ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Sur l'équation $\varphi(x+k) = \varphi(x)$. II

par

A. SCHINZEL et ANDRZEJ WAKULICZ (Warszawa)

Dans le travail [1] le lemme suivant a été démontré: *Si la suite des nombres premiers* $3 = q_1 < q_2 < \ldots < q_n$ *satisfait aux conditions*

$$(1) \qquad (q_i - 2) | q_1 q_2 \ldots q_{i-1} \quad (2 \leqslant i \leqslant n),$$

$$(2) \qquad (q_i - 1) |^* 2 q_1 q_2 \ldots q_{i-1},$$

l'équation

$$(3) \qquad \varphi(x+k) = \varphi(x)$$

a au moins deux solutions pour tous les k *impairs qui ne sont pas divisibles par* $q_1 q_2 \ldots q_n$.

Si nous demandons encore que q_i soit le plus petit nombre premier $> q_{i-1}$, tel que la suite $q_1 < q_2 < \ldots < q_i$ satisfasse aux conditions (1) et (2), nous obtenons pour $i \leqslant 19$

$$\{q_i\} = \{3, 5, 7, 17, 19, 37, 97, 113, 257, 401, 487, 631, 971, 1297, 1801, 19457, 22051, 28817, 65537\}.$$

On peut se demander quelles sont les valeurs de q_i pour $i > 19$ (si elles existent). Or nous avons calculé à l'aide de la machine électronique *XYZ* à Varsovie, que $q_{20} = 157303$, $q_{21} = 160001$ et que q_{22}, s'il existe, dépasse 10^8.

Du lemme cité plus haut résulte que l'équation (3) a au moins deux solutions pour tous les k impairs $< \prod_{i=1}^{21} q_i > 2 \cdot 10^{58}$.

D'autre part, en prenant p_i ($i \leqslant 22$) comme dans la démonstration du théorème 2 de [1] (p. 183) et en posant $p_{23} = 619$, $p_{24} = 691$, $p_{25} = 727$, $p_{26} = 811$ nous trouvons que p_i et $2p_i - 1$ sont premiers et $2p_i - 1 \neq p_j$ pour $i, j \leqslant 26$.

D'où, comme dans le travail [1], résulte que l'équation (3) a au moins deux solutions pour tous les k pairs $< \prod_{i=1}^{26} p_i > 2\cdot 10^{58}$. Nous avons donc:

THÉORÈME. *L'équation* $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ *a au moins deux solutions pour tous les nombres naturels* $k \leqslant 2\cdot 10^{58}$.

Il est à remarquer que M. Cieślakowski a construit une table des valeurs de la fonction $\varphi(x)$ pour $10^4 < x \leqslant 2\cdot 10^4$ et il a trouvé 4 nouvelles solutions de l'équation $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, à savoir 10604, 11715, 13365, 18315, ainsi que 55 nouvelles solutions de l'équation $\varphi(x+2) = \varphi(x)$, mais aucune nouvelle solution de l'équation $\varphi(x+3) = \varphi(x)$.

Travail cité

[1] A. Schinzel, *Sur l'équation* $\varphi(x+k) = \varphi(x)$, Acta Arith. 4 (1958), p. p. 181-184.

Reçu par la Rédaction le 22. 4. 1959

ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Über eine Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz

von

W. Staś (Poznań)

1. Wir bezeichnen mit $\Lambda(n)$ die bekannte zahlentheoretische Funktion, welche $= \log p$ ist, wenn n eine Primzahlpotenz ist und sonst $= 0$.

Es sei ferner

$$R(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) - x, \tag{1.1}$$

das sogenannte Restglied im Primzahlsatz.

Wie bekannt, hat P. Turán folgende explizite untere Abschätzung des $|R(x)|$ gefunden ([4], Satz. XXX):

Wenn $\zeta(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\beta_0 \geqslant \frac{1}{2}, \gamma_0 > 0)$ *und*

$$T > \max(c_1, \exp\exp 60 \log^2 |\varrho_0|) \tag{1.2}$$

dann

$$|R(\xi)| = \max_{1\leqslant x\leqslant T} |R(x)| > T^{\beta_0} \exp\left(-21 \frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right) \tag{1.3}$$

und c_1 *ist eine explizite positive numerische Konstante.*

Herr Professor P. Turán, hat mir eine Verschärfung der Abschätzung (1.3), durch Verbesserung der Lokalisation von ξ in $1 \leqslant x \leqslant T$, suggeriert.

Aus dem Satz (1.2) und der bekannten oberen Abschätzung des Restgliedes, folgt trivial eine Verbesserung der Lokalisation.

Wenn nämlich ε eine beliebige positive Zahl bedeutet, $\zeta(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\beta_0 \geqslant \frac{1}{2}, \gamma_0 > 0)$ und

$$T > \max(c_2, \exp\exp 60 \log^2 |\varrho_0|)$$

dann

$$\max_{T^{\beta_0-\varepsilon}\leqslant x\leqslant T} \left|\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) - x\right| > T^{\beta_0} \exp\left(-21 \frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right) \tag{1.4}$$

und c_2 ist eine Konstante die von ε abhängt.