On final observation: The quantity c_0 defined in (22) may be shown to be

$$\left(\frac{q}{p}\right)^s q^{s(p-1)/2}$$

for all values given in Theorem 3.

References

[1] M. Newman, *Construction and application of a class of modular functions (II)*, Proc. London Math. Soc. (to appear).

[2] — *Structure theorems for modular subgroups*, Duke Math. J. 22 (1955), p. 25-32.

[3] — *Further identities and congruences for the coefficients of modular forms*, Can. J. Math. 10 (1958), p. 577-586.

[4] — *Remarks on some modular identities*, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), p. 313-320.

[5] H. Petersson, *Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme*, Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin. Kl. Math. Allg. Nat. 2 (1954), p. 1-59.

[6] H. Rademacher and A. Whiteman, *Theorems on Dedekind sums*, Amer. J. Math. 63 (1941), p. 377-407.

[7] J. Tannery, et J. Molk, *Éléments de la theorie des fonctions elliptiques*, Tome 1, Gauthier-Villars et fils, 1893.

NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
WASHINGTON, D.C.

Reçu par la Rédaction le 6. 3. 1959

ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Verwendung der Zeta-Funktion beim Sieb von Selberg*

von

W. FLUCH (Wien)

Einleitung. Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes (siehe Seite 402): *In jeder arithmetischen Reihe* $km+l$, $0 < l < k$, $(l, k) = 1$ *gibt es eine Primzahl oder eine aus zwei verschiedenen Primzahlen bestehende Zahl, die* $\leqslant k^{15+\varepsilon}$ *ist* ($k \geqslant k_0(\varepsilon)$ *und* $\varepsilon > 0$ *beliebig klein, fest)* (vgl. die Fußnote auf Seite 402). Wir führen die allgemeinen Formeln gleich für s-tupel von Primzahlen aus, spezialisieren dann aber auf $s = 1$ (bei variablem k, Seite 388).

§ 1. Allgemeines. Die in [6] skizzierte und z. B. in [3], Kp. II, § 3 bzw. in [11] näher ausgeführte Siebmethode wollen wir hier (in § 2) soweit wiedergeben, als wir sie benötigen, da sie die Grundlage für alles folgende bildet. Dabei beschränken wir uns gleich auf Zahlensysteme der Form $a_i m + b_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant m \leqslant N$, s und N natürliche Zahlen, a_i, b_i ganz. Weiters möge für diese gelten: $(a_i, b_i) = 1$, $a_i b_k - a_k b_i \neq 0$ für $i \neq k$; damit ist auch

$$E = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} a_i \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant s} (a_i b_k - a_k b_i) \neq 0. \tag{1.1}$$

Sodann bilden wir die Zahlen

$$n_m = \prod_{i=1}^{s} |a_i m + b_i|, \tag{1.2}$$

die im weiteren an Stelle der s-tupel untersucht werden. Vorerst einige Bezeichnungen und Bemerkungen: mit p, q bezeichnen wir durchwegs Primzahlen; mit $\omega(d)$ die Anzahl der $\bmod d$ verschiedenen Restklassen, die die Kongruenz

$$n_m \equiv 0 \pmod d \tag{1.3}$$

---

* Die vorliegende Arbeit stellt einen Auszug aus meiner Dissertation dar. Herrn Prof. K. Prachar möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, wertvolle Hinweise und die Durchsicht des Manuskriptes meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

erfüllen. $\omega(d)$ ist eine multiplikative Funktion und es gilt stets $\omega(p) \leqslant s$, und $\omega(p) = s$ für $p \nmid E$. Wir setzen voraus, daß stets $\omega(p) < p$ gelte. Dann ist

$$(1.4)\qquad S(E) = \prod_{p|E}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-(s-\omega(p))}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\omega(p)}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) \neq 0;$$

dabei ist das zweite Produkt über alle Primzahlen zu erstrecken. Wegen $(1-1/p)^{\omega(p)} \geqslant 1-\omega(p)/p$ ist der zweite Teil des Produktes

$$A = \prod_p (1-1/p)^{-\omega(p)}(1-\omega(p)/p) \leqslant 1.$$

Da A ein absolut konvergentes Produkt darstellt und jeder Faktor $\neq 0$ ist, ist auch $A \neq 0$. (Die über die a_i bzw. b_i gemachten Voraussetzungen, die wir also kurz mit $E \neq 0$ und $S(E) \neq 0$ zusammenfassen können, sind sozusagen notwendig für die Existenz unendlich vieler Primzahl-s-tupeln im obigen System. Daß sie auch hinreichend sind, konnte bisher noch nicht bewiesen werden.)

Wir betrachten die Folge der Primzahlen

$$(1.5)\qquad p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant z^{\Theta},$$

wo z und Θ später genauer bestimmt werden; es gelte jedenfalls $N^{1-\varepsilon} \leqslant z < N$ und $\Theta \leqslant s/(s+1) < 1$. Sei $N(z,\Theta)$ die abzuschätzende Anzahl der n_m, die durch keines der p_i teilbar sind; dann ist die zugehörige „charakteristische Funktion" definiert durch:

$$(1.6)\qquad \varphi(n_m) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n_m \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0 & \text{wenn mindestens eine Kongruenz erfüllt ist,} \end{cases}$$

und man erhält

$$(1.7)\qquad N(z,\Theta) = \sum_{m=1}^{N} \varphi(n_m).$$

Wir erwähnen schließlich noch: ist $d = q_1 \ldots q_t$, wo die q_i (verschiedene Primzahlen) aus der Menge der p_i sind, dann gilt für die Anzahl der n_m, die der Kongruenz (1.3) genügen,

$$(1.8)\qquad S_d = \frac{\omega(d)}{d}\cdot N + R_d, \qquad |R_d| \leqslant \omega(d).$$

Weiters setzen wir

$$(1.9)\qquad f(d) = \frac{d}{\omega(d)};$$

$f(d)$ ist multiplikativ und $f(1) = 1$.

§ 2. Die Methode von A. Selberg. (a) Zur Abschätzung der Anzahl $N(z,\Theta)$ nach oben versuchen wir jetzt Zahlen ϱ_d so zu bestimmen, daß gilt

$$(2.1)\qquad \varphi(n_m) \leqslant \sum_{d}{}_{(n_m)} \varrho_d,$$

wo die Summation über alle Teiler d von $q_1 \ldots q_t$ zu erstrecken ist, wenn $n_m \equiv 0 \pmod{q_i}$, $1 \leqslant i \leqslant t$, ist. Dazu werden die ϱ_d so gewählt, daß wir haben (vgl. 1.6):

$$(2.2)\qquad \sum_{d}{}_{(n_m)} \varrho_d \begin{cases} = 1 & \text{wenn} \quad n_m \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \\ \geqslant 0 & \text{wenn mindestens eine Kongruenz erfüllt ist.} \end{cases}$$

Nach A. Selberg wählen wir

$$(2.3)\qquad \varrho_d = \sum_{d=[d_1,d_2]} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}$$

(wobei $[\ldots,\ldots]$ wie allgemein üblich das kl. gem. Vielfache, $(\ldots,\ldots)$ den gr. gem. Teiler zweier Zahlen bedeutet), und haben

$$(2.4)\qquad \sum_{d}{}_{(n_m)} \varrho_d = \Big\{\sum_{d}{}_{(n_m)} \lambda_d\Big\}^2.$$

Nun setzen wir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_d = 0$ für $d > \sqrt{z}$; dann ist $\varrho_d = 0$ fü $d > z$ (da in diesem Fall d stets einen Teiler $d_1 > \sqrt{z}$ hat). Somit ist

$$N(z,\Theta) = \sum_{m=1}^{N} \varphi(n_m) \leqslant \sum_{m=1}^{N}\sum_{d}{}_{(n_m)} \varrho_d = \sum_{\substack{d|D\\ d\leqslant z}} \varrho_d \frac{N}{f(d)} + \sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|D}} R_d\varrho_d$$

und daher

$$(2.5)\qquad N(z,\Theta) \leqslant N\cdot\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|D}} \frac{\varrho_d}{f(d)} + \sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|D}} |R_d|\cdot|\varrho_d|,$$

wobei $D = \prod_{i=1}^{r} p_i$ ist.

