ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Sur quelques problèmes concernant les sommes de quatre cubes

par

A. MĄKOWSKI (Warszawa)

Dans le travail [3] A. Schinzel et W. Sierpiński ont posé question à savoir si l'équation $2 = x^3-y^3-z^3-t^3$ a une infinité de solutions en nombres naturels x, y, z, t. La réponse positive résulte de l'identité

$$2 = (3n^3+1)^3-(3n^3-1)^3-(3n^2)^3-(3n^2)^3 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ (}^1\text{)}.$$

Dans le même travail, on trouve la démonstration de l'hypothèse H qui y est énoncée pour les entiers k tels que $|k| \leqslant 300$ sauf, peut-être, pour les nombres ∓ 148, ∓ 257 et ∓ 284. L'hypothèse H est vraie pour les nombres entiers k tels que $301 \leqslant |k| \leqslant 350$. La démonstration de cette assertion résulte des décompositions que je donne ci-dessous et des théorèmes 1 et 2 du travail [3]. Dans ma table, je donne aussi les décompositions corrigées des nombres 266 et 292 qui ont été données avec des erreurs typographiques dans la table des pages 29-30 du travail [3], ainsi que la décomposition du nombre 214, omise dans ce travail. Je donne aussi le développement du nombre 257 dont on ne savait pas s'il vérifie l'hypothèse H.

Dans le travail [1] Chao Ko a démontré que l'équation

$$k = x^3+y^3+2z^3 \tag{1}$$

a au moins une solution en nombres entiers x, y, z pour les nombres entiers k tels que $|k| \leqslant 100$ sauf, peut-être, pour $|k| = 76$ et 99. L'équation (1), a, comme on sait, au moins une solution lorsque k est un entier divisible par 6. Elle a aussi des solutions dans le cas où $k = 9(r^3+s^3)$, r et s étant des entiers, ce qui résulte de l'identité

$$9(r^3+s^3) = (2r-s)^3+(2s-r)^3+2(r+s)^3.$$

---

[1] (Ajouté pendant la correction des épreuves). On peut déduire cette identité en posant $c = 2$ dans l'identité qui se trouve dans le travail de C. Segre, *A note on arithmetical properties of cubic surfaces*, J. London Math. Soc. 18 (1943), p. 24-31, théorème 12, équation (ii).

De la table donnée plus bas il résulte que l'équation (1) a au moins une solution pour les entiers k tels que $101 \leqslant |k| \leqslant 220$ sauf, peut-être, pour les nombres k tels que $|k| = 113$, 148, 183, 190 et 195.

$$n = a^3+b^3-c^3-d^3$$

n	a	b	c	d	$(a+b)(c+d)$
214	6	-1	1	0	5
257	17	50	-146	148	$67\cdot 2$
266	11	-10	1	4	5
292	52	52	-151	155	$104\cdot 4$
301	43	-38	23	23	$5\cdot 46$
302	11	-7	7	7	$4\cdot 14$
$304 = 2^3\cdot 38$					
308	7	0	2	3	$7\cdot 5$
310	4	13	26	-25	17
311	20	20	25	4	$40\cdot 29$
319	7	-2	2	2	$5\cdot 4$
$320 = 4^3\cdot 5$					
322	7	14	16	-11	$21\cdot 5$
326	7	-2	2	1	$5\cdot 3$
$328 = 2^3\cdot 41$					
329	14	5	13	7	$19\cdot 20$
337	7	1	2	-1	8
338	11	2	10	1	$13\cdot 11$
340	6	5	1	0	11
346	13	-11	8	2	20
347	11	2	10	-2	$13\cdot 8$

$$n = x^3+y^3+2z^3$$

n	x	y	z	n	x	y	z
101	-3	0	4	121	-2	1	4
103	-11	16	-11	122	-1	5	-1
104	-124	-70	104	123	0	5	-1
105	-18	17	8	124	-1	5	0
106	-16	14	9	125	0	5	0
107	3	4	2	127	0	5	1
109	0	5	-2	128	1	5	1
110	-2	4	3	129	0	1	4
111	-6	7	-2	130	1	1	4
112	4	4	-2	131	2	5	-1
113				133	2	5	0
115	-2	5	-1	134	-14	6	11
116	-7	3	6	135	2	5	1
117	-2	5	0	136	-7	9	-5
118	0	4	3	137	1	2	4
119	-2	5	1	139	-14	13	7

n	x	y	z	n	x	y	z
140	-1	5	2	181	-6	7	3
141	0	5	2	182	3	3	4
142	1	5	2	183			
143	-6	7	2	184	-2	4	4
145	3	4	3	185	-7	8	2
146	4	14	-11	187	2	5	3
147	-2	3	4	188	-3	7	-4
148				189	4	5	0
149	2	5	2	190			
151	-4	7	-4	191	-3	6	1
152	3	5	0	193	1	4	4
153	-7	4	6	194	-4	2	5
154	-1	3	4	195			
155	0	3	4	196	5	5	-3
157	4	7	-5	197	0	13	-10
158	-13	11	8	199	-1	6	-2
159	-6	5	5	200	2	4	4
160	-7	23	-18	201	1	6	-2
161	-1	6	-3	202	-5	7	-2
163	1	6	-3	203	-10	11	-4
164	-5	7	-3	205	4	5	2
165	-3	4	4	206	3	5	3
166	-8	-2	7	207	-2	7	-4
167	-7	8	-1	208	-2	6	0
169	-7	8	0	209	-41	-14	33
170	2	6	-3	211	28	73	-59
171	-2	5	3	212	29	47	-40
172	5	63	-50	213	-1	6	-1
173	-3	6	-2	214	0	6	-1
175	-8	1	7	215	-1	6	0
176	-7	17	-13	217	1	6	0
177	-97	-6	77	218	0	6	1
178	-1	5	3	219	1	6	1
179	0	5	3	220	-5	7	1

Les décompositions des nombres 161 et 170 données ci-dessus sont empruntées au travail [2] de L. J. Mordell et la décomposition du nombre 203 m'a été communiquée par S. Masłowski.

Travaux cités

[1] Chao Ko, *Decompositions into four cubes*, J. London Math. Soc. 11 (1936), p. 218-219.

[2] L. J. Mordell, *On the four integer cubes problem*, J. London Math. Soc. 11 (1936), p. 208-218.

[3] A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur les sommes de quatre cubes*, Acta Arithmetica 4 (1958), p. 20-30.

Reçu par la Rédaction le 31. 3. 1958