ACTA ARITHMETICA
XLIX (1988)

S-целые решения одного класса диофантовых уравнений норменного вида с полиномиальной правой частью

С. В. Котов (Минск)

75-летию профессора
П. Эрдёша посвящается

Будем обозначать через $\overline{|\gamma|}$ максимум абсолютных величин, сопряженных с алгебраическим γ — *размер* γ, а через $h(\gamma)$ — максимум абсолютных величин коэффициентов минимального полинома для алгебраического γ — *высоту* γ. Мы будем использовать свойства функций „размера" и „высоты", а также взаимосвязь между ними (см., например, [4], гл. II, § 1).

Пусть $\boldsymbol{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел, $\boldsymbol{F}$ — поле алгебраических чисел степени g над полем рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$, α — целое алгебраическое над $\boldsymbol{F}$ степени d и $h(\alpha) \geqslant 4$, причем такое, что для натурального $D \geqslant 4$ степень $\omega_l = \sqrt[D]{-\alpha}$ относительно поля $\boldsymbol{F}(\alpha)$ равна D; $\omega_1, \ldots, \omega_{l-1}$ $(l \geqslant 2)$ лежат в кольце целых чисел $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{F}}$ поля $\boldsymbol{F}$, линейно независимы над $\boldsymbol{Q}$ и $h(\omega_i) \leqslant H$ $(1 \leqslant i \leqslant l-1)$; $f(x_1, \ldots, x_l)$ — полином от переменных $x_1, \ldots, x_l$ степени m с целыми рациональными коэффициентами, абсолютная величина которых не превосходит H_f и число которых равно $c(m)$.

Обозначим через $S = \{p_1, \ldots, p_s\}$ $(s \geqslant 0)$ множество фиксированных простых чисел и через $P = \max p_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s$, $P = 1$ при $s = 0)$. Под *S-целым числом* будем понимать несократимую рациональную дробь, знаменатель которой имеет вид $p_1^{a_1} \ldots p_s^{a_s}$ $(a_j \geqslant 0$ — целые рациональные числа). Очевидно, что множество S-целых чисел образуют кольцо $\boldsymbol{Z}_S$. Если z — S-целое число и $z = u/v$, где $u, v \in \boldsymbol{Z}$ и $(u, v) = 1$, то *высотой* $h(z)$ числа z назовем $\max(|u|, |v|)$. Через $D(z)$ обозначим *числитель* S-целого числа z.

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Если*

$$D > 4\left(c_1 P^{2gd} s \ln P (\ln D)^2 + 2(gd+1) c_2 \ln D + m + 1\right), \tag{1}$$

где $c_1 = 6(gd)^3 (48gd)^{36} \ln h(\alpha)$ *и* $c_2 = 2(gd)^2 (48gd)^{600} \ln h(\alpha) \ln\ln h(\alpha)$, *то для всех решений* $(x_1, \ldots, x_l) \in \boldsymbol{Z}_S^l$, *отличных от* $(x_1, \ldots, x_{l-1}, 0)$, *диофантова* *уравнения*

$$\mathrm{Nm}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_l x_l) = f(x_1, \ldots, x_l), \tag{2}$$
$$(D(x_1), \ldots, D(x_l)) \mid a, \quad a \in \boldsymbol{Z}$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max(h(x_1), \ldots, h(x_l)) \leqslant\ & 12^{gd}(l!\,(gH)^l)^{2g} \exp\{4c_3(gd)^2 R\} \\ & \times \left(4|a|^{gd}(l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{2(gd)^2 s \ln P} (c(m) H_f)^{3/D} \\ & \times \left(\exp\{c_4 R\}\, c_5^{c_2 \ln D} (gdh(\alpha))^{gd} |\mathrm{Nm}(\alpha)|^{2s \ln P}\right)^{3gd/D}, \end{aligned} \tag{3}$$

где R — регулятор поля $\boldsymbol{F}(\alpha)$, c_3 и c_4 явно выражаются через gd, $c_5 = 2^{2gd+3}(gd)^2$.