(b) Abschätzung nach unten. Analog zum Fall (a) soll hier durchwegs

$$(2.6)\qquad \varphi(n_m) \geqslant \sum_{d}{}_{(n_m)} \varrho_d$$

gelten (die Summation ist die gleiche wie bei 2.1) und es mögen die ϱ_d so gewählt werden, daß

$$\sum_{d} {}_{(n_m)}\, \varrho_d \begin{cases} = 1 & \text{wenn} \quad n_m \not\equiv 0 \pmod{p_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \\ \leqslant 0 & \text{wenn mindestens eine Kongruenz erfüllt ist.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Dazu setzen wir

$$\varrho_1 = 1, \qquad \varrho_d = - \sum_{\substack{d = [d_1, d_2] \\ q \mid (d_1, d_2)}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2}$$

und erhalten (unter Verwendung der „Summation nach der größten Primzahl" [1])

$$\sum_{d} {}_{(n_m)}\, \varrho_d = 1 - \sum_{d > 1} \sum_{\substack{d = [d_1, d_2] \\ q \mid (d_1, d_2)}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} = 1 - \sum_{i=1}^{t} \sum_{d = \nu_{q_i} \cdot q_i} \sum_{\substack{d = [d_1, d_2] \\ q \mid (d_1, d_2)}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2}$$

und dabei ist q die größte Primzahl, die d teilt; ν_p bezeichne einen Teiler, welcher nur aus Primzahlen $< p$ besteht. Aus $d_1 = \nu'_{q_i} \cdot q_i$, $d_2 = \nu''_{q_i} \cdot q_i$ folgt $\nu_{q_i} = [\nu'_{q_i}, \nu''_{q_i}]$. Somit

$$\sum_{d} {}_{(n_m)}\, \varrho_d = 1 - \sum_{i=1}^{t} \sum_{\nu_{q_i}} \sum_{\nu_{q_i} = [\nu'_{q_i}, \nu''_{q_i}]} \lambda_{\nu'_{q_i} \cdot q_i} \lambda_{\nu''_{q_i} \cdot q_i} = 1 - \sum_{i=1}^{t} \Big\{ \sum_{\nu_{q_i}} \lambda_{\nu_{q_i} \cdot q_i} \Big\}^2,$$

d. h.

$$\sum_{d} {}_{(n_m)}\, \varrho_d = 1 - \{\lambda_{q_1}\}^2 - \{\lambda_{q_2} + \lambda_{q_1 q_2}\}^2 - \ldots - \{\lambda_{q_t} + \ldots + \lambda_{q_1 \ldots q_t}\}^2.$$

Für jedes $p \in \{p_1, \ldots, p_r\}$ wird nun $\lambda_p = 1$ gesetzt. Weiters $\lambda_{\nu_p \cdot p} = 0$ für $\nu_p > \sqrt{z/p} = z_p$. Also wird $\varrho_d = 0$ für $d > z$ und wie verlangt ist stets $\sum_{d} {}_{(n_m)} \varrho_d \leqslant 0$ bzw. 1. Wir erhalten

$$N(z, \Theta) = \sum_{m=1}^{N} \varphi(n_m) \geqslant \sum_{m=1}^{N} \sum_{d} {}_{(n_m)}\, \varrho_d = N \sum_{d \leqslant z} \frac{\varrho_d}{f(d)} + \sum_{d \leqslant z} R_d \varrho_d$$

und daher auch die zu (2.5) analoge Ungleichung

$$N(z, \Theta) \geqslant N \sum_{d \leqslant z} \frac{\varrho_d}{f(d)} - \sum_{d \leqslant z} |R_d| \cdot |\varrho_d|. \tag{2.8}$$

Auf die weitere Durchführung der Abschätzung nach oben können wir verzichten, da diese in der inzwischen erschienenen Arbeit von Klimov [13] ausführlich behandelt wird.

[1] Das soll bedeuten: ist q die größte Primzahl, die d teilt, so wird über alle Teiler d_1, d_2 von d summiert, die Vielfache von q sind und für die $[d_1, d_2] = d$ gilt.

§ 3. Die Abschätzung nach unten. Wir gehen von der Ungleichung (2.8) aus und müssen das Maximum des Ausdruckes

$$Q = \sum_{d \leqslant z} \frac{\varrho_d}{f(d)} \tag{3.1}$$

bestimmen. Setzen wir für die ϱ_d die von uns gewählten Werte ein, so erhalten wir

$$\sum_{d \leqslant z} \frac{\varrho_d}{f(d)} = \frac{\varrho_1}{f(1)} + \sum_{1 < d \leqslant z} \frac{\varrho_d}{f(d)} = 1 + \sum_{p \leqslant p_r} \sum_{\nu_p} \frac{\varrho_{\nu_p \cdot p}}{f(\nu_p \cdot p)}$$

$$= 1 - \sum_{p \leqslant p_r} \frac{1}{f(p)} \sum_{\nu_p} \frac{1}{f(\nu_p)} \sum_{\nu_p = [\nu'_p, \nu''_p]} \lambda_{\nu'_p \cdot p} \lambda_{\nu''_p \cdot p}$$

$$= 1 - \sum_{p \leqslant p_r} \frac{1}{f(p)} \sum_{\nu_p} \sum_{\nu_p = [\nu'_p, \nu''_p]} \frac{\lambda_{\nu'_p \cdot p} \lambda_{\nu''_p \cdot p}}{f([\nu'_p, \nu''_p])}.$$

Nun gilt aber

$$f([\nu'_p, \nu''_p]) = \frac{f(\nu'_p) f(\nu''_p)}{f\big((\nu'_p, \nu''_p)\big)}; \tag{3.2}$$

denn ist $k = (\nu'_p, \nu''_p)$, so haben wir mit $\nu'_p = \xi'_p \cdot k$, $\nu''_p = \xi''_p \cdot k$ und $(\xi'_p, \xi''_p) = 1$:

$$\frac{f(\nu'_p) f(\nu''_p)}{f(k)} = \frac{f(\xi'_p k) f(\xi''_p k)}{f(k)} = f(\xi'_p) \cdot f(\xi''_p k) = f(\xi'_p \xi''_p k)$$

$$= f\left(\frac{\nu'_p \nu''_p}{k}\right) = f([\nu'_p, \nu''_p]).$$

Wir führen die (multiplikative) Funktion $f_1(d)$ ein, die definiert ist durch $f(n) = \sum_{d \mid n} f_1(d)$ und erhalten damit

$$\sum_{d \leqslant z} \frac{\varrho_d}{f(d)} = 1 - \sum_{p \leqslant p_r} \frac{1}{f(p)} \sum_{\nu_p} \sum_{\nu_p = [\nu'_p, \nu''_p]} \frac{\lambda_{\nu'_p \cdot p} \lambda_{\nu''_p \cdot p}}{f(\nu'_p) f(\nu''_p)} \cdot \sum_{d \mid (\nu'_p, \nu''_p)} f_1(d) \tag{3.3}$$

$$= 1 - \sum_{p \leqslant p_r} \frac{1}{f(p)} \sum_{\nu_p \leqslant z_p} f_1(\nu_p) \Big\{ \sum_{\nu_p \mid \nu'_p,\, \nu'_p \leqslant z_p} \frac{\lambda_{\nu'_p \cdot p}}{f(\nu'_p)} \Big\}^2.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(3.4)\qquad y_{\nu_p}=\sum_{\nu_p\mid\nu'_p,\ \nu'_p\leqslant z_p}\frac{\lambda_{\nu'_p\cdot p}}{f(\nu'_p)},$$

so ist das Minimum des Ausdruckes $\sum\limits_{\nu_p\leqslant z_p}f_1(\nu_p)y^2_{\nu_p}$ mit der Nebenbedingung

(3.5)

$$\sum_{\nu_p\leqslant z_p}\mu(\nu_p)y_{\nu_p}=\sum_{\nu_p\leqslant z_p}\mu(\nu_p)\cdot\sum_{\substack{\nu_p\mid\nu'_p\\ \nu'_p\leqslant z_p}}\frac{\lambda_{\nu'_p\cdot p}}{f(\nu'_p)}=\sum_{\nu'_p\leqslant z_p}\frac{\lambda_{\nu'_p\cdot p}}{f(\nu'_p)}\cdot\sum_{d\mid\nu'_p}\mu(d)=\frac{\lambda_p}{f(1)}=1,$$

zu ermitteln. Das geschieht am einfachsten durch Anwenden der Schwarzschen Ungleichung auf (3.5): (nach einer Idee von P. Turán)

$$1=\left(\sum_{\nu_p\leqslant z_p}\frac{\mu(\nu_p)}{\sqrt{f_1(\nu_p)}}\cdot\sqrt{f_1(\nu_p)}\ y_{\nu_p}\right)^2\leqslant\left(\sum_{\nu_p\leqslant z_p}\frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}\right)\left(\sum_{\nu_p\leqslant z_p}f_1(\nu_p)y^2_{\nu_p}\right),$$

wo das Gleichheitszeichen nur stehen kann, wenn:

$$(3.6)\qquad \frac{\mu(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}=\eta\cdot y_{\nu_p}\quad\text{für alle}\quad \nu_p\leqslant z_p.$$

Aus der Nebenbedingung (3.5) ergibt sich dann sofort

$$(3.7)\qquad \eta=\sum_{\nu_p\leqslant z_p}\frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}=Z_p,$$

und daher $y_{\nu_p}=\dfrac{\mu(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}\cdot Z_p^{-1}$, sowie $\sum\limits_{\nu_p\leqslant z_p}f_1(\nu_p)y^2_{\nu_p}=Z_p^{-1}$, also $\sum\limits_{d\leqslant z}\dfrac{\varrho_d}{f(d)}$ $=1-\sum\limits_{p\leqslant p_r}\dfrac{1}{f(p)}\cdot Z_p^{-1}$. Nach (3.4) ist

$$y_{\nu_p\cdot m_p}=\sum_{\substack{m_p\mid m'_p\\ (m'_p,\nu_p)=1,\ m'_p\leqslant z_p/\nu_p}}\frac{\lambda_{\nu_p m'_p\cdot p}}{f(\nu_p)f(m'_p)}\quad\text{und}\quad\frac{\lambda_{\nu_p\cdot p}}{f(\nu_p)}=\sum_{\substack{m_p\leqslant z_p/\nu_p\\ (m_p,\nu_p)=1}}\mu(m_p)y_{\nu_p m_p},$$

d. h.

$$(3.8)\qquad \lambda_{\nu_p\cdot p}=\mu(\nu_p)\frac{f(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}\cdot\sum_{\substack{m_p\leqslant z_p/\nu_p\\ (m_p,\nu_p)=1}}\frac{\mu^2(m_p)}{f_1(m_p)}\cdot\left(\sum_{\nu'_p\leqslant z_p}\frac{\mu^2(\nu'_p)}{f_1(\nu'_p)}\right)^{-1}.$$

Wir setzen nun $z_p=p^{u_p}$, d. h.

