La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange — Address of the Editorial Board and of the exchange — Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches — Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-07778-6 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ACTA ARITHMETICA
XLIX (1988)

05

Sur les moments des fonctions additives

par

HUBERT DELANGE (Orsay)

A Paul Erdős pour son soixante-quinzième anniversaire

1. Introduction. Le théorème suivant, dû à Erdős et Kac [4], est bien connu:

Soit f une fonction arithmétique réelle fortement additive, satisfaisant à

$$|f(p)| \leqslant M \text{ pour tout } p \text{ premier et } \sum f(p)^2/p = \infty.\text{(}^1\text{)}$$

Soit

$$A(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} \quad \text{et} \quad B(x) = \left(\sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)^2}{p} \right)^{1/2}$$

(de sorte que $B(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini).

On a pour tout t réel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{ n \leqslant x\colon \frac{f(n)-A(x)}{B(x)} \leqslant t \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du.$$

Ceci peut s'exprimer en disant que la distribution des nombres $(f(n)-A(x))/B(x)$ où $n \leqslant x$ converge vers la distribution de Gauss de moyenne zéro et de variance 1.

Il est facile de voir qu'on peut remplacer dans la conclusion $A(x)$ et $B(x)$ par d'autres quantités $A^*(x)$ et $B^*(x)$ satisfaisant à

$$A^*(x) - A(x) = o\big(B(x)\big) \quad \text{et} \quad B^*(x) \sim B(x) \quad (x \to \infty).$$

Cela résulte de ce que $(f(n)-A(x))/B(x) \leqslant t$ équivaut à $f(n) \leqslant A(x) + tB(x)$ et que, étant donné t réel et $\varepsilon > 0$, on a pour x assez grand

$$A^*(x) + tB^*(x) \leqslant A(x) + (t+\varepsilon)B(x)$$

(1) Tout au long de cet article, il est entendu que la lettre p est utilisée pour représenter les nombres premiers et la lettre n pour représenter les entiers >0, dont l'ensemble est désigné par N^*. La lettre d représente aussi un entier >0. Le signe $\#$ désigne le nombre des éléments de l'ensemble qui le suit.

et

$$A(x)+(t-\varepsilon)B(x) \leqslant A^*(x)+tB^*(x).$$

En particulier, si $f(n)=\nu(n)$, le nombre des diviseurs premiers de n, on peut prendre $A^*(x)=\log\log x$ et $B(x)=\sqrt{\log\log x}$ (pour $x>e$).

La démonstration originale d'Erdős et Kac utilisait le "théorème limite central" du calcul des probabilités et un lemme arithmétique obtenu à l'aide du crible de Brun.

Ultérieurement, Kac suggéra d'essayer de démontrer le théorème en prouvant que chacun des moments de la distribution des nombres $(f(n)-A(x))/B(x)$ où $n \leqslant x$ converge vers le moment correspondant de la distribution normale de Gauss, c'est-à-dire que l'on a pour chaque $q \in N^*$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}\right)^q = \mu_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^q e^{-u^2/2}\,du,$$

ce qui équivaut à

$$(1)\quad \sum_{n\leqslant x}(f(n)-A(x))^q = \mu_q xB(x)^q + o(xB(x)^q) \quad \text{quand } x \text{ tend vers l'infini.}$$

Ceci a été réalisé pour la première fois par H. Halberstam [5]. Sa démonstration comportait des calculs compliqués. Nous avons alors donné une démonstration plus simple ([2], [3]), que nous avons d'ailleurs encore simplifiée dans des exposés oraux, notamment dans un cours donné en 1970 à l' "University of Illinois".

Halberstam a aussi établi ([5], [6]), toujours pour une fonction fortement additive réelle, des résultats analogues pour les valeurs de f sur les entiers $Q(n)$, ou $Q(p)$, où Q est un polynôme à coefficients entiers, avec $Q(n)>0$ pour $n \geqslant 1$.

Ses résultats sont les suivants:

Supposons Q irréductible et soit $\varrho(p)$ le nombre de solutions de la congruence $Q(n)\equiv 0 \pmod p$ avec $1 \leqslant n \leqslant p$.

Supposons d'autre part que $\sum \frac{\varrho(p)}{p} f(p)^2 = \infty$, *et soit*

$$A(x)=\sum_{p\leqslant x}\frac{\varrho(p)}{p}f(p) \quad \text{et} \quad B(x)=\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{\varrho(p)}{p}f(p)^2\right)^{1/2}.$$

Quand x tend vers l'infini on a pour chaque $q \in N^*$

$$\sum_{n\leqslant x}\big(f(Q(n))-A(x)\big)^q = \mu_q xB(x)^q + o(xB(x)^q)$$

sous l'hypothèse que $f(p)=o(B(p))$ quand p tend vers l'infini (ce qui équivaut à $\max_{p\leqslant x}|f(p)| = o(B(x))$ quand x tend vers l'infini) *et*

$$\sum_{p\leqslant x}\big(f(Q(p))-A(x)\big)^q = \mu_q \pi(x)B(x)^q + o(\pi(x)B(x)^q)$$

sous les hypothèses que $|f(p)| \leqslant M$ pour tout p et que $B(x)/\log\log\log x$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

Récemment K. Alladi [1] a développé une nouvelle méthode, utilisant le "crible combinatoire", pour évaluer des sommes de la forme

$$\sum_{\substack{n\in S\\ n\leqslant x}} a_n\big(f(n)-A(x)\big)^q,$$

où S est une partie infinie de N^* et $\{a_n\}$ une suite de nombres réels, assujetties à certaines conditions générales, et $A(x)$ est convenablement choisi (f étant toujours une fonction fortement additive réelle).

Nous nous proposons ici d'indiquer comment on peut évaluer des sommes d'une forme générale qui contient celles considérées ci-dessus (sans les coefficients a_n pour la dernière) par une méthode plus simple et plus efficace que celle d'Alladi. Elle ne nécessite pas l'emploi du crible et demande des hypothèses moins fortes. En particulier, il n'est pas nécessaire que $f(n) \geqslant 0$, comme le suppose Alladi.

Une modification évidente permettrait d'englober dans notre théorie des sommes du type général d'Alladi avec des coefficients a_n. Mais cela ne nous paraît pas d'un grand intérêt.

Notons que, dans tous les travaux cités ci-dessus, on commence par évaluer une somme déduite de celle considérée au départ en remplaçant la fonction f par la fonction "tronquée" f_y définie par

$$f_y(n)=\sum_{\substack{p|n\\ p\leqslant y}} f(p),$$

où y est une fonction convenable de x. Cette fonction tronquée est encore une fonction fortement additive.

Nous faisons de même, mais l'originalité de notre méthode réside essentiellement dans la manière dont nous évaluons la somme relative à f_y.

Le principe est essentiellement le même que celui de la démonstration de (1) dans notre cours à l'University of Illinois, il est appliqué ici dans un cadre plus général.

2. Préliminaires. L'évaluation de la somme relative à la fonction tronquée est un problème du type suivant:

f étant une fonction fortement additive réelle satisfaisant à

$$f(p)=0 \quad \text{si} \quad p\notin E,$$

où E est un ensemble fini de nombres premiers (ici l'ensemble des $p \leqslant y$) et $\mathscr{A}$ une suite finie d'entiers >0, évaluer la somme $\sum_{a\in\mathscr{A}}(f(a)-K)^q$, où K est une constante réelle et $q \in N^*$.

2.1. Nous commencerons par examiner un problème général de ce type, où la fonction f n'est pas forcément réelle et K est un nombre complexe arbitraire. Naturellement il faut faire des hypothèses convenables sur la suite $\mathscr{A}$ et l'ensemble E.

Soit donc E un ensemble fini de nombres premiers et $\mathscr{A}$ un suite finie d'entiers >0.

Nous posons $P = \prod_{p \in E} p$.

Pour chaque $d \in N^*$, soit $\mathscr{A}_d$ la partie de $\mathscr{A}$ formée des termes qui sont multiples de d, et $|\mathscr{A}_d|$ le nombre des termes de $\mathscr{A}_d$.