Уравнение вида (2) в случае $(x_1, \ldots, x_l) \in \boldsymbol{Z}^l$ неэффективно анализировал при достаточно общих предположениях Шмидт [10]. Эффективный анализ уравнений такого типа для $(x_1, \ldots, x_l) \in \boldsymbol{Z}^l$ осуществил Фельдман, когда $\omega_1, \ldots, \omega_l$ — некоторые алгебраические числа специального вида, в левой части (2) стоит норма относительно некоторого квадратичного поля, а в правой — многочлен f небольшой степени [5]. Недавно автор эффективно проанализировал (2) в случае решений $(x_1, \ldots, x_l) \in \boldsymbol{Z}^l$, отличных от $(x_1, \ldots, x_{l-1}, 0)$ [1]. Если же рассматривать (2), когда в правой части стоит константа, отличная от нуля, то следует назвать эффективные результаты Дьёри ([7], [8]) и автора ([2], [3]).

При доказательстве теоремы мы будем использовать некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Существуют такие независимые алгебраические единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ $(r < gd)$ поля $\boldsymbol{F}(\alpha)$, порождающие группу $\boldsymbol{E}$, для которых*

$$\max_{(k)} \overline{|\varepsilon_k|} \leqslant \exp\{c_3 R\} \qquad (1 \leqslant k \leqslant r).$$

Далее, для каждого $0 \neq \gamma \in \boldsymbol{F}(\alpha)$ найдется такая единица $\varepsilon \in \boldsymbol{E}$, что

$$\overline{|\varepsilon\gamma|} \leqslant \exp\{c_4 R\} |\mathrm{Nm}(\gamma)|^{1/gd}.$$

Доказательство леммы см. в ([4], гл. II, § 2, леммы 2.1 и 2.2).

Лемма 2. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ $(n \geqslant 2)$ — алгебраические числа высот не более $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ соответственно, $4 \leqslant \Gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \Gamma_n$, $\mathscr{T} = \ln \Gamma_1 \ldots \ln \Gamma_n$; p — простое число и $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля $\boldsymbol{Q}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, имеющего степень q над $\boldsymbol{Q}$; $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\, p = e$ и $q_{\mathfrak{p}} = [1/2 + e/(p-1)]$ ($[\gamma]$ — целая часть действительного γ), $Q_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{q_{\mathfrak{p}}}(N(\mathfrak{p})-1)$. Тогда неравенство*

$$\infty > \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(1 - \gamma_1^{b_1} \ldots \gamma_n^{b_n}) > (16(n+1)q)^{12(n+1)} (Q_{\mathfrak{p}}/\ln p) \mathscr{T} (\ln B)^2$$

не имеет решения в целых рациональных числах $b_1, \ldots, b_n$, $B \geqslant \max_{(i)} |b_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $B \geqslant 4$.

Доказательство леммы см. в ([9], стр. 29–57).

Лемма 3. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ $(n \geqslant 2)$ — алгебраические числа, отличные от 0 и 1, степени не более q и высот не более $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ соответственно, $4 \leqslant \Gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \Gamma_n$, $\mathscr{T} = \ln \Gamma_1 \ldots \ln \Gamma_n$ и $\mathscr{T}' = \mathscr{T}/\ln \Gamma_n$. Тогда для всех целых рациональных чисел $b_1, \ldots, b_n$, $B \geqslant \max_{(i)} |b_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $B \geqslant 4$, имеет место неравенство*

$$|b_1 \ln \gamma_1 + \ldots + b_n \ln \gamma_n| > \exp\{-(16nq)^{200n} \ln B \mathscr{T} \ln \mathscr{T}'\}, \tag{*}$$

если левая часть (*) отлична от нуля (для логарифмов берутся главные значения).

Доказательство леммы см. в ([6], стр. 1–27).

Замечание. Пусть выполняются условия леммы 3, $b \neq 0$ — целое рациональное и $B_i = b_i/b$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, тогда

$$\begin{aligned} 0 \neq\ & |1 - \gamma_1^{B_1} \ldots \gamma_n^{B_n}| \\ & > (2|b|)^{-1} \exp\{-(16(n+1)q)^{200(n+1)} \ln(nB) \mathscr{T} \ln \mathscr{T}'\}. \end{aligned} \tag{**}$$

Действительно, для любого комплексного z, удовлетворяющего условию $|1-z| \leqslant 1/3$, следует $|\ln z| \leqslant 2|1-z|$. Если обозначить правую часть (**) через ω и допустить противное, получаем, что $|\ln(\gamma_1^{B_1} \ldots \gamma_n^{B_n})| \leqslant 2\omega$. Но

$$b \ln(\gamma_1^{B_1} \ldots \gamma_n^{B_n}) = b_0 \ln(-1) + b_1 \ln \gamma_1 + \ldots + b_n \ln \gamma_n,$$

где b_0 — целое рациональное, $|b_0| \leqslant nB$ и применение леммы 3 приводит к противоречию с нашим допущением.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы.