$$(3.9)\qquad u_p=\frac{\lg z_p}{\lg p}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lg z}{\lg p}-1\right),$$

und machen für Z_p den Ansatz (wir folgen hierin, sowie in der Methode zur Berechnung von Z_p, der Arbeit [11] von Vinogradoff)(²):

$$(3.10)\qquad Z_p=\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{f_1(q)}\right)-\varepsilon(u_p)\cdot\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{f_1(q)}\right)=\frac{1-\varepsilon(u_p)}{\Pi_p},$$

wobei

$$(3.11)\qquad \Pi_p=\prod_{q<p}\left(1-\frac{1}{f(q)}\right)=\prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{f_1(q)}\right)^{-1}$$

wegen $f_1(q)=f(q)-1$. Verwendet man 3.10 in unsrer letzten Gleichung für $\sum\limits_{d\leqslant z}\dfrac{\varrho_d}{f(d)}$, so hat man

$$\sum_{d\leqslant z}\frac{\varrho_d}{f(d)}=1-\sum_{p\leqslant p_r}\frac{\Pi_p}{f(p)}-\sum_{p\leqslant p_r}\frac{\Pi_p}{f(p)}\cdot\frac{\varepsilon(u_p)}{1-\varepsilon(u_p)}=\prod_{p\leqslant p_r}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right)-R(z,\Theta),$$

mit

$$(3.12)\qquad R(z,\Theta)=\sum_{p\leqslant p_r}\frac{\Pi_p}{f(p)}\cdot\frac{\varepsilon(u_p)}{1-\varepsilon(u_p)}.$$

Die Ungleichung 2.8 lautet nun so:

$$(3.13)\qquad N(z,\Theta)\geqslant N\left(\prod_{p\leqslant p_r}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right)-R(z,\Theta)\right)-\sum_{d\leqslant z}|R_d|\cdot|\varrho_d|.$$

Für ein beliebiges $d=q_1\ldots q_t$ ist $|R_d|\leqslant\omega(d)$; sei $\tau(d)$ die Anzahl der Teiler von d, so ist $\tau(d)=2^t$ und $\omega(d)=\omega(q_1)\ldots\omega(q_t)\leqslant s^t=\{\tau(d)\}^{\lg s/\lg 2}$. Weiter gilt (nach 3.8) $|\lambda_{\nu_p\cdot p}|\leqslant\tau(\nu_p)$ d. h. $|\varrho_d|\leqslant\tau^2(d)\cdot\tau^2(d)=\tau^4(d)$ und damit

$$\sum_{d\leqslant z}|R_d|\,|\varrho_d|\leqslant\sum_{d\leqslant z}\{\tau(d)\}^{5+[\lg s/\lg 2]}\leqslant\sum_{k\leqslant z}\{\tau(k)\}^{5+[\lg s/\lg 2]},$$

(²) Die Definition (3.10) gilt auch für beliebige reelle Zahlen $x\leqslant z^{\Theta}$. Für $p'<x<p'$ ist Π_x konstant d. h. $\varepsilon(u_x)$ monoton wachsend. Wenn $x=p'$, so ist $\varepsilon(u_x)$ erst recht (sprunghaft) wachsend und *daher* $\varepsilon(u)$ *monoton abnehmend für wachsendes* u.

wo k über alle natürlichen Zahlen $\leqslant z$ läuft und $[x]$ die größte ganze Zahl aus x bedeutet. Zur weiteren Abschätzung verwenden wir das

LEMMA 1 [3]. *Sei $\tau(k)$ die Anzahl der Teiler von k, und $x \geqslant 2$. Dann gilt für jede natürliche Zahl n*

$$\sum_{k\leqslant x}\big(\tau(k)\big)^n \leqslant c_n\cdot x(\lg x)^{a_n}, \tag{3.14}$$

wo $a_n = 2^n-1$ und $c_n > 0$ eine (nur von n abhängige) Konstante ist.

Beweis. Durch vollständige Induktion nach n. Siehe dazu [3], Kp. I, § 5, Satz 5.2 und 5.4.

Mit (3.14) erhalten wir

$$\sum_{d\leqslant z}|R_d|\cdot|\varrho_d| \leqslant c(s)\cdot z(\lg z)^a, \qquad a = 2^{5+[\lg s/\lg 2]}-1 \leqslant 32s-1.$$

Wählt man also $z = N/(\lg N)^\beta$, so wird $\sum\limits_{d\leqslant z}|R_d|\,|\varrho_d| = O\big(N/(\lg N)^{s+1}\big)$ (wo die Konstante in O nur von s abhängt) sobald nur $\beta \geqslant a+s+1$, z. B. $\beta = 33s$.

Wir beschränken uns von jetzt ab auf den Fall $s = 1$, lassen jedoch $a_1 = k$ mit N wachsen. Statt $n_m = a_1m+b_1$ schreiben wir wie üblich $n_m = km+l$, mit $0 < l < k$, $(l, k) = 1$, $1 \leqslant m \leqslant N$. Es ist dann $E = k$ und

$$\omega(p) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad p \nmid k, \\ 0 & \text{für} \quad p \mid k. \end{cases}$$

Also $S(k) = \prod\limits_{p|k}(1-1/p)^{-1} = k/\varphi(k)$ und es gilt $S(k) = O(\lg_2 k)$. Alle Abschätzungen müssen im Folgenden so durchgeführt werden, daß die Konstanten in den O-Gliedern von k unabhängig sind. Um nun $R(z,\Theta)$ zu bekommen, berechnen wir (mittels komplexer Integration) Z_p d.h. letzten Endes $\varepsilon(u_p)$. Dazu brauchen wir jedoch eine Reihe von Hilfssätzen.

§ 4. Einige Hilfssätze.

LEMMA 1. *Es gibt eine absolute Konstante $c > 0$, sodaß im Gebiet $\sigma \geqslant 1-\sigma_0$, $\sigma_0 = c/(\lg t'\lg_2 t')^{3/4}$ für die Funktion $\zeta(\sigma+it)$ die Abschätzungen gelten:*

$$|\zeta(\sigma+it)| = O(\lg t'), \qquad t' = |t|+e^2, \qquad |t| \geqslant 1;$$

$$|\zeta(\sigma+it)| = O\left(\frac{1}{|1-(\sigma+it)|}\right), \qquad |t| < 1.$$

[3] In viel allgemeinerer Form bei Van der Corput, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam 42 (1939), S. 547-553.

Dieser Hilfssatz ist bekannt; sein Beweis ist z. B. im Lehrbuch [10], Kp. III, IV, zu finden.

LEMMA 2. *Wenn $w = \sigma+it$ ist, mit $0 < |t| < e^{12\lg x\lg_2 x} = T'$, $2 \geqslant \sigma \geqslant 1-\frac{1}{4}\sigma_0$, wobei $\sigma_0 = c/(\lg 2T'\cdot\lg_2 2T')^{3/4}$ ist, so gilt für die Funktion $\Pi(w, x) = \prod\limits_{q<x}(1+1/q^w)$:*

$$\Pi(w, x) = e^{\gamma(w,x)}\cdot\frac{\zeta(w)}{\zeta(2w)}\big(1+\Theta(w, x)\big).$$

Dabei ist $\gamma(w, x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1-\sigma}\frac{x^{u-it}}{u-it}\,dt$ und $\Theta(w, x)$ ist eine stetige Funktion im angegebenen Gebiet und in diesem gilt für sie die Abschätzung:

$$|\Theta(w, x)| = O\big(e^{-\sqrt[5]{\lg x}}\big).$$

Weiters haben wir (mit $w = \sigma+it$):

$$|\gamma(w, x)| \leqslant \frac{x^{1-\sigma}}{|t|\cdot\lg x}.$$

Der Beweis dieses und des folgenden Lemmas ist der Arbeit [11], S. 59-63 und S. 69-71 zu entnehmen.

In den folgenden Lemmas sei durchwegs $p > p_0 = \exp\left\{\dfrac{\lg z}{6\lg_2 z}\right\}$ vorausgesetzt.

LEMMA 3. *Wenn $w = 1-\delta+i\alpha$, mit $-\sqrt{\delta} \leqslant \alpha \leqslant \sqrt{\delta}$ und $\delta = 1/\lg p$, dann gilt für die Funktion $\Pi(w, x)$ genauer:*

$$\Pi(w, p) = -e^{\gamma+\omega}\cdot e^{\psi(\alpha\lg p)}\frac{\zeta(w)}{\zeta(2w)}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\lg p}\right)\right),$$

wobei $\omega = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,n}$, γ die Eulersche Konstante,

$$u(t) = e\int_0^t\frac{x\cos x-\sin x}{1+x^2}\,dx, \qquad v(t) = e\int_0^t\frac{x\sin x+\cos x}{1+x^2}\,dx,$$

und $\psi(t) = u(t)-iv(t)$ ist.