On suppose que, pour chaque d divisant P,

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + r_d,$$

où X est indépendant de d et ω est une fonction multiplicative.

f étant une fonction fortement additive satisfaisant à

$$f(p) = 0 \quad \text{pour} \quad p \notin E,$$

on se propose d'évaluer la some $\sum_{a \in \mathscr{A}} (f(a) - K)^q$, où $q \in N^*$ et $K \in C$, à l'aide de X, ω et des restes r_d.

Nous remarquons d'abord que cette somme est $q!$ fois le coefficient de z^q dans le développement en série entière de l'expression

$$\sum_{a \in \mathscr{A}} e^{(f(a)-K)z} = e^{-Kz} \sum_{a \in \mathscr{A}} f_z(a),$$

où $f_z(n) = e^{zf(n)}$.

Soit $g_z = f_z * \mu$.

Comme f_z est multiplicative, g_z l'est aussi.

Pour $r \in N^*$,

$$g_z(p^r) = f_z(p^r) - f_z(p^{r-1}) = e^{zf(p^r)} - e^{zf(p^{r-1})}.$$

Ceci donne $g_z(p^r) = 0$ pour $r > 1$ et

$$g_z(p) = \begin{cases} e^{zf(p)} - 1 & \text{pour} \quad p \in E, \\ 0 & \text{pour} \quad p \notin E. \end{cases}$$

Par suite

$$g_z(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \nmid P, \\ \prod_{p|n} (e^{zf(p)} - 1) & \text{si} \quad n | P. \end{cases}$$

On a donc

$$f_z(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d|P}} g_z(d).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} e^{-Kz} \sum_{a \in \mathscr{A}} f_z(a) &= e^{-Kz} \sum_{a \in \mathscr{A}} \Big(\sum_{\substack{d|a \\ d|P}} g_z(d)\Big) \\ &= e^{-Kz} \sum_{d|P} g_z(d) |\mathscr{A}_d| \\ &= e^{-Kz} \sum_{d|P} \Big(\frac{\omega(d)}{d} X + r_d\Big) g_z(d) \\ &= X e^{-Kz} \sum_{d|P} \frac{\omega(d)}{d} g_z(d) + e^{-Kz} \sum_{d|P} r_d g_z(d). \end{aligned}$$

La fonction $n \mapsto \frac{\omega(n)}{n} g_z(n)$ étant multiplicative et nulle quand n n'est pas sans facteur carré, on a

$$\sum_{d|P} \frac{\omega(d)}{d} g_z(d) = \prod_{p \in E} \Big(1 + \frac{\omega(p)}{p} g_z(p)\Big) = \prod_{p \in E} \Big(1 + \frac{\omega(p)}{p} (e^{zf(p)} - 1)\Big).$$

Finalement, en posant

$$\Phi(z) = e^{-Kz} \prod_{p \in E} \Big(1 + \frac{\omega(p)}{p} (e^{zf(p)} - 1)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

on trouve que la somme $\sum_{a \in \mathscr{A}} (f(a) - K)^q$ est égale à $q! a_q X + q!$ fois le coefficient de z^q dans le développement en série entière de $e^{-Kz} \sum_{d|P} r_d g_z(d)$.

On peut omettre dans la somme $\sum_{d|P} r_d g_z(d)$ les termes correspondant aux d tels que $\nu(d) > q$.([2]) En effet, comme 0 est zéro d'ordre $\geqslant \nu(d)$ de la fonction entière $z \mapsto g_z(d)$, si $\nu(d) > q$ le coefficient de z^q dans le développement en série entière de $g_z(d)$ est nul.

On voit ainsi que

$$\sum_{a \in \mathscr{A}} (f(a) - K)^q - q! a_q X = q!$$

fois le coefficient de z^q dans le développement en série entière de $e^{-Kz} \sum_{\substack{d|P \\ \nu(d) \leqslant q}} r_d g_z(d)$.

([2]) Rappelons ici que nous désignons par $\nu(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n.

Il va nous être commode d'introduire la notation suivante:

u et v étant des fonctions holomorphes à l'origine, avec $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ et $v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$, où $u_k \in \boldsymbol{C}$ et $v_k \in \boldsymbol{R}^+$, nous écrivons

$$u(z) \prec v(z)$$

pour indiquer que l'on a $|u_k| \leqslant v_k$ pour tout $k \geqslant 0$. (On pourra dire que $u(z)$ est "dominée" par $v(z)$.)

Cette notation obéit à des règles de calcul évidentes.

Nous obtiendrons une majoration de

$$\frac{1}{q!}\Big|\sum_{a\in\mathscr{A}} (f(a)-K)^q - q!\, a_q X\Big|$$

en formant une fonction entière Ψ telle que

$$e^{-Kz} \sum_{\substack{d|P \\ \nu(d)\leqslant q}} r_d\, g_z(d) \prec \Psi(z).$$

On a $g_z(d) \prec \exp\big(z \sum_{p|d} |f(p)|\big)$ parce que, pour chaque p,

$$e^{zf(p)} - 1 \prec e^{z|f(p)|}.$$

Il en résulte que

$$e^{-Kz} \sum_{\substack{d|P \\ \nu(d)\leqslant q}} r_d\, g_z(d) \prec \sum_{\substack{d|P \\ \nu(d)\leqslant q}} |r_d| \exp\Big(z\big(\sum_{p|d} |f(p)| + |K|\big)\Big).$$

Nous obtenons ainsi

$$(2)\qquad \Big|\sum_{a\in\mathscr{A}} (f(a)-K)^q - q!\, a_q X\Big| \leqslant \sum_{\substack{d|P \\ \nu(d)\leqslant q}} |r_d| \big(\sum_{p|d} |f(p)| + |K|\big)^q.$$

2.2. Jusqu'ici K était un nombre complexe quelconque. Le cas dont nous aurons besoin est celui où $K = \sum_{p\in E} \frac{\omega(p)}{p} f(p)$. Dans ce cas on a évidemment

$$\Phi(z) = \prod_{p\in E} \Big(1 + \frac{\omega(p)}{p}(e^{zf(p)}-1)\Big) \exp\Big(-z\frac{\omega(p)}{p} f(p)\Big).$$

On déduit de ce qui précède le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit E un ensemble fini de nombres premiers contenu dans l'intervalle $[2, y]$, et soit $P = \prod_{p\in E} p$.*

Soit, d'autre part, $\mathscr{A}$ une suite finie d'entiers > 0.

Pour chaque $d \in \boldsymbol{N}^*$, soit $\mathscr{A}_d$ la partie de $\mathscr{A}$ formée des termes qui sont multiples de d, et $|\mathscr{A}_d|$ le nombre de termes de $\mathscr{A}_d$.

On suppose que, pour chaque d divisant P,

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + r_d,$$

où X est indépendant de d et ω est une fonction multiplicative satisfaisant à

$$0 \leqslant \omega(p) \leqslant \Omega \quad \textit{pour tout } p \in E.$$

Etant donné une fonction fortement additive f satisfaisant à

$$f(p) = 0 \quad \textit{pour} \quad p \notin E,$$

posons

$$A = \sum_{p\in E} \frac{\omega(p)}{p} f(p), \qquad F = \max_{p\in E} |f(p)|, \qquad F^* = \max_{p\in E} \frac{|f(p)|}{\log p}$$

et

$$\Phi(z) = \prod_{p\in E} \Big(1 + \frac{\omega(p)}{p}(e^{zf(p)}-1)\Big) \exp\Big(-z\frac{\omega(p)}{p} f(p)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Alors on a pour tout $q \in \boldsymbol{N}^*$ les inégalités suivantes:

$$(3)\qquad \Big|\sum_{a\in\mathscr{A}} (f(a)-A)^q - q!\, a_q X\Big| \leqslant F^q (\Omega \log\log y + C_1 \Omega + q)^q \sum_{\substack{d\leqslant y^q \\ \nu(d)\leqslant q}} \mu^2(d) |r_d|$$

et

$$(4)\qquad \Big|\sum_{a\in\mathscr{A}} (f(a)-A)^q - q!\, a_q X\Big| \leqslant (C_2 \Omega + q)^q F^{*q} (\log y)^q \sum_{\substack{d\leqslant y^q \\ \nu(d)\leqslant q}} \mu^2(d) |r_d|,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes absolues.

