avec quelques modifications par rapport à l'article de Cantor. La formulation de l'ensemble des conditions (5.1) et (5.2) ne rend pas aisée l'application de ce théorème, les corollaires suivants donnent des conditions plus facilement vérifiables.

COROLLAIRE 5.1. *Un réel θ supérieur à 1 appartient à l'ensemble $S \cup T$ si, et seulement si, il existe des réels λ, σ et A vérifiant*

$$\lambda > 1 \quad et \quad 0 < \sigma \leqslant 1,$$

tels que l'on ait, pour tout $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$:

$$\sum_{j=m}^{m+n-1} \|\lambda\theta^j\|^2 < An^\sigma, \tag{5.3}$$

en supposant en outre réalisée la condition:

$$A < \left(\frac{\sigma}{2e}\right)^\sigma \frac{1}{(1+\theta)^4 (2+(\log\lambda)^{\sigma/2})^2}. \tag{5.4}$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le théorème 5.1 avec: $\mu = (1+\theta)^4 A$.

Les conditions (5.3) et (5.4) entraînent:

$$\varepsilon_0 < \tfrac{1}{4} \quad \text{et par conséquent} \quad a_0 < \lambda + \tfrac{1}{4};$$

on en déduit:

$$a_0^2 + \frac{1}{(1+\theta)^3} < (\lambda + \tfrac{1}{2})^2$$

et compte tenu de l'inégalité $\lambda \geqslant 1$ qui implique:

$$\lambda + \tfrac{1}{2} < e\lambda$$

on obtient:

$$\log\left(a_0^2 + \frac{1}{(1+\theta)^3}\right) + 2\sigma < 2\log\lambda + 4.$$

Grâce aux inégalités:

$$(\log\lambda + 2)^{\sigma/2} \leqslant (\log\lambda)^{\sigma/2} + 2^{\sigma/2} < (\log\lambda)^{\sigma/2} + 2,$$

on voit alors que l'ensemble des conditions (5.3) et (5.4) impliquent l'ensemble des conditions (5.1) et (5.2).

COROLLAIRE 5.2. *Un réel θ supérieur à 1 appartient à l'ensemble $S \cup T$ si, et seulement si, il existe un réel λ supérieur à 1 tel que l'on ait pour tout $n \geqslant 0$:*

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \frac{1}{e(\theta+1)^2 (2+\sqrt{\log\lambda})}. \tag{5.5}$$

Démonstration. En reprenant les calculs précédents, avec $\sigma = 1$ et compte tenu de l'inégalité $\sqrt{2e} < e$, on voit que la condition (5.5) entraîne:

$$(1+\theta)^2 \sum_{i=m}^{m+n-1} (\varepsilon_{i+1} - \theta\varepsilon_i)^2 < \frac{n}{2e(2+\log\lambda)}$$

on peut donc appliquer le théorème 5.1 avec:

$$\sigma = 1 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2e(2+\log\lambda)}.$$

Remarques. 1. La condition annoncée par Cantor:

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \frac{1}{2e\theta(\theta+1)(2+\sqrt{\log\lambda})} \qquad \forall n \geqslant 0$$

est plus forte que la condition (5.5), elle a l'avantage d'être facilement comparable à la condition (1.6) de Pisot mais ne présente d'intérêt par rapport à celle-ci que pour $\lambda > 13$.

2. Des majorations plus fines permettent de remplacer, dans le facteur $2+\sqrt{\log\lambda}$, 2 par 1.2 ou 1 si λ est entier; on peut également si λ est assez grand, compte tenu de l'inégalité des accroissements finis:

$$\log(\lambda + \tfrac{1}{2}) < \log\lambda + \frac{1}{2\lambda}$$

remplacer $2+\sqrt{\log\lambda}$ par $1+\sqrt{\log\lambda}+\dfrac{1}{2\lambda}$.