LEMMA 4. *Ist $w = -\delta+it$ mit $\delta = 1/\lg p$, so gilt*

$$|\Pi(1+w, p)| = O\big(|\Pi(1+it, p)|\big).$$

Beweis. Wir haben

$$\Pi(1+w,p)=\prod_{q<p}\left(1+\frac{q^{\delta}}{q^{1+it}}\right)=\exp\left\{\sum_{q<p}\lg\left(1+\frac{q^{\delta}}{q^{1+it}}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\sum_{q<p}\lg\left(1+\frac{q^{\delta}-1}{q^{1+it}+1}\right)+\sum_{q<p}\lg\left(1+\frac{1}{q^{1+it}}\right)\right\}$$

$$=\Pi(1+it,p)\cdot c_0\cdot\exp\left\{\sum_{3\leqslant q<p}\lg\left(1+\frac{q^{\delta}-1}{q^{1+it}+1}\right)\right\}.$$

Nun ist aber $|c_0|\leqslant e$, da $\left|\frac{2^{\delta}-1}{2^{1+it}+1}\right|\leqslant e-1$, und $\left|\frac{q^{\delta}-1}{q^{1+it}+1}\right|<1$ für $q\geqslant 3$, also

$$\sum_{3\leqslant q<p}\left|\lg\left(1+\frac{q^{\delta}-1}{q^{1+it}+1}\right)\right|\leqslant\sum_{q<p}\frac{q^{\delta}-1}{q}+O(1)=O\left(\delta\cdot\sum_{q<p}\frac{\lg q}{q}\right)+O(1)$$

$$=O(\delta\lg p)=O(1),\qquad \text{w. z. b. w.}$$

LEMMA 5a-b. *Sei* $w=\sigma+it$, $\sigma\geqslant-\frac{1}{4}\sigma_0$ *mit* $\sigma_0=c/(\lg 2T\cdot\lg_2 2T)^{3/4}$ $(|t|\leqslant T)$. *Dann gilt* $(\frac{1}{4}\sigma_0=\sigma_1)$

a) *für* $$S_1(q\nmid k;p,w)=\prod_{\substack{q\nmid k\\ q<p}}\left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right)\left(1+\frac{1}{q^{1+w}}\right)^{-1}$$

$$|S_1(q\nmid k;p,w)|=O(1),$$

b) *für* $$S_2(q|k;p,w)=\prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1+\frac{1}{q^{1+w}}\right)$$

$$|S_2(q|k;p,w)|\geqslant\frac{c_0}{\lg_2 z},$$

wobei O und c_0 von k unabhängig sind und $T=z^2$.

Beweis. a) Es ist

$$\left|\left(1+\frac{1}{2^{w}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{1+w}}\right)^{-1}\right|=\left|1+\frac{1}{2^{1+w}+1}\right|\leqslant 1+\frac{1}{2^{3/4}-1},$$

und

$$\prod_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}}\left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right)=\exp\left\{\sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}}\frac{1}{q^{1+w}}+O(1)\right\},$$

wegen

$$(q-1)^{-1}=q^{-1}+q^{-1}(q-1)^{-1}.\quad \prod_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}}\left(1+\frac{1}{q^{1+w}}\right)=\exp\left\{\sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}}\frac{1}{q^{1+w}}+O(1)\right\},$$

also

$$|S_1(q\nmid k;p,w)|=e^{O(1)}=O(1).$$

b) $$|S_2(q|k;p,w)|\geqslant\prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1-\frac{1}{q^{1-\sigma_1}}\right)=\prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1-\frac{1}{q^{2(1-\sigma_1)}}\right)\left(1+\frac{1}{q^{1-\sigma_1}}\right)^{-1}.$$

Nun ist

$$\prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1-\frac{1}{q^{2(1-\sigma_1)}}\right)\geqslant\prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1-\frac{1}{q^{3/2}}\right)\geqslant c_1>0,$$

und weiter

$$\prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1+\frac{1}{q^{1-\sigma_1}}\right)=\exp\left\{\sum_{\substack{q|k\\ q<p}}\frac{q^{\sigma_1}}{q}+O(1)\right\}.$$

Die Summe zerlegen wir in zwei Teile

$$\sum_{\substack{q|k\\ q<p}}\frac{q^{\sigma_1}}{q}=\left(\sum_{\substack{q\leqslant(\lg z)^3\\ q|k}}+\sum_{\substack{(\lg z)^3<q<p\\ q|k}}\right)\frac{q^{\sigma_1}}{q}.$$

Die Anzahl der Primteiler von k ist aber, *da wir uns von vornherein auf $k<N$ beschränken können*:

$$\nu(k)=O\left(\frac{\lg k}{\lg_2 k}\right)=O\left(\frac{\lg N}{\lg_2 N}\right)=O(\lg z),$$

wegen $z\geqslant N^{1-\varepsilon}$. Damit erhalten wir für die beiden Summenteile

$$\sum_{\substack{q|k\\ (\lg z)^3<q<p}}\frac{q^{\sigma_1}}{q}=O\left(\lg z\cdot\frac{(\lg z)^{3\sigma_1}}{(\lg z)^3}\right)=O\left(\frac{1}{(\lg z)^2}\right),$$

weil q^{σ_1}/q monoton abnehmend und $\sigma_1=O\left(1/(\lg z\lg_2 z)^{3/4}\right)$ wegen $T=z^2$ sowie

$$\sum_{\substack{q|k\\ q\leqslant(\lg z)^3}}\frac{q^{\sigma_1}}{q}\leqslant(\lg z)^{3\sigma_1}\cdot\sum_{q\leqslant(\lg z)^3}\frac{1}{q}=\lg_3 z+O(1),$$

wegen $e^{\sigma_1 \lg_2 z} = 1 + O(1/\sqrt{\lg z})$. Zusammen ergibt das

$$\prod_{\substack{q|k\\ q<p}} \left(1+\frac{1}{q^{1-\sigma_1}}\right) = O(\lg_2 z),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Lemma 6a-b: *Sei $w = -\delta + ia$, mit $|a| \leqslant \sqrt{\delta}$, dann gilt*

a) $S_1(q \nmid k; p, w) = S_1(k) + O(|w|)$,

wobei $S_1(k) = S_1(q \nmid k; \infty, 0) = \prod_{q\nmid k}\left(1-\frac{1}{q^2}\right)^{-1}$.

b) $S_2(q|k, p, w) = S_2(k) + O\left(|w|\cdot(\lg_2 z)^2\right)$,

wobei $S_2(k) = S_2(q|k; \infty, 0) = \prod_{q|k}\left(1+\frac{1}{q}\right)$.

(Die O-Glieder sind dabei wieder von k unabhängig).

Beweis. a) Es ist

$$\prod_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right) = \exp\left\{\sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \lg\left(1+\frac{1}{q-1}\right) + \sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \lg\left(1+\frac{q^{-w}-1}{q}\right)\right\}$$

$$= \prod_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \left(1+\frac{1}{q-1}\right)\cdot\exp\left\{\sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \frac{q^{-w}-1}{q} + O\left(\sum_{\substack{q\nmid k\\ q<p}} \left|\frac{q^{-w}-1}{q}\right|^2\right)\right\},$$

und

$$\prod_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \left(1+\frac{1}{q^{1+w}}\right) = \exp\left\{\sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \lg\left(1+\frac{1}{q}\right) + \sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \lg\left(1+\frac{q^{-w}-1}{q+1}\right)\right\}$$

$$= \prod_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \left(1+\frac{1}{q}\right)\cdot\exp\left\{\sum_{\substack{q\nmid k\\ 3\leqslant q<p}} \frac{q^{-w}-1}{q} + O\left(\sum_{\substack{q\nmid k\\ q<p}} \left|\frac{q^{-w}-1}{q}\right|^2\right)\right\}.$$

Da aber

$$\sum_{q<p}\left|\frac{q^{-w}-1}{q}\right|^2 = \left(\sum_{\lg q\leqslant\frac{1}{|w|}} + \sum_{\frac{1}{|w|}<\lg q<\lg p}\right)\left|\frac{q^{-w}-1}{q}\right|^2$$

$$= O\left(|w|^2\cdot\sum_q \frac{\lg^2 q}{q^2}\right) + O\left(\sum_{\lg q>\frac{1}{|w|}}\frac{1}{q^2}\right) = O(|w|^2),$$

so folgt

$$S_1(q\nmid k; p, w) = S_1(q\nmid k; p, 0) + O(|w|),$$

und aus

$$S_1(q\nmid k; p, 0) = S_1(k)\cdot\prod_{\substack{q\nmid k\\ q>p}}\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{q}\right) = S_1(k)\cdot\exp\left\{O\left(\frac{1}{p}\right)\right\}$$

die Behauptung.

b) $$S_2(q|k; p, w) = \prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1+\frac{1}{q^{1+w}}\right)$$

$$= \prod_{\substack{q|k\\ q<p}}\left(1+\frac{1}{q}\right)\cdot\exp\left\{\sum_{\substack{q|k\\ q<p}}\lg\left(1+\frac{q^{-w}-1}{q+1}\right)\right\}$$

$$= S_2(q|k; p, 0)\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{\substack{q|k\\ q<p}}\frac{q^{-w}-1}{q+1} + O\left(\sum_{\substack{q|k\\ q<p}}\left|\frac{q^{-w}-1}{q}\right|^2\right)\right\}^{(4)}$$

$$= S_2(q|k; p, 0)\cdot\exp\left\{O\left(|w|\cdot\sum_{q|k}\frac{\lg q}{q}\right) + O(|w|^2)\right\}$$

$$= S_2(q|k; p, 0)\cdot\exp\{O(|w|\cdot\lg_2 z)\}$$

$$= S_2(q|k; p, 0) + O\left(|w|\cdot(\lg_2 z)^2\right),$$

da

$$\sum_{q|k}\frac{\lg q}{q} \leqslant \sum_{q\leqslant p_{v(k)}}\frac{\lg q}{q} = O(\lg p_{v(k)}) = O(\lg_2 k) = O(\lg_2 z),$$

und

$$S_2(q|k; p, 0) \leqslant S_2(k) = \exp\left\{\left(\sum_{\substack{q|k\\ q\leqslant\lg z}} + \sum_{\substack{q|k\\ q>\lg z}}\right)\frac{1}{q} + O(1)\right\} = O(\lg_2 z);$$

weiter ist (beachte $p > p_0$ und $|w| = O(1/\lg p)$)

$$\prod_{\substack{q|k\\ q>p}}\left(1+\frac{1}{q}\right) = \exp\left\{\sum_{\substack{q|k\\ q>p}}\frac{1}{q} + O\left(\frac{1}{p}\right)\right\} = \exp\{O(|w|)\} = 1 + O(|w|),$$