Démonstration. On utilise l'inégalité (2), où $K = A$.

On remarque que, si $d|P$ et $\nu(d) \leqslant q$, d est sans facteur carré et $\leqslant y^q$.

D'autre part, comme $|A| \leqslant \Omega \sum_{p\leqslant y} \frac{|f(p)|}{p}$ et, pour chaque $p \leqslant y$, $|f(p)| \leqslant F$ et $|f(p)| \leqslant F^* \log p$, on a

$$|A| \leqslant \Omega F \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p} \leqslant \Omega F (\log\log y + C_1),$$

où $C_1 = \sup_{t\geqslant 2} \big(\sum_{p\leqslant t} 1/p - \log\log t\big)$, et

$$|A| \leqslant \Omega F^* \sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p} \leqslant C_2 \Omega F^* \log y,$$

où $C_2 = \sup_{t\geqslant 2} \frac{1}{t} \sum_{p\leqslant t} \frac{\log p}{p}$.

Enfin il est clair que, si $\nu(d) \leqslant q$, on a

$$\sum_{p|d} |f(p)| \leqslant qF \quad \text{et} \quad \sum_{p|d} |f(p)| \leqslant F^* \log d \leqslant qF^* \log y.$$

2.3. Nous aurons aussi à utiliser le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *E, P, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_d$ et $|\mathscr{A}_d|$ ayant la même signification qu'au début du paragraphe 2.1, on suppose que, pour chaque d divisant P,*

$$|\mathscr{A}_d| \leqslant M \frac{\omega_1(d)}{d} X,$$

où ω_1 est une fonction multiplicative.

f étant une fonction fortement additive satisfaisant à

$$f(p) = 0 \quad \textit{pour} \quad p \notin E,$$

on a pour $q \in N^*$ et $\varrho > 0$ quelconque

$$\sum_{a\in\mathscr{A}} |f(a)|^q \leqslant \frac{q!\,MX}{\varrho^q} \left\{ \exp\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} \left(\sum_{p\in E} \frac{\omega_1(p)}{p} |f(p)|^k \right)\right) - 1 \right\}. \tag{5}$$

Démonstration. On a $|f(n)| \leqslant f^*(n) = \sum_{p|n} |f(p)|$, et par suite

$$\sum_{a\in\mathscr{A}} |f(a)|^q \leqslant \sum_{a\in\mathscr{A}} f^*(a)^q.$$

f^* est encore une fonction fortement additive.

Soit $f_z^*(n) = e^{zf^*(n)}$, $g_z^* = f_z^* * \mu$.

g_z^* est multiplicative et on a

$$g_z^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \nmid P, \\ \prod_{p|n} (e^{z|f(p)|} - 1) & \text{si} \quad n|P, \end{cases}$$

et

$$f_z^*(n) = \sum_{\substack{d|n\\ d|P}} g_z^*(d).$$

Par suite,

$$\sum_{a\in\mathscr{A}} e^{zf^*(a)} = \sum_{a\in\mathscr{A}} \Big(\sum_{\substack{d|P\\ d|a}} g_z^*(d) \Big) = \sum_{d|P} g_z^*(d) |\mathscr{A}_d|.$$

Avec la notation $\prec$ introduite plus haut, on a

$$\sum_{d|P} g_z^*(d) |\mathscr{A}_d| \prec MX \sum_{d|P} \frac{\omega_1(d)}{d} g_z^*(d).$$

Mais

$$\sum_{d|P} \frac{\omega_1(d)}{d} g_z^*(d) = \prod_{p\in E} \left(1 + \frac{\omega_1(p)}{p} (e^{z|f(p)|} - 1) \right).$$

Il résulte de là que la somme $\sum_{a\in\mathscr{A}} |f(a)|^q$ est au plus égale à $q!\,MX$ fois le coefficient de z^q dans le développement en série entière de

$$\prod_{p\in E} \left(1 + \frac{\omega_1(p)}{p} (e^{z|f(p)|} - 1) \right).$$

Il est clair que ce coefficient est le même que le coefficient de z^q dans le polynôme

$$\prod_{p\in E} \left(1 + \frac{\omega_1(p)}{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{z^k}{k!} |f(p)|^k \right) - 1.$$

Les coefficients étant tous $\geqslant 0$, si ϱ est un nombre > 0 quelconque, la valeur du polynôme pour $z = \varrho$ est au moins égale à ϱ^q fois ce coefficient. Celui-ci est donc au plus égal à

$$\frac{1}{\varrho^q} \left(\prod_{p\in E} \left(1 + \frac{\omega_1(p)}{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} |f(p)|^k \right) - 1 \right).$$

Comme, pour chaque $p \in E$,

$$1 + \frac{\omega_1(p)}{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} |f(p)|^k \leqslant \exp\left(\frac{\omega_1(p)}{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} |f(p)|^k \right),$$

on a

$$\prod_{p\in E} \left(1 + \frac{\omega_1(p)}{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} |f(p)|^k \right) \leqslant \exp\left(\sum_{p\in E} \frac{\omega_1(p)}{p} \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} |f(p)|^k \right)\right).$$

Pour obtenir le résultat voulu, il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\sum_{p\in E} \frac{\omega_1(p)}{p} \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} |f(p)|^k \right) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\varrho^k}{k!} \left(\sum_{p\in E} \frac{\omega_1(p)}{p} |f(p)|^k \right).$$

3. Application des résultats précédents. Dans tout ce qui suit $\{S_x\}$ est une famille de suites finies d'entiers positifs, pas forcément distincts, où l'indice x parcourt l'ensemble des nombres réels au moins égaux à un certain $x_0 > 0$.

$|S_x|$ est le nombre des termes de la suite S_x.

Il est entendu une fois pour toutes que nous faisons les hypothèses suivantes:

(a) $|S_x|$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini et on a

$$\max_{n\in S_x} n = O(x^\Delta) \quad \text{pour un } \Delta \geqslant 1;$$

(b) On a pour chaque $d \in N^*$ sans facteur carré

$$\sum_{\substack{n\in S_x\\ d|n}} 1 = \frac{\omega(d)}{d} X(x) + r_d(x),$$

où ω est une fonction multiplicative satisfaisant à

$$0 \leqslant \omega(p) \leqslant \Omega \quad \text{pour tout } p \text{ premier}$$

et $r_d(x) = o\big(X(x)\big)$ quand x tend vers l'infini.

Ceci détermine $X(x)$ à un facteur $1+o(1)$ près (car la dernière relation donne en particulier, pour $d = 1$, $|S_x| \sim X(x)$) et détermine les valeurs de ω sur les entiers sans facteur carré.

Dans la suite nous aurons à ajouter d'autres hypothèses sur $r_d(x)$.

3.1. Voici quelques exemples.

1. $S_x = \{n\}_{n\leqslant x}$, $x_0 = 1$, $\Delta = 1$, $X(x) = x$, $\omega(d) = 1$.
Ici $|r_d(x)| \leqslant 1$.

2. $S_x =$ la suite des entiers > 0 sans facteur carré au plus égaux à x, $x_0 = 1$, $\Delta = 1$, $X(x) = \dfrac{6}{\pi^2}x$, $\omega(d) = \prod\limits_{p|d}\dfrac{p}{p+1}$ pour d sans facteur carré.
Ici $|r_d(x)| \leqslant 2\sqrt{6}\,x^{1/2}$ (cf. [8], exercice n° 18).

3. $S_x = \{Q(n)\}_{n\leqslant x}$, où Q est un polynôme à coefficients entiers, de degré $\delta \geqslant 1$, tel que $Q(n) > 0$ pour tout n.
$x_0 = 1$, $\Delta = \delta$, $X(x) = x$, $\omega(d) =$ nombre de solutions de la congruence $Q(n) \equiv 0 (\operatorname{mod} d)$ avec $1 \leqslant n \leqslant d$.
Ici $|r_d(x)| \leqslant \omega(d)$.

