ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Sur les nombres premiers ayant des chiffres initiaux et finals donnés

par

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant plus fort que les théorèmes 1 et 2 de ma Note [1]:

THÉORÈME. *$a_1, a_2, \ldots, a_m$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ étant deux suites finies quelconques de chiffres du système décimal où $b_n = 1, 3, 7$ ou 9, il existe un nombre premier p aussi grand que l'on veut dont les m premiers chiffres sont successivement $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et les n derniers sont successivement $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Démonstration. Soit $b_1, b_2, \ldots, b_n$ une suite finie de chiffres du système décimal tels que $b_n = 1, 3, 7$ ou 9, et soit b le nombre naturel de n chiffres qui sont successivement $b_1, b_2, \ldots, b_n$. On a évidemment $(10^n, b) = 1$. D'après le théorème de Lejeune-Dirichlet il existe une infinité de nombres premiers de la forme $10^n k + b$, où k est un nombre naturel. Soit, pour x réel, $\pi'(x)$ le nombre de tous les nombres premiers de la forme $10^n k + b$ (où $k = 0, 1, 2, \ldots$) ne dépassant pas x. On démontre d'une façon „élémentaire" que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\pi'(x) : \frac{x}{2^{m+1}5^{n-1}\log x}\right) = 1 \tag{1}$$

(voir, par exemple, E. Trost [2], p. 78).

LEMME. *a et a_1 étant des nombres réels tels que $0 < a < a_1$, on a pour x suffisamment grands $\pi'(ax) < \pi'(a_1 x)$.*

Démonstration du lemme. Comme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log ax}{\log a_1 x} = 1,$$

la formule (1) donne sans peine

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi'(a_1 x)}{\pi'(ax)} = \frac{a_1}{a} > 1,$$

d'où l'on obtient tout de suite notre lemme.

Soit maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_m$ une suite finie quelconque de chiffres du système décimal, $a_1 \neq 0$, et soit a le nombre naturel ayant m chiffres qui sont successivement $a_1, a_2, \ldots, a_m$. D'après notre lemme on a pour x suffisamment grand $\pi'(ax) < \pi'\big((a+1)x\big)$, et il en résulte qu'il existe un nombre naturel s aussi grand que l'on veut et tel que $\pi'(a, 10^s) < < \pi'\big((a+1)10^s\big)$. Il existe donc un nombre premier p de la forme $p = = 10^n k+b$, tel que

$$a\cdot 10^s < p < (a+1)\cdot 10^s.$$

Or, il s'ensuit de ces inégalités que les premiers m chiffres du nombre p sont respectivement les mêmes que ceux du nombre a; les n derniers chiffres du nombre $p = 10^n k+b$ étant évidemment les mêmes respectivement que ceux du nombre b, notre théorème se trouve démontré.

D'après une remarque de S. Knapowski une legère modification de notre démonstration permettrait de prouver un théorème plus général, où l'on remplacerait la base 10 par une base g, où g est un nombre naturel quelconque >1, la condition $(b_n, 10) = 1$ devant être remplacée par $(b_n, g) = 1$.

Travaux cités

[1] W. Sierpiński, *Sur l'existence des nombres premiers avec une suite arbitraire des chiffres initiaux*, Le Matematiche 6 (1951), p. 135-137.

[2] E. Trost, *Primzahlen*, Basel 1953.

Reçu par la Rédaction le 10. 11. 1958

ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Über einen verallgemeinerten Fermatschen Satz

von

B. Stolt (Uppsala)

1. P. Fermat hat den folgenden Satz aufgestellt.

Die Gleichung $x^2+2 = y^3$ besitzt genau die Lösung $x = 5$, $y = 3$ in natürlichen Zahlen x, y.

Fermat behauptet, er habe den Satz bewiesen, aber der erste bekannte Beweis stammt von Euler.

Es seien $n > 1$ und D natürliche Zahlen. Die allgemeinere Gleichung

$$x^2+D = y^n \tag{1}$$

ist von T. Nagell [5]-[8] und W. Ljunggren [1], [2] behandelt worden. Die meisten Resultate beziehen sich auf die Gleichung

$$x^2+D = y^q, \tag{2}$$

wo q eine ungerade Primzahl ist. Für $D = 1, 2, 3$ ist (1) von Nagell vollständig gelöst worden.

Bei den obigen Untersuchungen wird im allgemeinen vorausgesetzt, daß die Klassenzahl h von $K(\sqrt{-D})$ zu n prim ist. Durch Zerlegung des linken Gliedes von (1) wird dann (1) in eine Gleichung vom Typus $F(u, v) = k$ überführt, wo k eine Konstante und $F(u, v)$ eine binäre ganzzahlige Form ist. Diese neue Gleichung ist so beschaffen, daß man aus ihr leicht einsieht, daß entweder u oder v nur gewisser Werte fähig ist. Für besondere Werte von n und D läßt sich dann zeigen, daß (1) in natürlichen Zahlen x, y unmöglich ist oder genau eine gewisse Lösung hat.

In der vorliegenden Arbeit wird die noch allgemeinere Gleichung

$$Cx^2+D = y^q \tag{3}$$

behandelt, wo C, D natürliche Zahlen sind und q eine ungerade Primzahl ist. Ferner ist CD quadratfrei, $CD \not\equiv 7 \pmod 8$ und $h(\sqrt{-CD})$ prim zu q Nach Thue [11] hat (3) nur endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y.