(4) Es ist $|q^{-w}-1| = \left|-\int_0^w q^{-w}\lg q\,dw\right| \leqslant q^{\delta}\cdot|w|\cdot\lg q$, $q^{\delta}\leqslant e$ wegen $\delta = 1/\lg p$.

also wie behauptet

$$S_2(q|k;\, p,\, w) = S_2(k) + O\left(|w|(\lg_2 z)^2\right), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Für die Abschätzungen mit $p \leqslant p_0$ benötigen wir noch die Ungleichungen

$$\Pi_x = \prod_{q\leqslant x}\left(1-\frac{1}{f(q)}\right) = \prod_{q\leqslant x}\left(1-\frac{1}{q}\right)\prod_{\substack{q|k\\ q\leqslant x}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} \leqslant \frac{e^{-\gamma}}{\lg x}\left(1+O\left(\frac{1}{\lg x}\right)\right)\cdot S(k),$$

$$\Pi_x^{-1} = e^{\gamma}\lg x\left(1+O\left(\frac{1}{\lg x}\right)\right)\cdot\prod_{\substack{q|k\\ q\leqslant x}}\left(1-\frac{1}{q}\right) \leqslant e^{\gamma}\lg x\left(1+O\left(\frac{1}{\lg x}\right)\right),$$

für $p > p_0$ jedoch die Gleichung:

$$\Pi_x = \frac{e^{-\gamma}S(k)}{\lg x}\left(1+O\left(\frac{1}{\lg x}\right)\right), \qquad \text{solange} \quad x \geqslant c_3 \lg k. \tag{4.1}$$

Denn es ist

$$\Pi_x = \prod_{q\leqslant x}\left(1-\frac{1}{q}\right)\prod_{\substack{q|k\\ q\leqslant x}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} = \frac{e^{-\gamma}}{\lg x}\left(1+O\left(\frac{1}{\lg x}\right)\right)S(k)\prod_{\substack{q|k\\ q> x}}\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

und

$$1 \geqslant \prod_{\substack{q|k\\ q>x}}\left(1-\frac{1}{q}\right) \geqslant \left(1-\frac{1}{x}\right)^{v(k)} \geqslant 1-\frac{v(k)}{x} \geqslant 1-\frac{c}{\lg x},$$

für $v(k) \leqslant cx/\lg x$ d. h. solange $x \geqslant c_1 v(k)\lg v(k)$ oder wegen $v(k)\lg v(k) \leqslant c\frac{\lg k}{\lg_2 k}\cdot c'\lg_2 k = c_2 \lg k$, wenn $x \geqslant c_3 \lg k$.

§ 5. Berechnung von Z_p. Ist

$$\Pi_1(w,\, p) = \prod_{q<p}\left(1+\frac{1}{f_1(q)}q^{-w}\right),$$

w eine komplexe Veränderliche und $\bar{z}_p = [z_p]+\frac{1}{2}$, so gilt nach einem bekannten Hilfssatz ([3], Anhang Satz 3.1):

$$Z_p = \sum_{\nu_p\leqslant z_p}\frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-iT}^{2+iT}\frac{\bar{z}_p^w}{w}\Pi_1(w,\, p)\,dw + O\left(\frac{z_p^2}{T}\right).$$

Nun ist aber $\int\limits_{2\pm iT}^{1\pm iT} = O(z_p^2/T)$, wo die oberen und unteren Vorzeichen jeweils zusammengehören; wir wählen $T = z^2$, sodaß $z_p^2/T = O(1/z)$, also

$$Z_p = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-iT}^{1+iT}\frac{\bar{z}_p^w}{w}\Pi_1(w,\, p)\,dw + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{5.1}$$

Sei zuerst C der geschlossene Weg um 0, der die Punkte $1-iT,\, 1+iT,\, -\delta+iT,\, -\delta-iT$ geradlinig verbindet ($\delta = 1/\lg p$). Das Residuum beträgt $\Pi_1(0,\, p) = 1/\Pi_p$ und somit ist

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{1-iT}^{1+iT} + \int\limits_{1+iT}^{-\delta+iT} + \int\limits_{-\delta+iT}^{-\delta-iT} + \int\limits_{-\delta-iT}^{1-iT}\right)\frac{\bar{z}_p^w}{w}\Pi_1(w,\, p)\,dw = \frac{1}{\Pi_p};$$

die letzten drei Integrale werden so abgeschätzt:

$$\left|\int\limits_{-\delta\pm iT}^{1\pm iT}\right| = O\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{\bar{z}_p}{\lg\bar{z}_p}\cdot\frac{\lg_2 z}{\Pi_p}\right), \quad \text{wegen} \quad \prod_{q<p}\left(1+\frac{q^\delta}{f_1(q)}\right) = O(\lg p) = \left(\frac{\lg_2 k}{\Pi_p}\right)$$

(indem man den Logarithmus des Produktes betrachtet). Weiter ist

$$\left|\int\limits_{-\delta+iT}^{-\delta-iT}\right| = O\left(\bar{z}_p^{-\delta}\cdot\frac{1}{\Pi_p}\cdot\lg_2 z\cdot\lg z\right) = O\left(\frac{1}{\Pi_p}\cdot\frac{\lg_2 z}{(\lg z)^2}\right),$$

wenn wir $p \leqslant p_0 = \exp\{\lg z/6\lg_2 z\}$ voraussetzen. Mit der Definitionsgleichung (3.10) erhält man:

$$\varepsilon(u_p) = O\left(\frac{\lg_2 z}{(\lg z)^2}\right) \qquad \text{für} \quad p \leqslant p_0. \quad \text{(unabhängig von } k\text{)}. \tag{5.2}$$

Im zweiten Teil ist jetzt $p > p_0$. Sei

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{z}_p^w}{w}\Pi_1(w,\, p)\,dw,$$

wobei L der geschlossene Weg $L = \sum_{n=1}^{10} C_n$ ist, mit:

C_1: $(1-iT,\, 1+iT)$ geradlinig,

C_2: $(1+iT,\, -\sigma_1+iT)$ geradlinig; $\sigma_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{c}{(\lg 2T\cdot\lg_2 2T)^{4/5}}$ (5),

(5) In [11], S. 67-68, wird $\sigma_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{c}{(\lg 2T\cdot\lg_2 2T)^{3/4}}$ verwendet, was jedoch, wie man leicht erkennt, nicht hinreicht um Lemma 2, § 4, anwenden zu können.

C_3: $(-\sigma_1+iT,\ -\sigma_1+it_0)$ geradlinig; t_0 ist aus der Gleichung $e^{\sigma_1 \lg p} = t_0 \lg p$ zu bestimmen,

C_4: $(-\sigma(t_0)+it_0,\ -\sigma(\sqrt{\delta})+i\sqrt{\delta})$ längs der Kurve $\sigma(t) = \delta \lg \frac{t}{\delta}$,

$t_0 \geqslant t \geqslant \sqrt{\delta}$ (und es ist $\sigma(t_0) = \sigma_1$),

C_5: $\left(-\delta \lg \frac{1}{\sqrt{\delta}} + i\sqrt{\delta},\ -\delta + i\sqrt{\delta}\right)$ geradlinig,

C_6: $(-\delta+i\sqrt{\delta},\ -\delta-i\sqrt{\delta})$ geradlinig.

C_7, C_8, C_9, C_{10} sind symmetrisch bezüglich der σ-Achse zu den entsprechenden Wegen C_5, C_4, C_3, C_2. Das Integral I_1 ist gleich dem Residuum der Funktion unter dem Integralzeichen für $w = 0$ d. h. $I_1 = \Pi_1(0, p) = 1/\Pi_p$. Wir schreiben I_1 in der Form

$$(5.3)\qquad I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-iT}^{1+iT} \frac{z_p^w}{w}\Pi_1(w,p)\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_6} \frac{z_p^w}{w}\Pi_1(w,p)\,dw + \sum_{\substack{n=2\\ n\neq 6}}^{10} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{z_p^w}{w}\Pi_1(w,p)\,dw,$$

und behandeln einzeln die auftretenden Integrale.

1. *Die Integrale unter dem Summenzeichen.* Durch direktes Ausrechnen bestätigt man

$$(5.4)\qquad \Pi_1(w,p) = \frac{S_1(q \nmid k;\, p, w)}{S_2(q|k;\, p, w)}\cdot \Pi(1+w, p).$$

Aus den Lemmas § 4, 5a-b, 1 und 2 mit $x = p$ ergibt sich daher für jedes $w \in C_i$, $2 \leqslant i \leqslant 10$, $i \neq 6$:

$$|\Pi_1(w,p)| = \begin{cases} O(\lg t' \cdot \lg_2 z), & t' = t+e^2,\ |t| \geqslant 1, \\ O\left(\dfrac{\lg_2 z}{|w|}\right), & \sqrt{\delta} \leqslant |t| < 1, \end{cases}$$

denn es gilt $|\gamma(1+w,p)| \leqslant 1$ für $w \in C_i$, $2 \leqslant i \leqslant 10$, $i \neq 6$. Ohne Schwierigkeit erhält man

$$\left|\sum_{\substack{n=2\\ n\neq 6}}^{10} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{z_p^w}{w}\Pi_1(w,p)\,dw\right| = O\left(\frac{1}{\Pi_p}\cdot\frac{(\lg_2 z)^{3/2}}{(\lg z)^{1/2}}\right),$$

indem man die Integrale über die Wege $C_2 - C_5$ betrachtet.