4. $S_x = \{Q(p)\}_{p\leqslant x}$, où Q est comme dans l'exemple 3, $x_0 = 2$, $\Delta = \delta$, $X(x) = \operatorname{li} x$, $\omega(d) = \dfrac{d\varrho(d)}{\varphi(d)}$, où $\varrho(d)$ est le nombre de solutions de

$$Q(n) \equiv 0 (\operatorname{mod} d), \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant n \leqslant d \text{ et } (n, d) = 1.$$

Ici $|r_d(x)| \leqslant \varrho(d) \max\limits_{(l,d)=1}\left|\pi(x; d, l) - \dfrac{1}{\varphi(d)}\operatorname{li} x\right| + v\big((d, Q(0))\big)$, où $\pi(x; d, l) = \sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l (\operatorname{mod} d)}} 1$.

Il est à noter que $\varrho(d) \leqslant C\delta^{v(d)}$, avec $C = 1$ si Q n'a pas de diviseurs premiers fixes.

5. $S_x =$ la suite des entiers $\leqslant x$ qui satisfont à

$$v(n) \equiv l (\operatorname{mod} m),$$

où l et m sont des entiers fixés, $m \geqslant 2$.
$x_0 =$ le plus petit entier satisfaisant à la condition indiquée.

$$X(x) = x/m, \quad \omega(d) = 1.$$

3.2. Nous considérons maintenant une fonction fortement additive réelle f satisfaisant à $\sum \dfrac{\omega(p)}{p} f(p)^2 = \infty$.

Nous posons

$$A(x) = \sum_{p\leqslant x}\frac{\omega(p)}{p}f(p) \quad \text{et} \quad B(x) = \Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{\omega(p)}{p}f(p)^2\Big)^{1/2}$$

(de sorte que $B(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$).

Nous allons exposer comment on peut prouver simplement, sous des hypothèses convenables, que, pour chaque $q \in N^*$, l'expression

$$\frac{1}{|S_x|}\sum_{n\in S_x}\left(\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}\right)^q$$

tend vers une limite finie, soit m_q, quand x tend vers l'infini. (Pour $q = 0$ l'expression considérée est égale à 1.)

Ceci revient à prouver qu'il existe une suite $\{m_k\}$ telle que, pour chaque $q \in N^*$,

$$\sum_{n\in S_x}\big(f(n)-A(x)\big)^q = m_q X(x) B(x)^q + o\big(X(x)B(x)^q\big) \quad (x \to +\infty). \tag{6}$$

Le principe de la démonstration sera le suivant:

Etant donné un entier $N > 0$, on montrera que la relation (6) a lieu pour $q \leqslant N$.

La démonstration se fera en trois étapes.

Le point de départ sera une évaluation de la somme

$$\sum_{n\in S_x}\big(f_y(n)-A(x)\big)^q,$$

où f_y est la fonction tronquée définie plus haut et $y = x^\lambda$, où λ sera un nombre > 0 convenablement choisi.

La première étape consistera à montrer qu'il existe une suite $\{m_k\}$ telle que, quand x tend vers l'infini, on a pour $1 \leqslant q \leqslant 2N$

$$\sum_{n\in S_x}\big(f_y(n)-A(y)\big)^q = m_q X(x) B(y)^q + o\big(X(x)B(y)^q\big). \tag{7}$$

On montrera ensuite que l'on a, toujours pour $1 \leqslant q \leqslant 2N$, la même relation où $A(y)$ et $B(y)$ sont remplacés par $A(x)$ et $B(x)$, c'est-à-dire

$$\sum_{n\in S_x}\big(f_y(n)-A(x)\big)^q = m_q X(x) B(x)^q + o\big(X(x)B(x)^q\big). \tag{8}$$

Enfin, on déduira de là que la relation (6) a lieu pour $1 \leqslant q \leqslant N$.

Nous verrons au cours de l'exposé quelles hypothèses portant sur S_x et la fonction f permettent de réaliser chacune des étapes.

Naturellement une hypothèse plus faible sur S_x nécessitera une plus forte sur f.

3.2.1. La première étape comporte deux parties. On commence par obtenir une approximation de la somme

$$\sum_{n\in S_x} (f_y(n)-A(y))^q$$

en appliquant le théorème 1 à la fonction f_y, E étant l'ensemble des $p \leqslant y$.

Ceci amène à introduire la fonction entière Φ_y définie par

$$\Phi_y(z) = \prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{\omega(p)}{p}(e^{zf(p)}-1)\right)\exp\left(-z\frac{\omega(p)}{p}f(p)\right)$$

et à poser $\Phi_y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y)z^k$. (Noter que $a_0(y) = 1$ car $\Phi_y(0) = 1$.)

Chacune des inégalités (3) et (4) donne une majoration du module de la différence

$$\sum_{n\in S_x} (f_y(n)-A(y))^q - q!\,a_q(y)X(x).$$

Il nous faut une majoration qui soit $o(X(x)B(y)^q)$ pour $q \leqslant 2N$.

On voit que l'on obtient ce résultat en prenant λ assez petit si l'une ou l'autre des hypothèses suivantes est satisfaite:

(H_1) Il existe $\beta\in]0, 1[$ tel que, quand x tend vers l'infini, on a pour tout $k\in N^*$

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^\beta\\ \nu(d)\leqslant k}} \mu^2(d)|r_d(x)| = o\left(\frac{X(x)}{(\log\log x)^k}\right)$$

et on a

$$\max_{p\leqslant x}|f(p)| = o(B(x)); \tag{9}$$

(H_2) Il existe $\beta\in]0, 1[$ tel que, quand x tend vers l'infini, on a pour tout $k\in N^*$

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^\beta\\ \nu(d)\leqslant k}} \mu^2(d)|r_d(x)| = o\left(\frac{X(x)}{(\log x)^k}\right)$$

et on a

$$\max_{p\leqslant x}\frac{|f(p)|}{\log p} = o(B(x)). \tag{10}$$

Dans les deux cas, il suffit de prendre $\lambda < \beta/(2N)$.

Avec l'une ou l'autre de ces hypothèses, si λ est ainsi choisi, on a pour $1 \leqslant q \leqslant 2N$

$$\sum_{n\in S_x} (f_y(n)-A(y))^q = q!\,a_q(y)X(x)+o(X(x)B(y)^q) \quad (x\to\infty).$$

On obtiendra la relation (7) pour $1 \leqslant q < 2N$ si, pour chaque $k\in N^*$, le rapport $a_k(y)/B(y)^k$ tend vers une limite finie $m_k/k!$ quand y tend vers l'infini.

Comme

$$\Phi_y\left(\frac{z}{B(y)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(y)}{B(y)^k}z^k,$$

ceci a certainement lieu s'il existe un disque ouvert D centré au point 0 dans lequel $\Phi_y(z/B(y))$ converge uniformément quand y tend vers l'infini.

Si la limite est $\Phi(z)$, la fonction Φ est holomorphe dans D et on a dans ce disque le développement de Taylor $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}z^k$, et, pour chaque k, $a_k(y)/B(y)^k$ tend vers $m_k/k!$.

On a

$$\Phi_y\left(\frac{z}{B(y)}\right) = \prod_{p\leqslant y}(1+u_p(z, y))\exp\left(-z\frac{\omega(p)}{p}\cdot\frac{f(p)}{B(y)}\right),$$

où

$$u_p(z, y) = \frac{\omega(p)}{p}(e^{zf(p)/B(y)}-1).$$

Etant donné $\varrho > 0$, on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$|u_p(z, y)| \leqslant \frac{\Omega}{p}(e^{\varrho|f(p)|/B(y)}-1). \tag{11}$$

Si l'une ou l'autre des hypothèses (H_1) et (H_2) est satisfaite, on a (10) et par suite il existe $M>0$ et $y_0 \geqslant 2$ tel que, si $y \geqslant y_0$, on a $|f(p)| \leqslant MB(y)\log p$ pour tout $p \leqslant y$, ce qui, avec (11), donne

$$|u_p(z, y)| \leqslant \frac{\Omega}{p}(p^{M\varrho}-1) < \Omega p^{M\varrho-1}.$$

Supposons fixé un $\varrho < 1/(2M)$.