Пусть $x_i = \tilde{x}_i/\Delta_i$, $\Delta_i = p_1^{v_{1i}} \ldots p_s^{v_{si}}$, $(\tilde{x}_i, \Delta_i) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $v_j = \max_{(i)} v_{ji}$, $v = \max_{(j)} v_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s,\ 1 \leqslant i \leqslant l)$, $\Delta = p_1^{v_1} \ldots p_s^{v_s}$, $X_i = \Delta x_i$, $X = \max_{(i)} |X_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta^{gdD} \mathrm{Nm}(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_l x_l) &= \mathrm{Nm}(\omega_1 X_1 + \ldots + \omega_l X_l) \\ &= \Delta^{gdD} f(x_1, \ldots, x_l) \\ &= p_1^{z_1} \ldots p_s^{z_s} \tilde{f}(X_1, \ldots, X_l) = A, \end{aligned} \tag{4}$$

$\tilde{f}(X_1, \ldots, X_l)$ — полином с целыми рациональными коэффициентами степени m, $(X_1, \ldots, X_l) \mid a$ и

$$z_j \geqslant (gdD - m) v_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant s). \tag{5}$$

Положим $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{F}(\alpha)$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}(\sqrt[D]{-\alpha})$, $\boldsymbol{Y} = \omega_1 X_1 + \ldots + \omega_{l-1} X_{l-1}$, $Z = X_l$ и перепишем (4) в виде

$$\mathrm{Nm}(\omega_1 X_1 + \ldots + \omega_l X_l) = \mathrm{Nm}_{L/Q}(Y + \sqrt[D]{-\alpha}\, Z) \tag{6}$$
$$= \mathrm{Nm}_{K/Q}(\mathrm{Nm}_{L/K}(Y + \sqrt[D]{-\alpha}\, Z))$$
$$= \mathrm{Nm}_{K/Q}(Y^D + \alpha Z^D) = A.$$

Из (6) получаем для идеала $(Y^D+\alpha Z^D)$ разложение на идеалы в кольце целых чисел $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ поля $\boldsymbol{K}$:

$$(Y^D+\alpha Z^D) = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1^{U_1}\ldots\mathfrak{p}_t^{U_t}, \tag{7}$$

где идеал $\mathfrak{a}|(\bar{f}(X_1, \ldots, X_l))$, простые в $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$ идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ $(t \leqslant gds)$ входят в простые $p_1, \ldots, p_s$. Переходя в (7) от идеалов к числам, имеем

$$Y^D+\alpha Z^D = \tau\beta, \tag{8}$$

где τ — неизвестная единица в $\boldsymbol{K}$, $(\beta) = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1^{U_1}\ldots\mathfrak{p}_t^{U_t}$. Так как

$$|A| < c(m)\, H_f\, P^{svgdD} X^m,$$

то по лемме 1 найдется в $\boldsymbol{E}$ единица $\varepsilon = \varepsilon_1^{T_1}\ldots\varepsilon_r^{T_r}$, что

$$\overline{|\varepsilon\tau\beta|} < \exp\{c_4 R\}\, P^{svD}(c(m)\, H_f\, X^m)^{1/gd}. \tag{9}$$

Пусть $T_k = t_k D + t'_k$, $0 \leqslant t'_k < D$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$, $\varepsilon' = \varepsilon_1^{t_1}\ldots\varepsilon_r^{t_r}$, $\varepsilon'' = \varepsilon_1^{t'_1}\ldots\varepsilon_r^{t'_r}$ и $\tilde{Y} = \varepsilon' Y$, $\tilde{Z} = \varepsilon' Z$. Замечаем, что из (7) и (8) следует

$$\tilde{Y}^D+\alpha\tilde{Z}^D = (\varepsilon'')^{-1}\varepsilon\tau\beta. \tag{10}$$

В силу первого неравенства в лемме 1 имеем $\overline{|\varepsilon''|} \leqslant \exp\{c_3 DR\}$, откуда $|\varepsilon''| \geqslant \exp\{-c_3 gdDR\}$ и из соотношений (9), (10) вытекает

$$\overline{|\tilde{Y}^D+\alpha\tilde{Z}^D|} < \exp\{(c_3 gdD + c_4)R\}\, P^{svD}(c(m)\, H_f\, X^m)^{1/gd}. \tag{11}$$