2. *Das Integral über den Weg* C_6. Wegen

$$|\Pi_1(w,p)| \leqslant \prod_{q<p}\left(1+\frac{q^\delta}{f_1(q)}\right) = O\left(\frac{\lg_2 z}{\Pi_p}\right)$$

ergibt sich

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_6} \frac{z_p^w - z_p^{w}}{w}\Pi_1(w,p)\,dw\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_6}\left(\int_{z_p}^{z_p} \xi^{w-1}\,d\xi\right)\Pi_1(w,p)\,dw\right|$$

$$= O\left(\frac{1}{\Pi_p}\sqrt{\frac{\lg_2 z}{\lg z}}\right).$$

Mit Hilfe von Lemma 6a-b folgt aus der Formel (5.4):

$$(5.5)\qquad \Pi_1(w,p) = \frac{S_1(k)}{S_2(k)}\Pi(1+w,p) + O\left(|w|\cdot(\lg_2 z)^2 |\Pi(1+w,p)|\right),$$

für $w = -\delta + ia$, $|a| \leqslant \sqrt{\delta}$ und daher

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_6}\frac{z_p^w}{w}\Pi_1(w,p)\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{S_1(k)}{S_2(k)}\int_{-\sqrt{\delta}}^{\sqrt{\delta}}\frac{z_p^w}{w}\Pi(1+w,p)\,da + O\left((\lg_2 z)^2\cdot\int_{-\sqrt{\delta}}^{\sqrt{\delta}} z_p^{-\delta}|\Pi(1+w,p)|\,da\right),$$

weiters haben wir für $w = -\delta+ia$, $|a| \leqslant \sqrt{\delta}$: $\zeta(1+w) = 1/w + O(1)$, $\zeta(2+2w) = \zeta(2) + O(|w|)$ und wegen

$$\frac{S_1(k)}{S_2(k)\zeta(2)} = \frac{1}{S(k)},$$

sowie nach § 4, Lemma 3:

$$\Pi(1+w,p) = \frac{-1}{w\cdot\zeta(2)}e^{\omega+\gamma}\cdot e^{\psi(a\lg p)} + O(1),$$

also

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_6} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{S_1(k)}{S_2(k)}\cdot\frac{(-1)e^{\omega+\gamma}}{\zeta(2)}\int_{-\sqrt{\delta}}^{\sqrt{\delta}}\frac{z_p^w}{w^2}e^{\psi(a\lg p)}\,da + O\left(\frac{1}{\Pi_p}\sqrt{\frac{(\lg_2 z)^5}{\lg z}}\right)$$

$$= \frac{(-1)}{2\pi}\cdot\frac{1}{S(k)}e^{\omega+\gamma}\int_{-\sqrt{\lg p}}^{\sqrt{\lg p}}\frac{e^{u_p w}}{w^2}e^{\psi(t)}\,dt\,\lg p + O\left(\frac{1}{\Pi_p}\sqrt{\frac{(\lg_2 z)^5}{\lg z}}\right),$$

wo jetzt $t = \alpha \lg p$ und $w = -1+it$ gesetzt wurde. Nach Formel (4.1) ist

$$\frac{e^{\gamma}\lg p}{S(k)} = \frac{1}{\Pi_p}\left(1+O\left(\frac{1}{\lg p}\right)\right) \quad \text{für} \quad p > p_0 \geqslant c_3 \lg k.$$

Also

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_6} = \frac{(-1)}{2\pi}\cdot\frac{e^{\omega}}{\Pi_p}\left(1+O\left(\frac{1}{\lg p}\right)\right)\int_{-\sqrt{\lg z}}^{\sqrt{\lg z}}\frac{e^{u_p w}}{w^2}\,e^{\psi(t)}dt + O\left(\lg p\cdot\int_{\sqrt{\lg p}}^{\sqrt{\lg z}}\frac{dt}{t^2}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\Pi_p}\sqrt{\frac{(\lg_2 z)^5}{\lg z}}\right) = \frac{(-1)\,e^{\omega}}{2\pi}\cdot\frac{1}{\Pi_p}\int_{-\sqrt{\lg z}}^{\sqrt{\lg z}}\frac{e^{u_p w}}{w^2}\,e^{\psi(t)}dt + O\left(\frac{1}{\Pi_p}\cdot\sqrt{\frac{(\lg_2 z)^5}{\lg z}}\right).$$

Das heißt:

$$Z_p = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-iT}^{1+iT}\frac{z_p^{w}}{w}\,\Pi_1(w,p)\,dw + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{\Pi_p} + \frac{(-1)\,e^{\omega}}{2\pi}\cdot\frac{1}{\Pi_p}\int_{-\sqrt{\lg z}}^{\sqrt{\lg z}}\frac{e^{u_p w}}{w^2}\,e^{\psi(t)}dt + O\left(\frac{1}{\Pi_p}\sqrt{\frac{(\lg_2 z)^5}{\lg z}}\right),$$

und aus (3.10)

$$\text{(5.6)} \qquad \varepsilon(u_p) = \frac{e^{\omega}}{2\pi}\int_{-\sqrt{\lg z}}^{\sqrt{\lg z}}\frac{e^{u_p w}}{w^2}\,e^{\psi(t)}dt + O\left(\frac{(\lg_2 z)^{5/2}}{(\lg z)^{1/2}}\right)^{(6)},$$

mit den Bezeichnungen aus Lemma 3 und $w = -1+it$, für alle $p > p_0$, solange $p_0 \geqslant c_3 \lg k$ d. h. $\lg z \geqslant c_4 \lg_2 k \lg_3 k$, was wegen $N > k$ sicherlich erfüllt ist (siehe Seite 391).

§ 6. Berechnung von $R(z, \Theta)$. Nach 3.12 ist

$$R(z,\Theta) = \left(\sum_{p\leqslant p_0} + \sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\right)\frac{\Pi_p}{f(p)}\cdot\frac{\varepsilon(u_p)}{1-\varepsilon(u_p)}.$$

Wir verwenden jetzt die Formeln (5.2) bzw. (5.6):

$$\sum_{p\leqslant p_0} = O\left(\frac{S(k)}{(\lg z)^2}\cdot \lg_2 z\cdot \sum_{p\leqslant p_0}\frac{\omega(p)}{p\lg p}\right) = O\left(\frac{\lg_2 z}{(\lg z)^2}\cdot S(k)\right),$$

da $\sum_{p}(1/p\lg p)$ konvergent ist.

(6) Da wir bei der Herleitung der Formeln (5.2) bzw. (5.6) nirgends die Eigenschaft p = Primzahl verwendet haben, gelten diese auch wenn p eine beliebige reelle Zahl $\leqslant p_0$ bzw. $> p_0$ und $\leqslant z^{\Theta}$ ist.

$$\sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}} = \sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\frac{1}{p}\Pi_p\cdot\varepsilon_1(u_p) + \left(-\sum_{\substack{p_0<p\leqslant z^{\Theta}\\ p|k}}\frac{1}{p}\Pi_p\cdot\varepsilon_1(u_p)\right);$$

$\varepsilon(u_p)$ und damit auch $\varepsilon_1(u_p) = \varepsilon(u_p)/(1-\varepsilon(u_p))$ ist monoton fallend (für wachsendes u_p, siehe (3.9) und (3.10)) und weiter ist $u_p \geqslant \frac{1}{2}(1/\Theta-1) \geqslant \frac{1}{2}$, also $\varepsilon_1(u_p) = O(1)$ und wegen (4.1):

$$\sum_{\substack{p_0<p\leqslant z^{\Theta}\\ p|k}}\frac{1}{p}\Pi_p\cdot\varepsilon_1(u_p) = O\left(S(k)\cdot\sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\frac{1}{p\lg p}\right) = O\left(\frac{S(k)}{(\lg z)^2}\right).$$

Es bleibt

$$\sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\frac{1}{p}\Pi_p\cdot\varepsilon_1(u_p) = e^{-\gamma}S(k)\cdot\sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\frac{\varepsilon_1(u_p)}{p\lg p} + O\left(S(k)\cdot\sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\frac{1}{p(\lg p)^2}\right);$$

und

$$\sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\frac{1}{p(\lg p)^2} \leqslant \frac{1}{(\lg p_0)^2}\cdot\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p} = O\left(\frac{(\lg_2 z)^3}{(\lg z)^2}\right),$$

sowie (7)

$$\sum_{p_0<p\leqslant z^{\Theta}}\frac{\varepsilon_1(u_p)}{p\lg p} = \int_{p_0}^{z^{\Theta}}\frac{\varepsilon_1(u_x)}{x(\lg x)^2}\,dx + O\left(\frac{1}{(\lg z)^2}\right).$$

Wir führen im Integral eine neue Veränderliche ein $u = u_x = \frac{1}{2}(\lg z/\lg x - 1)$ d. h. $\lg x = \lg z/(2u+1)$:

$$\int_{p_0}^{z^{\Theta}}\frac{\varepsilon_1(u_x)}{x(\lg x)^2}\,dx = \frac{1}{\lg z}\int_{\eta}^{\eta_0}\varepsilon_1(u)\,2du \leqslant \frac{1}{\lg z}\cdot\frac{1}{\nu_0(\eta)}\int_{\eta}^{\eta_0}\varepsilon(u)\,du,$$

wobei

$$\eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lg z}{\lg p_0}-1\right) = 3\lg_2 z - \frac{1}{2}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Theta}-1\right), \qquad \nu_0(\eta) = 1-\varepsilon(\eta)$$