On voit qu'il existe $y_1 \geqslant y_0$ tel que, si $y \geqslant y_1$, on a pour tout $p \leqslant y$

$$|u_p(z, y)| \leqslant 1/2 \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant \varrho.$$

En effet, il existe p_0 tel que, pour $p \geqslant p_0$, $\Omega p^{M\varrho-1} \leqslant 1/2$. Pour chaque $p < p_0$, le second membre de (11) tend vers zéro quand y tend vers l'infini. On a le résultat voulu en prenant $y_1 \geqslant y_0$ tel que, si $y \geqslant y_1$, ce second membre soit $\leqslant 1/2$ pour tout $p < p_0$.

Si $y \geqslant y_1$, pour tout $p \leqslant y$ on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$1+u_p(z, y) = \exp\big(u_p(z, y)+v_p(z, y)\big), \quad \text{où} \quad |v_p(z, y)| \leqslant |u_p(z, y)|^2\,(^3).$$

Ceci donne, pour $y \geqslant y_1$,

$$\Phi_y\left(\frac{z}{B(y)}\right) = \exp\left(\sum_{p\leqslant y}\frac{\omega(p)}{p}\left(e^{zf(p)/B(y)}-z\frac{f(p)}{B(y)}-1\right)+\sum_{p\leqslant y} v_p(z, y)\right).$$

On voit que, quand y tend vers l'infini, la somme $\sum_{p\leqslant y} v_p(z, y)$ converge uniformément vers zéro pour $|z| \leqslant \varrho$.

En effet, pour $|z| \leqslant \varrho$,

$$\Big|\sum_{p\leqslant y} v_p(z, y)\Big| \leqslant \sum_{p\leqslant y}|u_p(z, y)|^2 \leqslant \sum_{p\leqslant y}\frac{\Omega^2}{p^2}\left(e^{\varrho|f(p)|/B(y)}-1\right)^2 \quad \text{d'après (11).}$$

La dernière somme tend vers zéro quand y tend vers l'infini car chaque terme est majoré indépendamment de y par $\Omega^2 p^{2(M\varrho-1)}$ du fait que $|f(p)| \leqslant MB(y)\log p$, et tend vers zéro quand y tend vers l'infini.

On voit ainsi que $\Phi_y(z/B(y))$ converge uniformément sur un disque ouvert centré au point 0 quand y tend vers l'infini s'il existe $\varrho' > 0$ tel que la somme

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\omega(p)}{p}\left(e^{zf(p)/B(y)}-z\frac{f(p)}{B(y)}-1\right)$$

converge uniformément pour $|z| < \varrho'$ vers une limite $\Psi(z)$, et on a alors

$$\lim_{y\to\infty}\Phi_y(z/B(y)) = \exp\Psi(z) \qquad \text{pour} \qquad |z| < \min(\varrho, \varrho').$$

Ainsi, on obtient la relation (7) pour $1 \leqslant q \leqslant 2N$ (λ étant choisi comme on a dit) si, en plus de l'une des hypothèses (H_1) et (H_2), on suppose que, quand y tend vers l'infini, la somme

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\omega(p)}{p}\left(e^{zf(p)/B(y)}-z\frac{f(p)}{B(y)}-1\right)$$

---

(3) Pour $|u| < 1$,

$$1+u = \exp\left(u+u^2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{u^{k-2}}{k}\right).$$

Si $|u| \leqslant 1/2$,

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{u^{k-2}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|u|^{k-2} \leqslant 1.$$

converge uniformément sur un disque de centre 0 vers une limite $\Psi(z)$. La suite $\{m_k\}$ est déterminée par le fait que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k}{k!}z^k$ est le développement en série entière, au voisinage de 0, de $\exp\Psi(z)$.

On peut transformer cette hypothèse en introduisant l'expression

$$K_x(u) = \frac{1}{B(x)^2}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ f(p)\leqslant uB(x)}}\frac{\omega(p)}{p}f(p)^2,$$

qui, pour chaque $x \geqslant 2$ et tel que $B(x) > 0$, est une fonction non décroissante de u, égale à 0 pour $u < \min_{p\leqslant x}\big(f(p)/B(x)\big)$ et à 1 pour $u \geqslant \max_{p\leqslant x}\big(f(p)/B(x)\big)$.

On voit que l'on a

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\omega(p)}{p}\left(e^{zf(p)/B(y)}-z\frac{f(p)}{B(y)}-1\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\,dK_y(u) \tag{12}$$

(où on prend $(e^{uz}-uz-1)/u^2 = z^2/2$ pour $u = 0$).

Avec l'hypothèse (H_1), il résulte de (9) qu'il existe $M > 0$ et $x_1 \geqslant \max(x_0, 2)$ tel que $|f(p)| \leqslant MB(x)$ pour $x \geqslant x_1$.

Alors, des que $y \geqslant x_1$, on a $K_y(t) = 0$ pour $t < -M$ et $K_y(t) = 1$ pour $t \geqslant M$ et l'intégrale au second membre de (12) se réduit à

$$\int_{-M}^{+M}\frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\,dK_y(u).$$

On voit qu'il y a convergence uniforme sur tout ensemble compact, quand y tend vers l'infini, s'il existe une fonction de répartition K (nulle pour $u < -M$ et égale à 1 pour $u \geqslant M$) telle que, quand x tend vers l'infini, $K_x(u)$ converge vers $K(u)$ en tout point de continuité de K. La limite est

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\,dK(u)$$

et est une fonction entière.

On voit facilement qu'avec l'hypothèse (H_2) il y a convergence uniforme pour $|z| < R$ s'il existe une fonction K non-décroissante sur $\boldsymbol{R}$ telle que, quand x tend vers l'infini, $K_x(u)$ tend vers $K(u)$ en tout point de continuité de K et si on a quand x tend vers l'infini

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{R|u|}\,dK_x(u) = O(1),$$

ce qui est équivalent à

$$\sum\frac{\omega(p)}{p}f(p)^2\exp\left(R\frac{|f(p)|}{B(x)}\right) = O\big(B(x)^2\big). \tag{13}$$

La limite est encore $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\,dK(u)$ et est une fonction holomorphe pour $|z| < R$.

Finalement, on a la relation (7) pour $1 \leqslant q \leqslant 2N$ (λ étant convenablement choisi) dans les deux cas suivants:

(a) L'hypothèse (H_1) est satisfaite et il existe une fonction de répartition K telle que, quand x tend vers l'infini, $K_x(u)$ tend vers $K(u)$ en tout point de continuité de K;

(b) L'hypothèse (H_2) est satisfaite et il existe une fonction K non-décroissante sur R et un $R > 0$ tels que, quand x tend vers l'infini, $K_x(u)$ tend vers $K(u)$ en tout point de continuité de K et on a (13).

La suite $\{m_k\}$ est déterminée par le fait que l'on a, pour tout z dans le premier cas, pour $|z| < R$ dans le second,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} z^k = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\,dK(u)\right).$$

Notons qu'en fait la relation (7) a lieu pour $0 \leqslant q \leqslant 2N$ car elle a lieu trivialement pour $q = 0$.

3.2.2. On voit qu'on obtient la relation (8) pour $1 \leqslant q \leqslant 2N$ si on ajoute l'hypothèse que l'on a

$$B(x^2) \sim B(x) \qquad (x \to \infty).$$

(On voit immédiatement que, du fait que la fonction B est non-décroissante, ceci entraîne que $B(x^\alpha) \sim B(x)$ pour tout $\alpha > 0$.)