3. Comme pour la condition (1.6) de Pisot on peut supposer réalisée pour $n \geqslant n_0$ l'une ou l'autre des conditions suivantes:

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \frac{1}{2e\theta(\theta+1)(2+\sqrt{n_0\log\theta}+\sqrt{\log\lambda})}$$

ou:

$$\|\lambda\theta^n\| \leqslant \frac{1}{e(\theta+1)^2(2+\sqrt{n_0\log\theta}+\sqrt{\log\lambda})}. \tag{5.6}$$

L'intérêt de ces expressions réside dans la présence du terme $\sqrt{n_0\log\theta}$ au lieu de $n_0\log\theta$ dans la formule de Pisot.

Le théorème suivant caractérise l'ensemble S puisque la condition imposée implique que la suite (ε_n) tend vers zéro.

THÉORÈME 5.2. *Un réel θ supérieur à 1 appartient à l'ensemble S si, et seulement si, il existe deux réels λ et α vérifiant:*

$$\lambda \geqslant 1 \quad et \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2},$$

tels que l'on ait:

(5.7) $$\|\lambda\| \leqslant \varepsilon, \quad \|\lambda\theta^n\| \leqslant \varepsilon n^{-\alpha} \quad pour \quad n \geqslant 1,$$

avec:

(5.8) $$\varepsilon = \frac{(1-2\alpha)^{1-\alpha}}{2e(\theta+1)^2\left(2+(\log\lambda)^{1/2-\alpha}\right)}.$$

Démonstration. Les conditions (5.7) entraînent pour $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$:

$$\sum_{j=m}^{m+n-1} \varepsilon_j^2 \leqslant \varepsilon^2 \sum_{j=m}^{m+n-1} j^{-2\alpha} \leqslant \varepsilon^2 \int_{m-1}^{m+n-1} \frac{dt}{t^{2\alpha}}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{1-2\alpha}\left((m+n-1)^{1-2\alpha}-(m-1)^{1-2\alpha}\right)$$

et, compte tenu de l'inégalité:

$$(m+n-1)^{1-2\alpha} < (m-1)^{1-2\alpha}+n^{1-2\alpha},$$

$$\sum_{j=m}^{m+n-1} \varepsilon_j^2 < \frac{\varepsilon^2}{1-2\alpha} n^{1-2\alpha}.$$

Par ailleurs, si $m = 0$, on a:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^2 \leqslant \varepsilon_0^2+\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n-1} j^{-2\alpha} \leqslant \varepsilon_0^2+\frac{\varepsilon^2(n-1)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha},$$

d'où:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^2 < \frac{2\varepsilon^2 n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}.$$

On peut alors appliquer le corollaire 5.1 avec

$$A = \frac{2\varepsilon^2}{1-2\alpha} \quad \text{et} \quad \sigma = 1-2\alpha$$

car la condition (5.4) s'écrit alors:

$$\varepsilon < \left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1-2\alpha}{2e}\right)^{1/2-\alpha} \frac{1}{(\theta+1)^2\left(2+(\log\lambda)^{1/2-\alpha}\right)}$$

que l'on déduit de la condition (5.8) compte tenu de l'inégalité stricte:

$$2^{1-\alpha} e^{1/2-\alpha} < 2e.$$

Remarques. 1. Si $\alpha = 0$ on retrouve la condition (5.5) qui caractérise $S \cup T$.

2. On peut supposer que l'on a pour $n \geqslant n_0$:

$$|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon n^{-\alpha}$$

avec:

$$\varepsilon = \frac{(1-2\alpha)^{1-\alpha} n_0^\alpha}{2e(\theta+1)^2\left(2+(\log\lambda)^{1/2-\alpha}+(n_0\log\theta)^{1/2-\alpha}\right)}$$

cette condition implique donc $\varepsilon = O(n_0^{-1/2})$, résultat analogue à celui trouvé pour $\alpha = 0$ ((5.6)).