Оценим сверху $U = \max\limits_{(j)} U_j$ $(1 \leqslant j \leqslant t)$, что позволит оценить сверху v. Можем считать, что $U = U_1$. Имеем возможности: либо

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\tilde{Y}^D+\alpha\tilde{Z}^D) = \min(\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}\tilde{Y}^D, \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}\alpha\tilde{Z}^D), \tag{12}$$

либо

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\tilde{Y}^D+\alpha\tilde{Z}^D) > \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}\tilde{Y}^D = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}\alpha\tilde{Z}^D. \tag{13}$$

Если выполняется (12), то

$$U \leqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\tilde{Y}^D+\alpha\tilde{Z}^D) \leqslant D\,\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\tilde{Y}, \tilde{Z}) + \ln|\mathrm{Nm}(\alpha)|/\ln 2 = U'. \tag{14}$$

Если же выполняется (13), то

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}\tilde{Y}^D \leqslant U' \tag{15}$$

и

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\tilde{Y}^D+\alpha\tilde{Z}^D) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}\tilde{Y}^D + \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(1+\alpha(\tilde{Y}^{-1}\tilde{Z})^D). \tag{16}$$

Оценим сверху второе слагаемое в правой части (16) с помощью леммы 2. В нашем случае $n = 2$, $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = -\tilde{Y}^{-1}\tilde{Z}$, $b_1 = 1$, $b_2 = D$ и $q \leqslant gd$. Следовательно,

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(1+\alpha(\tilde{Y}^{-1}\tilde{Z})^D) < (48gd)^{36} P^{2gd}\ln h(\alpha)\ln h(\tilde{Y}^{-1}\tilde{Z})(\ln D)^2. \tag{17}$$

Так как

$$h(\tilde{Y}^{-1}\tilde{Z}) \leqslant (2(gd)^2)^{(gd)^2}(h(\tilde{Y})\,h(\tilde{Z}))^{gd(gd+1)} \tag{18}$$
$$\leqslant 2^{(gd)^2(2gd+3)}(gd)^{2(gd)^2}(\overline{|\tilde{Y}|}\,\overline{|\tilde{Z}|})^{(gd)^2(gd+1)} = h,$$

то из (17) вытекает

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(1+\alpha(\tilde{Y}^{-1}\tilde{Z})^D) < c_1 P^{2gd}(\ln D)^2\ln(\overline{|\tilde{Y}|}\,\overline{|\tilde{Z}|}) = U''. \tag{19}$$

На основании (15), (16) и (19) заключаем, что

$$U \leqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\tilde{Y}^D+\alpha\tilde{Z}^D) \leqslant U'+U''. \tag{20}$$

Из (1), (4), (5) и (20) следует

$$v < gd(U'+U'')/(gdD-m) < 4(U'+U'')/3D. \tag{21}$$

Теперь оценим сверху $\max\limits_{(j)}\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_j}(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ $(1 \leqslant j \leqslant t)$ через параметры исходного уравнения (2).

Пусть $(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = \mathfrak{d} \subset \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1^{V_1}\ldots\mathfrak{p}_t^{V_t}\tilde{\mathfrak{d}}$, $(\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_t, \tilde{\mathfrak{d}}) = 1$ и $(\tilde{Y}) = \mathfrak{d}\mathfrak{m}_1$, $(\tilde{Z}) = \mathfrak{d}\mathfrak{m}_2$. Поскольку

$$\mathrm{Nm}(\tilde{Y}) = \mathrm{Nm}(Y) = p_1^{W_1}\ldots p_s^{W_s}N(\tilde{\mathfrak{d}}\mathfrak{m}_1) \tag{22}$$

и

$$\mathrm{Nm}(\tilde{Z}) = \mathrm{Nm}(Z) = p_1^{W_1}\ldots p_s^{W_s}N(\tilde{\mathfrak{d}}\mathfrak{m}_2), \tag{23}$$

то полагая $W_j = w_j gd + w'_j$, $0 \leqslant w'_j < gd$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$, из (22) находим

$$Y = P'\varrho, \quad \varrho \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{F}}, \tag{24}$$

где $P' = p_1^{w'_1}\ldots p_s^{w'_s}$. Обратимся к системе равенств

$$\sum_{i=1}^{l-1}\omega_i^{(\sigma)}X_i = P'\varrho^{(\sigma)} \quad (1 \leqslant \sigma \leqslant g), \tag{25}$$