D'abord, comme $y = x^\lambda$, on a quand x tend vers l'infini

$$m_q X(x) B(y)^q + o\big(X(x) B(y)^q\big) = m_q X(x) B(x)^q + o\big(X(x) B(x)^q\big).$$

D'autre part, en partant de

$$f_y(n) - A(x) = \big(f_y(n) - A(y)\big) - \big(A(x) - A(y)\big)$$

et utilisant la formule du binôme, on trouve que, pour $1 \leqslant q \leqslant 2N$,

$$\sum_{n\in S_x} \big(f_y(n) - A(x)\big)^q = \sum_{n\in S_x} \big(f_y(n) - A(y)\big)^q + \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} \big(A(x) - A(y)\big)^k \sum_{n\in S_x} \big(f_y(n) - A(y)\big)^{q-k}.$$

Compte-tenu de ce que l'on a (7) pour $0 \leqslant q \leqslant 2N$, pour obtenir (8) il suffit de montrer que

$$A(x) - A(y) = o\big(B(x)\big).$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$|A(x) - A(y)| = \Big|\sum_{y<p\leqslant x} \frac{\omega(p)}{p} f(p)\Big| \leqslant \Big(\sum_{y<p\leqslant x} \frac{\omega(p)}{p}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{y<p\leqslant x} \frac{\omega(p)}{p} f(p)^2\Big)^{1/2}.$$

On a

$$\sum_{y<p\leqslant x} \frac{\omega(p)}{p} \leqslant \Omega \sum_{y<p\leqslant x} \frac{1}{p} = O(1)$$

et

$$\sum_{y<p\leqslant x} \frac{\omega(p)}{p} f(p)^2 = B(x)^2 - B(y)^2 = o\big(B(x)^2\big).$$

Notons, ici encore, que la relation (8) a lieu en fait pour $0 \leqslant q \leqslant 2N$.

3.2.3. On voit maintenant que, du fait que la relation (8) a lieu pour $0 \leqslant q \leqslant 2N$ on peut déduire que la relation (6) a lieu pour $1 \leqslant q \leqslant N$ si l'on peut montrer que l'on a

$$\sum_{n\in S_x} \big(f(n) - f_y(n)\big)^q = o\big(X(x) B(x)^q\big) \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant q \leqslant 2N. \tag{14}$$

En effet, en partant de

$$f(n) - A(x) = \big(f_y(n) - A(x)\big) + \big(f(n) - f_y(n)\big)$$

et utilisant la formule du binôme, on voit que, pour $1 \leqslant q \leqslant N$,

$$\sum_{n\in S_x} \big(f(n) - A(x)\big)^q = \sum_{n\in S_x} \big(f_y(n) - A(x)\big)^q + \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} \sum_{n\in S_x} \big(f(n) - f_y(n)\big)^k \big(f_y(n) - A(x)\big)^{q-k}.$$

La première somme au second membre est égale à

$$m_q X(x) B(x)^q + o\big(X(x) B(x)^q\big).$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$\Big|\sum_{n\in S_x} \big(f(n) - f_y(n)\big)^k \big(f_y(n) - A(x)\big)^{q-k}\Big| \leqslant \Big(\sum_{n\in S_x} \big(f(n) - f_y(n)\big)^{2k}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in S_x} \big(f_y(n) - A(x)\big)^{2q-2k}\Big)^{1/2}$$

et, d'après (8) pour $0 \leqslant q \leqslant 2N$, on a pour $1 \leqslant k \leqslant N$

$$\sum_{n\in S_x} \big(f_y(n) - A(x)\big)^{2q-2k} = O\big(X(x) B(x)^{2q-2k}\big).$$

L'hypothèse la plus simple qui permet d'établir (14) est que l'on a quand x tend vers l'infini

$$\max_{p\leqslant x} |f(p)| = o\big(B(x)\big). \tag{15}$$

En effet, étant donné $\Delta' > \Delta$, si x est assez grand, tout $n \in S_x$ est $\leqslant x^{\Delta'}$. Par suite, pour tout $n \in S_x$,

$$|f(n)-f_y(n)| = \Big|\sum_{\substack{p|n\\ p>y}} f(p)\Big| \leqslant \frac{\Delta'}{\lambda} \max_{p\leqslant x^{\Delta'}} |f(p)|$$

car le nombre des $p > y$ qui divisent n est $\leqslant \Delta'/\lambda$.

Ceci donne

$$\Big|\sum_{n\in S_x} \big(f(n)-f_y(n)\big)^q\Big| \leqslant |S_x| \left(\frac{\Delta'}{\lambda}\right)^q \big(\max_{p\leqslant x^{\Delta'}} |f(p)|\big)^q.$$

Le second membre est $o\big(X(x)B(x^{\Delta'})^q\big)$, donc $o\big(X(x)B(x)^q\big)$.

Notons que l'hypothèse que l'on a (15) implique par elle-même que $B(x^2) \sim B(x)$ quand x tend vers l'infini, de sorte que l'on n'a plus besoin de cette dernière hypothèse.

Elle implique aussi que, quand x tend vers l'infini, $K_x(u)$ tend vers 0 pour $u < 0$ et vers 1 pour $u > 0$.

Compte tenu de ce qui a été dit à la fin du paragraphe 3.2.1, on voit que les hypothèses que l'on a (15) et qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que l'on ait

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^\beta\\ \nu(d)\leqslant k}} \mu^2(d)|r_d(x)| = o\left(\frac{X(x)}{(\log\log x)^k}\right) \quad \text{pour tout } k \in N^*$$

suffisent pour que l'on ait (6) avec

$$m_q = \mu_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^q e^{-u^2/2}\, du$$

(car

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} z^k = e^{z^2/2} = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\, dK(u)\right),$$

où $K(u) = 0$ pour $u < 0$ et 1 pour $u > 0$).

Notons que, dans ce cas particulier, la démonstration peut être simplifiée car il est facile de montrer sans utiliser $K_x(u)$ que (15) implique la convergence uniforme pour y tendant vers l'infini de $\Phi_y(z/B(y))$ vers $e^{z^2/2}$ sur tout ensemble compact.

Pour avoir une hypothèse sur la fonction f moins forte que (15), il faut supposer davantage sur S_x.

On peut, par exemple, ajouter l'hypothèse qu'il existe k_1 et $k_2 > 0$ tels que l'on ait

$$(16) \qquad \sum_{\substack{n\in S_x\\ d|n}} 1 \leqslant k_1 k_2^{\nu(d)} \frac{\omega(d)}{d} X(x)$$

pour tout $d \in N^*$ sans facteur carré et tout $x \geqslant$ un certain $x_1 \geqslant x_0$.

Alors, au lieu de (15), il suffira de supposer que, quand x tend vers l'infini, on a

$$(17) \qquad \sum_{x<p\leqslant x^2} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)|^k = o\big(B(x)^k\big) \quad \text{pour tout } k > 2,$$

(ce qui, avec l'hypothèse que $B(x^2) \sim B(x)$, entraîne la même relation où $x < p \leqslant x^2$ est remplacé par $x < p \leqslant x^\alpha$, avec α quelconque > 1).

En effet, en appliquant le théorème 2 à la fonction $f-f_y$, avec $E = \{p\colon y < p \leqslant x^{\Delta'}\}$, où Δ' est fixé $> \Delta$, $M = k_1$, $\omega_1(d) = k_2^{\nu(d)}\omega(d)$ et $\varrho = 1/B(y)$, et supposant x assez grand pour que $\max_{n\in S_x} n \leqslant x^{\Delta'}$, on obtient

$$\sum_{n\in S_x} |f(n)-f_y(n)|^q$$
$$\leqslant q!\, k_1 X(x) B(y)^q \left\{\exp\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{k_2}{k!\, B(y)^k}\left(\sum_{y<p\leqslant x^{\Delta'}} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)|^k\right)\right) - 1\right\}.$$

Mais (17) implique que l'on a quand x tend vers l'infini

$$\sum_{y<p\leqslant x^{\Delta'}} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)|^k = \sum_{y<p\leqslant y^{\Delta'/\lambda}} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)|^k = o\big(B(y)^k\big) \quad \text{pour} \quad k > 2,$$

et l'hypothèse que $B(x^2) \sim B(x)$ implique la même relation pour $k = 1$ et 2.