(7) Wegen $0 \leqslant \varepsilon_1(u_x) \leqslant a_1$, a_1 – Konstante, kann man auf $F(z,p) = \frac{a_1-\varepsilon_1(u_p)}{p\lg p} \geqslant 0$ (monoton fallend) mit geeigneter Abänderung den Satz aus E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. 1, S. 203, anwenden.

und weil $\varepsilon(u)$ monoton abnehmend ist. In das letzte Integral können wir Formel (5.6) einsetzen:

$$\int_{\eta}^{\eta_0} \varepsilon(u)2du = \frac{e^{\omega}}{2\pi}\int_{-\sqrt{\lg z}}^{\sqrt{\lg z}} \frac{e^{\varphi(t)}}{w^2}\left\{\int_{\eta}^{\eta_0} e^{w\cdot u}\cdot 2du\right\}dt + O\left(\frac{(\lg_2 z)^{5/2}}{(\lg z)^{1/2}}\cdot\int_{\eta}^{\eta_0} du\right)$$

$$= \frac{e^{\omega}}{2\pi}\int_{-\sqrt{\lg z}}^{\sqrt{\lg z}} \frac{e^{\varphi(t)}}{w^2}dt\left\{\int_{\eta}^{\infty} e^{wu}\cdot 2du\right\} + O\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\eta_0}\cdot e^{u(t)}dt}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{(\lg_2 z)^{7/2}}{(\lg z)^{1/2}}\right) = \frac{e^{\omega}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\varphi(t)}}{w^3}e^{w\eta}dt + O\left(\frac{(\lg_2 z)^{7/2}}{(\lg z)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{e^{\omega}\cdot 2e^{-\eta}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{u(t)}}{(\sqrt{1+t^2})^3}\cos F_3(t)\,dt + O\left(\frac{(\lg_2 z)^{7/2}}{(\lg z)^{1/2}}\right),$$

wegen $w = -1+it$, mit $F_3(t) = \eta\cdot t + 3\operatorname{arc tg} t - v(t)$ ($u(t)$, $v(t)$ siehe Lemma 3). Mit $I_3 = \int\limits_0^{\infty}\frac{e^{u(t)}\cdot\cos F_3(t)\,dt}{(\sqrt{1+t^2})^3}$ erhalten wir

$$R(z,\Theta) \leqslant \frac{S(k)}{\lg z}\cdot\frac{2e^{\omega-\eta}}{\pi e^{\gamma}\cdot\nu_0(\eta)}\cdot I_3 + O\left(\frac{S(k)(\lg_2 z)^{3,5}}{(\lg z)^{1,5}}\right). \tag{6.1}$$

§ 7. Berechnung von $\nu_0(\eta)$ und $N(z,\Theta)$. Zur Berechnung von $\nu_0(\eta)$ benötigen wir folgenden Hilfssatz:

LEMMA 1. *Es gilt in der oben verwendeten Bezeichnung (siehe* (1.9), *und Seite* 385)

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu^2(n)}{f_1(n)} = \frac{1}{S(k)}\left(\lg x + O\left((\lg_2 k)^2\right)\right) \tag{7.1}$$

wenn $\lg x \geqslant c(\lg_2 k)^2$.

Den Beweis bringen wir am Schluß des Paragraphen.

Für $\eta \leqslant 1$ wird nun

$$Z_p = \sum_{\nu_p\leqslant z_p}\frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)} = \sum_{n\leqslant p^{\eta}}\frac{\mu^2(n)}{f_1(n)} = \frac{\eta\lg p}{S(k)}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lg p}}\right)\right),$$

sobald $\sqrt{\lg p} \geqslant c_5(\lg_2 k)^2$ für alle $p > p_0$ d. h. $\lg p_0 \geqslant c_6(\lg_2 k)^4$ oder $\lg z \geqslant c_7(\lg_2 k)^4\lg_3 k$. Außerdem gilt (4.1):

$$\Pi_p = \frac{e^{-\gamma}S(k)}{\lg p}\left(1+O\left(\frac{1}{\lg p}\right)\right), \qquad \text{wenn} \qquad \lg z \geqslant c_4\lg_2 k\lg_3 k,$$

sodaß

$$\nu_0(\eta) = Z_p\cdot\Pi_p = e^{-\gamma}\eta\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\lg_2 z}{\lg z}}\right)\right)$$

und damit (nach (3.13) und (6.1))

$$N(z,\Theta) \geqslant N\left(\prod_{p\leqslant z^{\Theta}}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right) - R(z,\Theta)\right) - \sum_{d\leqslant z}|R_d|\cdot|\varrho_d|$$

$$\geqslant N\cdot\left(1-\frac{2e^{\omega+\gamma-\eta}}{\pi\cdot\eta}\Theta I_3\right)\frac{1}{\Theta}\cdot\frac{e^{-\gamma}\cdot S(k)}{\lg z} + O\left(N\cdot S(k)\cdot\frac{(\lg_2 z)^{3,5}}{(\lg z)^{1,5}}\right),$$

mit $\Theta = 1/(2\eta+1)$. Setzt man $c_0(\eta) = 2e^{\omega+\gamma-\eta}\Theta I_3/\pi\cdot\eta$, so gilt mit den groben Abschätzungen $u(t) \leqslant 0$ [8] und $I_3 \leqslant 1$ für $\eta = 0,9$:

$$c_0 \leqslant \frac{2\cdot e^1}{\pi\cdot 0,9}\cdot\frac{1}{2,8}\cdot 1 < 0,72.$$

Wir hatten schon (auf Seite 388) z mit $z = N/(\lg N)^{33}$ festgelegt, sodaß wir insgesamt erhalten:

$$N(z,\Theta) \geqslant c\frac{N}{\lg N}\cdot S(k) \tag{7.2}$$

mit $c > 0,39$ für alle $N \geqslant N_0$, solange $N > k$. Es folgt daraus das Ergebnis: Die Anzahl der Zahlen der arithmetischen Reihe $km+l$, $1 \leqslant m \leqslant N$ die aus höchstens zwei Primfaktoren bestehen, ist

$$\geqslant c\frac{N}{\lg N}\cdot S(k)$$

---

(8) Durch partielle Integration erhält man

$$e^{-1}\cdot u(t) = \int_0^t\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)\cos x\,dx + \frac{\cos t}{1+t^2} - 1.$$

Um $u(t) \leqslant 0$ zu beweisen, genügt es

$$\int_0^{\pi/2}(\ldots)\cos x\,dx + \frac{\cos t}{1+t^2} < 0,72 \qquad \text{für} \qquad t \geqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

zu zeigen, was man leicht erhält, wenn man beachtet: $\cos x = 1/(1+x^2)+c$, $0 \leqslant x \leqslant x_0$ $(= 1,10\ldots)$ mit $c \leqslant 0,1$, für $x_0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ aber $\cos x \leqslant 1/(1+x^2)$. Außerdem ist $u(\infty) = -Ei(1) = -1,895\ldots$

gleichmäßig für alle k, die der Ungleichung $N \geqslant k^a$ mit $a \geqslant 14+\varepsilon$ genügen; denn ist $N \geqslant k^a$ (mit $a \geqslant 1$), so besteht für die Anzahl r der Primteiler von n_m wegen $kN+l \leqslant N^{1+1/a+\varepsilon'}$ (für $N \geqslant N_0(\varepsilon')$ und etwa $\varepsilon' < \varepsilon$) die Ungleichung $\Theta r(1-\varepsilon) < 1+1/a+\varepsilon'$ und da $\Theta = 1/2{,}8$ also

$$r < 2{,}8\left(1+\frac{1}{a}+\varepsilon'\right)+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}2{,}8\left(1+\frac{1}{a}+\varepsilon'\right) = 2{,}8\left(1+\frac{1}{a}\right)+\varepsilon'',$$

was $r < 3$ ergibt, wenn $\frac{1}{a}2{,}8 \leqslant 0{,}2-2\varepsilon''$ (mit $\varepsilon'' \to 0$ wenn $\varepsilon \to 0$), d. h.

$$a \geqslant \frac{2{,}8}{0{,}2-2\varepsilon''} = \frac{2{,}8}{0{,}2}+\varepsilon''', \quad \text{mit} \quad \varepsilon''' \to 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon'' \to 0.$$

Somit $a \geqslant 14+\varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ beliebig klein und fest.

Die Anzahl der Quadratzahlen in einer arithmetischen Reihe ist aber von geringerer Größenordnung:

$$Q(k, N) = O\left(\frac{\sqrt{k(N+1)}}{k}\cdot v(k)\right) = O(\sqrt{N}).$$

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

THEOREM. *In jeder arithmetischen Reihe $km+l$, $(k, l) = 1$, $0 < l < k$, gibt es eine Primzahl oder eine aus zwei verschiedenen Primzahlen bestehende Zahl, für die die Abschätzung*

$$q_1(k, l) \leqslant c(\varepsilon)k^{15+\varepsilon} \tag{7.3}$$

besteht. Dabei ist $c(\varepsilon) > 0$ eine nur von ε abhängige Konstante und $\varepsilon > 0$ beliebig klein und fest(9).