где $\varrho^{(2)}, \ldots, \varrho^{(g)}$ сопряжены с $\varrho^{(1)} = \varrho$ относительно поля $\boldsymbol{Q}$. Числа $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_{l-1}$ по условию линейно независимы над $\boldsymbol{Q}$, следовательно, из системы (25) можно выделить подсистему из $l-1$ уравнений, у которой определитель $\Delta' \neq 0$. Пусть, скажем, $\Delta' = |\omega_i^{(\sigma)}|_{i,\sigma=1,\ldots,l-1}$, тогда из подсистемы

$$\sum_{i=1}^{l-1} \omega_i^{(\sigma)} X_i = P' \varrho^{(\sigma)} \qquad (1 \leqslant \sigma \leqslant l-1),$$

по правилу Крамера находим

$$X_i = P' \Delta_i' / \Delta, \quad \Delta_i'/\Delta' \in \boldsymbol{Q} \quad (1 \leqslant i \leqslant l-1), \tag{26}$$

где

$$\Delta_i' = \begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \ldots & \varrho^{(1)} & \ldots & \omega_{l-1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{(l-1)} & \ldots & \underbrace{\varrho^{(l-1)}}_{i} & \ldots & \omega_{l-1}^{(l-1)} \end{vmatrix}.$$

Проанализируем степени $p_j^{u_{ji}}$, входящие в знаменатели чисел Δ_i'/Δ'. Ясно, что $p_j^{u_j} | \Delta'$, $u_j = \max\limits_{(i)} u_{ji}$ $(1 \leqslant j \leqslant s,\ 1 \leqslant i \leqslant l-1)$. Так как $\overline{|\omega_i|} \leqslant gH$ $(1 \leqslant i \leqslant l-1)$, то $\overline{|\Delta'|} \leqslant (l-1)!\,(gH)^{l-1}$ и

$$|\mathrm{Nm}_{\boldsymbol{G}/\boldsymbol{Q}}(\Delta')| \leqslant \big((l-1)!\,(gH)^{l-1}\big)^{[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{Q}]},$$

где $\boldsymbol{G}$ — нормальное расширение поля $\boldsymbol{F}$, откуда

$$u_j \leqslant \ln\big((l-1)!\,(gH)^{l-1}\big)/\ln 2 \qquad (1 \leqslant j \leqslant s). \tag{27}$$

Не умаляя общности, с точностью до нумерации, разобьем показатели $u_1, \ldots, u_s$ на два класса: $u_j < w_j$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ и $u_j \geqslant w_j$ $(q+1 \leqslant j \leqslant s)$. Тогда из (26) и (27) вытекает

$$X_i = P'' \tilde{X}_i, \quad \tilde{X}_i \in \boldsymbol{Z} \quad (1 \leqslant i \leqslant l-1), \tag{28}$$

где $P'' = \prod\limits_{j=1}^{q} p_j^{w_j - u_j}$, и

$$w_j \leqslant \ln\big((l-1)!\,(gH)^{l-1}\big)/\ln 2 \qquad (q+1 \leqslant j \leqslant s). \tag{29}$$

Наконец заметим, что

$$\max(V_1, \ldots, V_l) \leqslant \max(W_1, \ldots, W_s) < gd\big(\max(w_1, \ldots, w_s) + 1\big).$$

Поскольку $(X_1, \ldots, X_l) | a$, то из (23), (28) и (29) следует

$$\begin{aligned} \max_{(j)} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_1}(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \\ < gd\Big(\big(gd \ln|a| + \ln\big((l-1)!\,(gH)^{l-1}\big)\big)/\ln 2 + 1\Big) \quad (1 \leqslant j \leqslant t). \end{aligned} \tag{30}$$

Далее, имеет место равенство

$$\tilde{Y}^D + \alpha \tilde{Z}^D = \prod_{\zeta} (\tilde{Y} + \zeta \sqrt[D]{-\alpha}\, \tilde{Z}), \tag{31}$$

где ζ пробегает все D-е корни из (1). С помощью леммы 3 оценим снизу выражение $|1 + \sqrt[D]{-\alpha}\, \tilde{Y}^{-1} \tilde{Z}|$. В нашем случае $n = 2$, $\gamma_1 = -\alpha$, $\gamma_2 = -\tilde{Y}^{-1} \tilde{Z}$, $b_1 = 1$, $b_2 = b = B = D$, $q \leqslant gd$. Следовательно

$$|1 + \sqrt[D]{-\alpha}\, \tilde{Y}^{-1} \tilde{Z}| > (2D)^{-1} h^{-(48gd)^{600} \ln(2D) \ln h(\alpha) \ln\ln h(\alpha)}, \tag{32}$$