Pour $k = 2$,

$$\sum_{y<p\leqslant y^{\Delta'/\lambda}} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)|^2 = B(y^{\Delta'/\lambda})^2 - B(y)^2 = o\big(B(y)^2\big).$$

Pour $k = 1$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$\sum_{y<p\leqslant y^{\Delta'/\lambda}} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)| \leqslant \left(\sum_{y<p\leqslant y^{\Delta'/\lambda}} \frac{\omega(p)}{p}\right)^{1/2} \left(\sum_{y<p\leqslant y^{\Delta'/\lambda}} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)|^2\right)^{1/2}$$

et on a

$$\sum_{p\leqslant y^{\Delta'/\lambda}} \frac{\omega(p)}{p} \leqslant \Omega \sum_{y<p\leqslant y^{\Delta'/\lambda}} \frac{1}{p} = O(1).$$

Il est à noter que, si on a $\max_{p\leqslant x} |f(p)| = O\big(B(x)\big)$ et $B(x^2) \sim B(x)$, on a (17).

3.2.4. En récapitulant ce qui a été vu dans les paragraphes précédents, on obtient les théorèmes suivants:

Théorème 3. *S'il existe un* $\beta \in]0, 1[$ *tel que, quand* x *tend vers l'infini,*

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^\beta\\ \nu(d)\leqslant k}} \mu^2(d)|r_d(x)| = o\left(\frac{X(x)}{(\log\log x)^k}\right) \quad \textit{pour tout } k \in N^*$$

et si on a quand x tend vers l'infini

$$\max_{p \leqslant x} |f(p)| = o(B(x)),$$

on a pour tout $q \in N^*$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|S_x|} \sum_{n\in S_x} \left(\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}\right)^q = \mu_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^q e^{-u^2/2}\, du.$$

THÉORÈME 4. *Supposons que*

(1) *Il existe* $\beta \in]0, 1[$ *tel que, quand x tend vers l'infini,*

$$\sum_{\substack{d \leqslant x^\beta \\ \nu(d) \leqslant k}} \mu^2(d)|r_d(x)| = o\left(\frac{X(x)}{(\log\log x)^k}\right) \quad \textit{pour tout } k \in N^*;$$

(2) *il existe* k_1 *et* $k_2 > 0$ *tels que*

$$\sum_{\substack{n\in S_x \\ d|n}} 1 \leqslant k_1 k_2^{\nu(d)} \frac{\omega(d)}{d} X(x)$$

pour tout $d \in N^*$ *sans facteur carré et tout* $x \geqslant$ *un certain* $x_1 \geqslant x_0$;

(3) *on a quand x tend vers l'infini*

$$\max_{p \leqslant x} |f(p)| = O(B(x)) \quad \textit{et} \quad B(x^2) \sim B(x);$$

(4) *il existe une fonction de répartition K telle que, quand x tend vers l'infini*

$$K_x(u) = \frac{1}{B(x)^2} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \leqslant uB(x)}} \frac{\omega(p)}{p} f(p)^2$$

tend vers $K(u)$ *en tout point de continuité de* K.

Alors on a pour tout $q \in N^*$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|S_x|} \sum_{n\in S_x} \left(\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}\right)^q = m_q,$$

où la suite $\{m_k\}$ *est déterminée par le fait que, pour tout* $z \in C$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} z^k = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\, dK(u)\right).$$

THÉORÈME 5. *Supposons que*

(1) *Il existe* $\beta \in]0, 1[$ *tel que, quand x tend vers l'infini,*

$$\sum_{\substack{d \leqslant x^\beta \\ \nu(d) \leqslant k}} \mu^2(d)|r_d(x)| = o\left(\frac{X(x)}{(\log x)^k}\right) \quad \textit{pour tout } k \in N^*;$$

(2) *il existe* k_1 *et* $k_2 > 0$ *tels que*

$$\sum_{\substack{n\in S_x \\ d|n}} 1 \leqslant k_1 k_2^{\nu(d)} \frac{\omega(d)}{d} X(x)$$

pour tout $d \in N^*$ *sans facteur carré et tout* $x \geqslant$ *un certain* $x_1 \geqslant x_0$;

(3) *on a quand x tend vers l'infini*

$$\max_{p \leqslant x} \frac{|f(p)|}{\log p} = O(B(x)), \quad B(x^2) \sim B(x),$$

et, pour tout $k > 2$,

$$\sum_{x < p \leqslant x^2} \frac{\omega(p)}{p} |f(p)|^k = o(B(x)^k);$$

(4) *il existe une fonction K non décroissante sur* $\boldsymbol{R}$ *et un* $R > 0$ *tels que, quand x tend vers l'infini,*

$$K_x(u) = \frac{1}{B(x)^2} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \leqslant uB(x)}} \frac{\omega(p)}{p} f(p)^2$$

tend vers $K(u)$ *en tout point de continuité de* K *et*

$$\sum \frac{\omega(p)}{p} f(p)^2 \exp R\frac{|f(p)|}{B(x)} = O(B(x)^2).$$

Alors on a pour tout $q \in N^*$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|S_x|} \sum_{n\in S_x} \left(\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}\right)^q = m_q,$$

où la suite $\{m_k\}$ *est déterminée par le fait que, pour* $|z| < R$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} z^k = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{uz}-uz-1}{u^2}\, dK(u)\right).$$

Notons que la conclusion du théorème 3 implique que, quand x tend vers l'infini, la distribution des nombres $(f(n)-A(x))/B(x)$ où n parcourt la suite S_x converge vers la distribution normale de Gauss, et les conclusions des théorèmes 4 et 5 impliquent que cette distribution converge vers la distribution dont la fonction caractéristique est

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itu}-itu-1}{u^2}\, dK(u)\right).$$

3.2.5. Si la famille $\{S_x\}$ est l'une de celles que nous avons données comme exemples 1, 2, 3, 4 au paragraphe 3.1, la majoration de $|r_d(x)|$ que nous avons indiquée implique que la première hypothèse de chacun des théorèmes 3, 4 et 5 est satisfaite.

L'implication est triviale pour les exemples 1, 2, 3 (on peut prendre β quelconque $\in\,]0, 1[$ pour les exemples 1 et 3, β quelconque $\in\,]0, 1/2[$ pour l'exemple 2). Elle résulte simplement du théorème de Bombieri–Vinogradov pour l'exemple 4; on peut prendre β quelconque $\in\,]0, 1/2[$.

On peut montrer que cette première hypothèse est aussi satisfaite dans l'exemple 5, avec β quelconque $\in\,]0, 1[$.

La deuxième hypothèse des théorèmes 4 et 5 est satisfaite dans les exemples 1, 2 et 5, et dans l'exemple 3 si $Q(n) = an+b$, où $a > 0$, $b > 0$ et $(a, b) = 1$.

On peut prendre

$k_1 = k_2 = 1$ pour l'exemple 1;

$k_1 = \zeta(2)^2/\zeta(4)$, $k_2 = 9/5$ pour l'exemple 2(4);

$k_1 = a+b+1$, $k_2 = 1$ pour l'exemple 3 où $Q(n) = an+b$, $a > 0$, $b > 0$, $(a, b) = 1$;

$k_1 = m$, $k_2 = 1$ pour l'exemple 5.

On voit que le théorème 3 donne les résultats de Halberstam cités dans l'introduction. Notre méthode fournit donc une démonstration simple de ces résultats.

Pour le dernier, il apparaît que l'hypothèse que $B(x)/\log\log\log x$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini est superflue. Sans doute Halberstam n'avait pas pu se débarasser de cette condition parce que, à cette époque, il ne disposait pas du théorème de Bombieri–Vinogradov.