3. La condition (5.7) est assez différente des conditions usuelles caractérisant S: il s'agit d'une majoration en fonction de n qui est réalisée pour tout n, aussi semble-t-elle mieux que la condition (5.1) de Cantor répondre à la question de Pisot et Salem.

Ainsi, la condition $\sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\theta^n\|^2 < +\infty$, qui n'avait pas été améliorée depuis 1938, peut être remplacée par l'une ou l'autre des conditions:

(2.3) $$\|\lambda\theta^n\| = o(1/\sqrt{n})$$

ou

(3.1) $$\|\lambda\theta^n\| < a/\sqrt{n}.$$

Cette dernière condition est à rapprocher de l'ensemble des conditions:

(5.7) $$\|\lambda\| \leqslant \varepsilon, \quad \|\lambda\theta^n\| \leqslant \varepsilon n^{-\alpha}, \quad n \geqslant 1,$$

avec:

(5.8) $$\varepsilon = \frac{(1-2\alpha)^{1-\alpha}}{2e(\theta+1)^2\left(2+(\log\lambda)^{1/2-\alpha}\right)}$$

qui caractérisent S si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, et $S \cup T$ si $\alpha = 0$.

Bibliographie

[1] David G. Cantor, *Power series with integral coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), p. 362–366.

[2] — *Power series with only finitely many coefficients* mod 1, Acta Arith. 34 (1977), p. 43–55.

[3] Annette Decomps-Guilloux et Marthe Grandet-Hugot, *Nouvelles caractérisations des nombres de Pisot et de Salem — Groupe d'études en théorie analytique des nombres*, Paris 1985.

[4] Charles Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, ser. 2, 7 (1938), p. 205–248.

[5] — *Répartition modulo* 1 *des puissances successives des nombres réels*, Comment. Math. Helv. 19 (1946/47), p. 153–160.
[6] Charles Pisot et Raphaël Salem, *Distribution modulo* 1 *of the powers of real numbers larger than* 1, Comp. Math. 16 (1964), p. 164–168.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES
UNIVERSITÉ P. ET M. CURIE
4 place Jussieu
75250 Paris Cedex 05

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE CAEN
14032 Caen Cedex

Reçu le 20.12.1985 (1578)

ACTA ARITHMETICA
L (1988)

Disjoint covering systems with precisely one multiple modulus *

by

MARC A. BERGER, ALEXANDER FELZENBAUM and
AVIEZRI S. FRAENKEL (Rehovot, Israel)

1. Introduction. A *disjoint covering system* $(R_1, \ldots, R_t)$, $t > 1$, is a partition of the integers into residue sets

$$R_i = \{k \in Z\colon\ k \equiv a_i \pmod{n_i}\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant t.$$

Two obvious necessary conditions for this to occur are

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{t} n_i^{-1} = 1 \quad \text{and} \quad (n_i, n_j) > 1, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant t.$$

One of the earliest results about such systems is that the moduli n_i cannot all be distinct. (See [2].) Znám [9] and Newman [3] independently proved that the largest modulus, n, must be repeated at least $p(n)$ times, where $p(n)$ denotes the least prime divisor of n. Thus if we order the moduli

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_t$$

then necessarily

$$n_{t-j+1} = n_{t-j+2} = \ldots = n_t, \qquad j = p(n_t).$$

Berger, Felzenbaum and Fraenkel [1] give a geometric proof of this fact, and of the extension discovered by Porubský [5] to any *maximal* modulus n, maximal in the sense of division. Thus if

$$(2) \qquad n_k \nmid n_i, \qquad k+1 \leqslant i \leqslant t,$$

then

$$(3) \qquad n_{k-j+1} = n_{k-j+2} = \ldots = n_k, \qquad j = p(n_k).$$

The fact that some moduli of a disjoint covering system must be repeated leads one naturally to enquire about systems with precisely one multiple modulus. According to what we have just said the repeated modulus

* This research was supported by grant No. 85-00368 from the United States–Israel Binational Science Foundation (BSF), Jerusalem, Israel.