где h определено в (18). Так как $\tilde{Y} \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$, то $|\tilde{Y}| \geqslant \overline{|\tilde{Y}|}^{-(gd-1)}$. Из (32) и последнего неравенства следует

$$|\tilde{Y} + \sqrt[D]{-\alpha}\, \tilde{Z}| > \big(c_5 (\overline{|\tilde{Y}|}\, \overline{|\tilde{Z}|})^{gd+1}\big)^{-c_2 \ln D}. \tag{33}$$

Теперь оценим снизу $\prod\limits_{\zeta} |\tilde{Y} + \zeta \sqrt[D]{-\alpha}\, \tilde{Z}|$. Считаем, без умаления общности, что $\tilde{X} = \max(\overline{|\tilde{Y}|}, \overline{|\tilde{Z}|})$ достигается в поле $\boldsymbol{K}^{(1)} = \boldsymbol{K}$, т.е. либо на $|\tilde{Y}|$, либо на $|\tilde{Z}|$. Рассмотрим $\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(D)}$ — сопряженные с $\lambda^{(1)} = \lambda = \tilde{Y} + \zeta \sqrt[D]{-\alpha}\, \tilde{Z}$ относительно поля $\boldsymbol{K}$, и допустим, что $|\lambda^{(1)}| = \min\limits_{(\varkappa)} |\lambda^{(\varkappa)}|$ $(1 \leqslant \varkappa \leqslant D)$. Для любого $\varkappa = 2, \ldots, D$ имеют место неравенства

$$|2\lambda^{(\varkappa)}| \geqslant |\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(\varkappa)}| \geqslant |\tilde{Z}|\, |\sqrt[D]{\alpha}|\, |\zeta^{(1)} - \zeta^{(\varkappa)}|$$

и

$$|2\lambda^{(\varkappa)}| \geqslant |\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(\varkappa)}| \geqslant |\tilde{Y}|\, |\zeta^{(\varkappa)} - \zeta^{(1)}|,$$

следовательно,

$$|\lambda^{(\varkappa)}| > \tfrac{1}{2} \tilde{X} \big(gdh(\alpha)\big)^{-gd/D} |\zeta^{(1)} - \zeta^{(\varkappa)}| \qquad (2 \leqslant \varkappa \leqslant D). \tag{34}$$

Но

$$\prod_{\zeta} |\zeta^{(1)} - \zeta^{(\varkappa)}| = D, \tag{35}$$

поскольку левая часть (35) есть модуль значения производной полинома $t^D - 1$ в точке $t = \zeta^{(1)}$.

Из соотношений (11), (21), (30), (31), (33), (34) и (35) получаем

$$\begin{aligned} &\exp\{(c_3 gdD + c_4) R\}\, P^{4s(U'+U'')/3} \big(c(m) H_f X^m\big)^{1/gd} \\ &\qquad > 2^{-(D-1)} \big(gdh(\alpha)\big)^{-gd} D \big(c_5 \tilde{X}^{2(gd+1)}\big)^{-c_2 \ln D} \tilde{X}^{D-1} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &2^{D-1} \exp\{(c_3 gdD + c_4) R\}\, P^{4sgdD/3} c_5^{c_2 \ln D} \big(gdh(\alpha)\big)^{gd} \\ &\qquad \times \Big(\big(|a|^{gd} (l-1)!\,(gH)^{l-1}\big)^{gdD}\Big) |\mathrm{Nm}(\alpha)|^{2s \ln P} \big(c(m) H_f X^m\big)^{1/gd} \\ &\qquad > \tilde{X}^{D - c_1 P^{2gd} s \ln P (\ln D)^2 - 2(gd+1) c_2 \ln D - 1}. \end{aligned} \tag{36}$$

Исследуем следующие случаи: (I) $\tilde{X} \geqslant X$ и (II) $\tilde{X} < X$.