4. Remarques.

4.1. Si on a pour chaque $q \in N^*$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|S_x|} \sum_{n\in S_x} \left(\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}\right)^q = m_q,$$

on a la même relation avec, à la place de $A(x)$ et $B(x)$, des quantités $A^*(x)$ et $B^*(x)$ satisfaisant à

$$A^*(x)-A(x) = o\big(B(x)\big) \quad \text{et} \quad B^*(x) \sim B(x) \quad (x\to\infty).$$

(4) Il est facile de voir que, pour $d \in N^*$ sans facteur carré, le nombre des $n \leqslant x$ qui sont sans facteur carré et multiples de d est inférieur à

$$\frac{x}{d}\left(\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\prod_{p\nmid d}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right)\right) = \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}\prod_{p|d}\frac{1+1/p}{1+1/p^2}.$$

Pour chaque p, $\left(1+\frac{1}{p}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{p^2}\right) \leqslant \frac{9}{5}$.

On le voit en partant de l'égalité

$$f(n)-A^*(x) = \big(f(n)-A(x)\big)-\big(A^*(x)-A(x)\big)$$

et utilisant le développement de la puissance q-ième du second membre par la formule du binôme.

4.2. Dans tous les exemples que nous avons donnés au paragraphe 3.1 la suite S_x était une section commençante d'une suite infinie fixe d'entiers > 0.

Ce n'est pas nécessaire.

Ainsi, les deux premières hypothèses du théorème 5, qui sont les hypothèses les plus fortes sur S_x dans les théorèmes 3, 4 et 5, sont satisfaites, par exemple, si S_x est la suite des $n \in\,]x, x+\delta x]$, où δ est un nombre positif fixe, pour $x \geqslant 1/\delta$.

4.3. Une modification évidente de notre méthode permettrait d'introduire des poids, comme le fait Alladi.

En remplaçant $|S_x|$ par $S^*(x) = \sum_{n\in S_x} a_n(x)$ et $\sum_{\substack{n\in S_x\\ d|n}} 1$ par $\sum_{\substack{n\in S_x\\ d|n}} a_n(x)$ (avec $a_n(x) \geqslant 0$), on démontrerait, avec les hypothèses appropriées, l'existence de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{S^*(x)} \sum_{n\in S_x} a_n(x) \left(\frac{f(n)-A(x)}{B(x)}\right)^q.$$

4.4. Nous n'avons considéré que les fonctions fortement additives satisfaisant à

$$\sum \frac{\omega(p)}{p} f(p)^2 = \infty.$$

Notre méthode permettrait aussi bien be traiter le cas des fonctions fortement additives pour lesquelles

$$\sum \frac{\omega(p)}{p} f(p)^2 < \infty.$$

4.5. La méthode utilisée au paragraphe 2.1 peut être étendue à l'étude des problèmes plus généraux suivants:

Soit E un ensemble fini de nombres premiers, $P = \prod_{p\in E} p$, et $f_1, f_2, \ldots, f_s$ des fonctions fortement additives satisfaisant à

$$f_j(p) = 0 \quad \text{pour} \quad p \notin E, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Soit $\mathscr{A}$ une suite finie d'éléments de N^{*s}.

Désignons par $a = (a_1, \ldots, a_s)$ un élément de $\mathscr{A}$.

Evaluer la somme $\sum_{a\in\mathscr{A}} (f_1(a_1)+f_2(a_2)+\ldots+f_s(a_s)-K)^q$, où K est une constante complexe et $q\in N^*$, ou la somme

$$\sum_{a\in\mathscr{A}} (f_1(a_1)-K_1)^{q_1}(f_2(a_2)-K_2)^{q_2}\ldots(f_s(a_s)-K_s)^{q_s},$$

où $K_1, K_2, \ldots, K_s$ sont des constantes complexes et $q_1, q_2, \ldots, q_s$ des entiers $\geqslant 0$.

Ici $\mathscr{A}_d$ devrait être remplacée par la partie $\mathscr{A}_{d_1,d_2,\ldots,d_s}$ de $\mathscr{A}$ formée des termes pour lesquels $d_1|a_1, d_2|a_2, \ldots, d_s|a_s$ et la relation

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d}X + r_d$$

par

$$|\mathscr{A}_{d_1,\ldots,d_s}| = \frac{\omega(d_1, d_2, \ldots, d_s)}{d_1 d_2 \ldots d_s}X + r_{d_1,\ldots,d_s},$$

où ω est une fonction multiplicative de s entiers >0.

Les résultats peuvent être appliqués à des problèmes de moments correspondant aux problèmes considérés par Kubilius dans les chapitres V et VIII de son livre [7].

Références

[1] K. Alladi, *A new application of the sieve to probabilistic number theory*, Proc. Conf. on Analytic Number Theory, Austin 1982, Lecture Notes n° 1052, 1984.

[2] H. Delange, *Sur un théorème d'Erdős et Kac*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. 5 (1956), p. 130–144.

[3] — *Sur certaines fonctions arithmétiques additives*, Séminaire Delange–Pisot, 2e année (1960–61), n° 6.

[4] P. Erdős and M. Kac, *The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions*, Amer. J. Math. 62 (1940), p. 738–742.

[5] H. Halberstam, *On the distribution of additive number theoretic functions II*, J. London Math. Soc. 31 (1956), p. 1–14.

[6] — *On the distribution of additive number theoretic functions III*, ibid. 31 (1956), p. 14–27.

[7] J. Kubilius, *Probabilistic methods in the theory of numbers* (en russe), Vilnius 1962; Transl. of Math. Mon. n° 11 (1964).

[8] D. P. Parent, *Exercices de théorie des nombres*, Gauthier-Villars, 1978.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUE, bât. 425
91405 Orsay (France)

Reçu le 1.4.1986 (1613)

ACTA ARITHMETICA
XLIX (1988)

Differences of the partition function

by

A. M. ODLYZKO (Murray Hill, N. J.)

Dedicated to Paul Erdős
on the occasion of his 75th birthday

1. Introduction. If $f(n)$ is any function on the nonnegative integers, define its first difference Δf by $\Delta f(n) = f(n)-f(n-1)$ for $n\geqslant 1$, $\Delta f(0) = f(0)$. The kth difference $\Delta^k f$ of f is then defined recursively by $\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1}f)$. A few years ago, I. J. Good [5a] asked about the behavior of $\Delta^k p(n)$, where $p(n)$ denotes the number of unrestricted partitions of n. He initially conjectured [5a] that if $k>3$, then the sequence $\Delta^k p(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, alternates in sign. However, computations by R. Razen and independently by I. J. Good and his associates [5b] found counterexamples to this conjecture, and led to a new conjecture, namely that for each fixed k, $\Delta^k p(n) > 0$ for n sufficiently large. I. J. Good [5b] even made the stronger conjecture that for each k, there is an $n_0(k)$ such that $\Delta^k p(n)$ alternates in sign for $n < n_0(k)$, and $\Delta^k p(n) \geqslant 0$ for $n \geqslant n_0(k)$. He also suggested that $6(k-1)(k-2)+k^3/2$ might be a good approximation to $n_0(k)$. Some further computations by R. A. Gaskins led I. J. Good to revise his conjecture about the size of $n_0(k)$, and suggest that $\pi k^{5/2}$ might be a good approximation to it [5c].

At about the same time as the first publication of I. J. Good's problem, the same question about the sign of $\Delta^k p(n)$ was also raised independently by G. E. Andrews, and was answered by H. Gupta [6]. Gupta noted that $\Delta p(n) > 0$ for all n, and gave a simple proof of the result that $\Delta^2 p(n) \geqslant 0$ for $n \geqslant 2$, while $\Delta^2 p(0) = 1$, $\Delta^2 p(1) = -1$. Gupta also noted that it can be shown easily using the Hardy–Ramanujan–Rademacher series ([1], [2], [3], [7], [8]) for $p(n)$ that for each k, $\Delta^k p(n) > 0$ if n is sufficiently large. In fact, this result can be obtained from some of the earliest of the Hardy–Ramanujan approximations [7] to $p(n)$:

$$(1.1)\qquad p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\left(\lambda_n^{-1}\exp(C\lambda_n)\right) + O\left(\exp\left((C/2+\varepsilon)n^{1/2}\right)\right),$$