Beweis von Lemma 1. Für alle $w = \sigma+it$ mit $\sigma \geqslant 1$ gilt nach [3], Kp. III, § 2, Satz 2.3, die Gleichheit:

$$\Phi(w) = \sum_n \frac{\mu^2(n)}{f_1(n)}n^{-w} = \prod_p \left(1+\frac{1}{f_1(p)}p^{-w}\right) \tag{7.4}$$

und durch analytische Fortsetzung besteht sie auch für w mit $\sigma < 1$. Das rechts stehende Produkt können wir umformen in

$$\Phi(w) = \zeta(1+w)\cdot\prod_{q|k}\left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right)^{-1}\cdot\prod_q\left(1-\frac{1}{q^{1+w}}\right)\left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right),$$

(9) Wir haben nirgends darauf geachtet, in den O-Gliedern eine genaue Abschätzung zu erhalten. Auch der Exponent in (7.3) läßt sich wahrscheinlich verbessern, z. B. indem man das Integral I_3 genauer berechnet.

Anmerkung bei der Korrektur. Der Exponent läßt sich mindestens zu $6\frac{9}{11}+\varepsilon < 6{,}8182$ verbessern ($\eta = 0{,}78$).

und es gilt daher für $w \to 0$ folgende Entwicklung:

$$\Phi(w) = \frac{a_{-1}}{w}+a_0+a_1w+\ldots \tag{7.4*}$$

Die Koeffizienten erhält man aus den drei Faktoren: $\zeta(1+w) = 1/w+ +c_0+c_1w+\ldots$, $\Pi_1 = b_0(k)+b_1(k)w+b_2(k)w^2+\ldots$, $\Pi_2 = 1+c_1'w+c_2'w^2+ +\ldots$; also $a_{-1} = b_0(k)$, $a_0 = b_0c_0+b_1+b_0c_1'$. Nun ist

$$b_0(k) = \prod_{q|k}\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{-1} = \frac{1}{S(k)}$$

und aus

$$\prod_{q|k}\left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{q-1}\right) = \prod_{q|k}\left(1+\frac{q^{-w}-1}{q}\right)^{-1} = 1+w\cdot\sum_{q|k}\frac{\lg q}{q}+\ldots$$

folgt

$$b_1(k) = \prod_{q|k}\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{-1}\cdot\sum_{q|k}\frac{\lg q}{q} = O(\lg_2 k),$$

also auch

$$a_0 = O(\lg_2 k).$$

Schreiben wir $\Phi(w) = \sum_n a_n'\cdot n^{-w}$, so heißt das: $a_n' = \mu^2(n)/f_1(n)$. Also

$$|a_n'| \leqslant \frac{1}{\prod_{p|n} f_1(p)} = \frac{1}{n\cdot\prod_{\substack{p|n\\ p\nmid k}}(1-1/p)} \leqslant \frac{c\lg n}{n},$$

da

$$\prod_{\substack{p|n\\ p\nmid k}}\left(1-\frac{1}{p}\right) \geqslant \prod_{p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{p}\right) \geqslant \frac{c}{\lg n}.$$

Wir wenden den auf Seite 394 zitierten Hilfssatz an und erhalten:

$$\sum_{n<x} a_n' = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\Phi(w)\frac{x^w}{w}dw+O\left(\frac{x^b}{T\cdot(b-1)}\right)+O\left(\frac{\Psi(x/2)x\lg 2x}{T}\right), \tag{7.5}$$

mit $x = N+\frac{1}{2}$, $b > 1$ und $\Psi(x) = (\lg x)/x$. Wir wählen $b = 1+c_1/\lg x$ und nach dem Residuensatz ist (7.5) gleichbedeutend mit:

$$(7.6)\qquad \sum_{n<x} a_n' = \operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{\Phi(w)x^w}{w}\right\} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2,C_3,C_4}\frac{\Phi(w)x^w}{w}\,dw + O\left(\frac{x\lg x}{T}\right),$$

wobei C_2, C_3, C_4 die folgenden Wege sind:

$$C_2 \sim (b+iT,\ -a+iT),\qquad C_3 \sim (-a+iT,\ -a-iT),$$
$$C_4 \sim (-a-iT,\ b-iT),$$

alles geradlinige Verbindungen ($a > 0$). Nun ist

$$(7.7)\qquad \operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{\Phi(w)x^w}{w}\right\} = \frac{a_{-1}}{1!}\lg x + a_0$$

wegen (7.4*). Zur Abschätzung der Integrale über die Wege $C_2 - C_4$ benötigen wir: ist $a = c/(\lg T\cdot\lg_2 T)^{3/4}$, so gilt (siehe § 4 Lemma 1) für $w = \sigma + iT$ mit $\sigma \geqslant -a$

$$|\Phi(w)| = O\left(\lg T\cdot\left|\prod_{q|k}\left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right)^{-1}\right|\right) = O\big((\lg T)^m\big),$$

sobald

$$(\lg T\lg_2 T)^{3/4} \geqslant c\lg_2 k;$$

denn

$$\left|\prod_{q|k}\left(1+\frac{1}{q-1}q^{-w}\right)^{-1}\right| \leqslant \prod_{q|k}\left(1-\frac{1}{q-1}q^{a}\right)^{-1} \leqslant c\cdot\prod_{3<q\leqslant p_{v(k)}}\left(1-\frac{2}{q^{1-a}}\right)^{-1}$$

$$= c\cdot\exp\left\{\sum_{q\leqslant p_{v(k)}}\frac{2}{q^{1-a}} + O(1)\right\} = O\big((\lg_2 k)^m\big),\qquad m = \text{absolute Konstante},$$

da $q^a = O(1)$ für $c\lg_2 k \leqslant (\lg T\lg_2 T)^{3/4}$ und $\sum\limits_{q\leqslant p_{v(k)}}(1/q) = O(\lg_3 k)$. Für $w = -a+it$, $|t| \leqslant T$ ist

$$|\Phi(w)| = O\big((\lg T)^m\cdot\lg|t|\big),\qquad \text{wenn}\quad |t| > 1$$

und

$$|\Phi(w)| = O\left((\lg T)^m\frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\right),\qquad \text{wenn}\quad |t| \leqslant 1.$$

Mit diesen Abschätzungen erhalten wir:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{b}|\Phi(\sigma+iT)|\frac{x^\sigma}{\sqrt{\sigma^2+T^2}}\,d\sigma = O\left(x^b(\lg T)^m\cdot\int\limits_{-a}^{b}\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2+T^2}}\right)$$

$$= O\left(\frac{b+a}{T}\cdot x^b(\lg T)^m\right) = O\left(\frac{x(\lg x)^m}{T}\right)$$

und analog das Integral über den Weg C_4.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{+T}|\Phi(-a+it)|\cdot\frac{x^{-a}}{\sqrt{a^2+t^2}}\,dt$$

$$= O\left(x^{-a}\int\limits_0^1\frac{dt\cdot(\lg T)^m}{a^2+t^2} + x^{-a}\cdot\int\limits_1^T\frac{\lg t\,dt}{t}\cdot(\lg T)^m\right)$$

$$= O\big(x^{-a}\cdot(\lg T)^{m+1} + x^{-a}\cdot(\lg T)^{m+2}\big) = O\big(x^{-a}\cdot(\lg x)^{m+2}\big) = O(1/\lg x),$$

wenn man $T = x^2$ wählt.

Literaturverzeichnis

[1] G. Hardy, E. Littlewood, *Some problems of partitio numerorum III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. 44 (1923), S. 1-70.

[2] T. Nagell, *Introduction to number theory.*

[3] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin-Heidelberg 1957.

[4] — *Über die kleinste quadratfreie Zahl in einer arithmet. Reihe*, Monatshefte f. Math. 62 (1958), S. 173-176.

[5] H. Rademacher, *Beiträge zur Viggo Brun'schen Methode in der Zahlentheorie*, Abh. math. Sem. Hamburg III (1924), S. 12-30.

[6] A. Selberg, *On elementary methods in prime-number-theory and their limitations*, 11. Skand. Math. Kongr., Trondheim 1949.

[7] — *The general sieve-method and its place in prime-number-theory*, Proc. Inter. Congr. Math., Cambr. Mass. 1950.

[8] — *An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arith. progression*, Ann. of Math. (2) 50 (1949), S. 66-78.

[9] — *An elementary proof of the prime-number-theorem for arithmetic progressions*, Canad. J. Math. 2 (1950), S. 305-313.

[10] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Moskau 1953.

[11] A. I. Vinogradoff, *Anwendung der Zeta-Funktion auf das Sieb von Eratosthenes*, Mat. Sbor. 41 (83) (1957) (russisch), S. 49-80.

[12] — *Brief an die Redaktion*, Ebenda, S. 415-416.

[13] N. I. Klimov, Uspiechi Mat. Nauk, Tom. XIII B 3 (81) (1958) (russisch), S. 145-164.

Zusatz bei der Korrektur.

1. Wie den Science Abstracts of China No. 1 (1958), S. 7-8 zu entnehmen ist, konnte inzwischen Pan Cheng-Tung mit analyt. Methoden (Beweis von Linnik) zeigen: In jeder arithm. Reihe mit dem Modul k gibt es eine Primzahl, für welche gilt $p_1(k, l) < k^c$ mit $c \leqslant 5{,}448$.

2. Wendet man obige Methode auf die Menge der natürlichen Zahlen $\mathfrak{L} = \{n|x < n \leqslant x+y\}$ mit $y = [x^\alpha]$, $0 < \alpha < 1$ an, so erhält man leicht folgendes Ergebnis:

Ist x eine genügend große reelle Zahl, so liegt im Intervall $(x, x+\sqrt{x})$ stets eine Zahl, die aus höchstens 5 Primfaktoren besteht. Vgl. hierzu Y. Wang, Sci. Record (N. S.) 1 (1957), No. 3, S. 1-5.

Reçu par la Rédaction le 16. 3. 1959