(I) Так как имеет место условие (I), то

$$(37)\qquad X < 3\exp\{2c_3\, gdR\}\left(4\,|a|^{gd}(l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{4gds\ln P/3}$$
$$\times\left(\exp\{c_4 R\}\, c_5^{c_2\ln D}\,(gdh(\alpha))^{gd}\,|\mathrm{Nm}(\alpha)|^{2s\ln P}\,(c(m)\,H_f)^{1/gd}\right)^{4/3D}.$$

(II) Пусть $X > \tilde X = |\tilde Z| = \overline{|\tilde Z|} \geqslant \overline{|\tilde Y|}$. Анализируя систему равенств

$$(38)\qquad \sum_{i=1}^{l-1}\omega_i^{(\sigma)} X_i = (\tilde Y/\varepsilon')^{(\sigma)}\qquad (1\leqslant \sigma\leqslant g)$$

подобно тому, как мы это делали с системой (25), находим

$$(39)\qquad X_i = \tilde\Delta_i/\tilde\Delta\qquad (1\leqslant i\leqslant l-1),$$

где

$$(40)\qquad \tilde\Delta_i = \begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \ldots & (\tilde Y/\varepsilon')^{(1)} & \ldots & \omega_{l-1}^{(1)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \omega_1^{(l-1)} & \ldots & \underbrace{(\tilde Y/\varepsilon')^{(l-1)}}_{i} & \ldots & \omega_{l-1}^{(l-1)} \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\overline{|\tilde\Delta|} \leqslant (l-1)!\,(gH)^{l-1}$ и $|\mathrm{Nm}(\tilde\Delta)| \geqslant 1$, то

$$(41)\qquad |\tilde\Delta| > \left((l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{-(g-1)}.$$

Из (40) получаем

$$(42)\qquad \overline{|\Delta_i|} \leqslant (l-1)!\,(gH)^{l-2}\,|\tilde Z|\,\overline{|\varepsilon'|}^{\,gd-1}\qquad (1\leqslant i\leqslant l-1).$$

Учитывая, что $1 \leqslant |\tilde Z| = \overline{|\tilde Z|} = |Z|\,\overline{|\varepsilon'|}$, из (39), (41) и (42) заключаем

$$(43)\qquad X \leqslant \left((l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{g}|\tilde Z|^{gd}.$$

Подставляя в (36) вместо X правую часть неравенства (43) и рассуждая, как и в случае (I), выводим оценку

$$(44)\qquad X < 3^{gd}\left((l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{g}\exp\{2c_3\,(gd)^2 R\}$$
$$\times\left(4\,|a|^{gd}(l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{4(gd)^2 s\ln P/3}(c(m)\,H_f)^{4/3D}$$
$$\times\left(\exp\{c_4 R\}\, c_5^{c_2\ln D}\,(gdh(\alpha))^{gd}\,|\mathrm{Nm}(\alpha)|^{2s\ln P}\right.$$
$$\left.\times\left((l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{m/d}\right)^{4gd/3D}.$$

Пусть теперь $X > \tilde X = |\tilde Y| = \overline{|\tilde Y|} \geqslant \overline{|\tilde Z|}$. Из оценки (36) имеем

$$2^{D-1}\exp\{c_3\, gdDR\}\left(4\,|a|^{gd}(l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{4gds\ln PD/3} CX^{m/gd}$$
$$> \overline{|\tilde Y|}^{\,D - c_1 P^{2gd} s\ln P(\ln D)^2 - 2(gd+1)c_2\ln D - 1},$$

где

$$C = \exp\{c_4 R\}\, c_5^{c_2\ln D}\,(gdh(\alpha))^{gd}\,|\mathrm{Nm}(\alpha)|^{2s\ln P}\,(c(m)\,H_f)^{1/gd},$$

откуда

$$(45)\qquad \overline{|\varepsilon'|} \leqslant |X_l|\,\overline{|\varepsilon'|} = |Z|\,\overline{|\varepsilon'|} = \overline{|\tilde Z|} \leqslant \overline{|\tilde Y|}$$
$$< 3\exp\{2c_3\, gdR\}\left(4\,|a|^{gd}(l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{4gds\ln P/3}(CX^{m/gd})^{4/3D}.$$

Рассматривая систему уравнений (38) и рассуждая аналогично предыдущему, получаем с учетом (45) оценку

$$(46)\qquad X < 6^{gd}\left((l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{3g/2}\exp\{3c_3\,(gd)^2 R\}$$
$$\times\left(4\,|a|^{gd}(l-1)!\,(gH)^{l-1}\right)^{4(gd)^2 s\ln P/3}\, C^{2gd/D}.$$

Наконец, из (4) и (5) вытекает, что

$$(47)\qquad \Delta^{gdD-m} < \left(\left((l-1)\,gH + (gdh(\alpha))^{1/D}\right)X\right)^{gdD}.$$

Неравенства (37), (44), (46) и (47) дают оценку (3) нашей теоремы.

В заключение сделаем несколько замечаний.

Мы рассматриваем решения $(x_1, \ldots, x_l)$ уравнения (2) с $x_l \neq 0$. Это ограничение по существу, ибо в противном случае можно привести примеры, когда уравнения вида (2) будут иметь бесконечные множества решений.

Наш подход позволяет анализировать уравнения вида (2), если норма в левой части берется в относительном поле M, $f(x_1, \ldots, x_l)$ — многочлен с целыми алгебраическими коэффициентами из M и $x_1, \ldots, x_l \in M$ — алгебраические S-целые в смысле ([4], гл. VI, § 7).

Замечание при корректуре. Недавно автору стало известно, что Г. Вюстхольц обнаружил неточность в доказательстве основной теоремы работы [9] (в настоящей заметке — лемма 2). В нашем случае выражение $\gamma_1^{b_1}\ldots\gamma_n^{b_n}$ имеет специальный вид, все рассуждения А. Ван дер Пуртена применительно к нему проходят, следовательно, утверждение леммы 2 остается в силе.

Литература

[1] С. В. Котов, *Об одном классе диофантовых уравнений норменного вида с полиномиальной правой частью*, Матем. заметки 39, № 3 (1986), с. 305–310.

[2] — *Эффективная оценка линейной формы с алгебраическими коэффициентами в архимедовых и p-адических метриках*, Препринт № 24 (125), Минск, Институт математики АН БССР, 1981.

[3] — *Эффективная оценка для границ величин решений одного класса диофантовых уравнений норменного вида*, Матем. заметки 33, № 6 (1983), с. 801–805.

[4] В. Г. Спринджук, *Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных*, Москва 1982.

[5] Н. И. Фельдман, *Эффективные границы для величин решений некоторых диофантовых уравнений*, Матем. заметки 8, № 3 (1970), с. 361–371.

[6] A. Baker, *The theory of linear forms in logaritms*; в книге: *Transcendence Theory: Advances and applications*, London 1977.

[7] K. Győry, *On the representation of integers by decomposable forms in several variables*, Publ. Math. (Debrecen), 28 (1981), pp. 89–98.

[8] K. Győry, *On S-integral solutions of norm form, discriminant form and index form equations*, Studia Sci. Math. Hungar. 16 (1981), pp. 149–161.
[9] A. J. Van der Poorten, *Linear forms in logarithms in the p-adic case*; в книге: *Transcendence Theory: Advances and applications*, London 1977.
[10] W. M. Schmidt, *Norm form equations*, Ann. of Math. 96 (1972), pp. 526–551.

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ЛЕНИНА
Минск, СССР

Поступило 22.4.1986
и в исправленной форме 7.1.1987 (1625)

ACTA ARITHMETICA
XLIX (1988)

Transformations that preserve uniform distribution

by

Š. Porubský*, T. Šalát** and O. Strauch* (Bratislava)

Dedicated to Professor Pál Erdős on the occasion of his 75th birthday

The purpose of this paper is to describe some properties of functions that preserve uniformly distributed sequences of real numbers. Here we say that a map T of the unit interval $I = \langle 0, 1 \rangle$ to itself is a *uniform distribution preserving* (*u.d.p.*) *transformation* if $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is a uniformly distributed sequence (u.d.) sequence in I for every u.d. sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$.

In the course of our discussion we shall see that the study of u.d.p. transformations leads to the opposite question to that investigated in the ergodic theory. Namely, given a measure μ (in our case this will be the Jordan measure), describe properties of transformations with respect to which μ is invariant. Perhaps our results may motivate other directions in the theory of dynamical systems, besides the study of properties of sets of points with periodical, recurrent, dense, etc. orbits to study, for instance, sets of points which orbits are uniformly distributed or to investigate sequences of integrals of iterations of transformations. Another direction is the study of the orbit behaviour of concrete points. It will be worth to answer these questions at least for piecewise linear transformations.

1. General criteria. From the well-known integral criterion ([4], p. 2) for u.d. sequences the following necessary and sufficient condition for a map of I to be a u.d.p. transformation results immediately.

THEOREM 1. *A map T: $I \to I$ is a u.d.p. transformation if and only if for every Riemann-integrable function g: $I \to R$ the composition $g \circ T$ is also Riemann-integrable and*

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 g\big(T(x)\big)\,dx. \tag{1}$$

Proof. Suppose that T is a u.d.p. transformation and $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a u.d.