ACTA ARITHMETICA
XLIX (1987)

Un problème de probabilité conditionnelle en arithmétique

par

GÉRALD TENENBAUM (Nancy)

Au Professeur Paul Erdős, en témoignage de respect et d'admiration

1. Introduction. Parmi les suites d'entiers définies par des contraintes multiplicatives, l'une des plus simples est sans doute l'ensemble des multiples de tous les entiers d'un intervalle. Cependant, à ce jour, la plupart des questions naturelles concernant cet objet sont imparfaitement résolues et bien des points restent dans l'obscurité. Pour chaque entier n, désignons par $\tau(n; y, z)$ le nombre de ses diviseurs d satisfaisant à $y < d \leqslant z$. Ce travail est motivé par la question suivante, posée par Erdős en de maintes occasions (cf. par exemple [3], p. 89): désignons par $\varepsilon(y)$ la densité naturelle des entiers n tels que $\tau(n; y, 2y) \geqslant 1$ et par $\varepsilon'(y)$ celle des entiers n tels que $\tau(n; y, 2y) = 1$; est-il vrai que l'on a

$$\lim_{y\to\infty} \varepsilon'(y)/\varepsilon(y) = 0? \tag{1.1}$$

Si l'on pose, plus généralement, pour $x \geqslant y \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$

$$H(x, y, z) := \operatorname{card}\{n \leqslant x:\ \tau(n; y, z) \geqslant 1\},$$

$$H_r(x, y, z) := \operatorname{card}\{n \leqslant x:\ \tau(n; y, z) = r\},$$

il s'agit donc d'estimer la probabilité conditionnelle

$$P_r(x, y, z) := H_r(x, y, z)/H(x, y, z) \tag{1.2}$$

pour qu'un entier n'excédant pas x possède exactement r diviseurs dans l'intervalle $(y, z]$ sachant qu'il en possède au moins un.

Une évaluation de la probabilité (1.2) ne prend véritablement tout son sens qu'associée à une estimation de la probabilité de l'évènement conditionnant – c'est-à-dire de $H(x, y, z)$. Nous avons étudié cette quantité dans un précédent travail [9] et dégagé quatre types de comportements, correspondant à une partition asymptotique du domaine tridimensionnel défini par les inégalités $x \geqslant z \geqslant y$. Quelques notations seront utiles pour récapituler les résultats de [9].

Nous posons

$$\delta = 1-(1+\log\log 2)/\log 2 = 0{,}086071\ldots$$

et définissons les fonctions suivantes

$$Q(v) = v\log v - v + 1 \qquad (v > 0),$$

$$E(v) = Q\left(\frac{1+\max(v,\,0)}{\log 2}\right) \qquad (v \in \boldsymbol{R}),$$

$$L(v) = \exp\{\sqrt{\log v \log_2 v}\} \qquad (v \geqslant 3);$$

ici et dans la suite, $\log_k$ désigne la k-ième itérée du logarithme népérien. Dans tout l'article nous supposons donnée une fonction $\psi(y)$,

$$\psi(y) \to \infty \qquad (y \to \infty),$$

dont la croissance peut être choisie arbitrairement lente. En particulier, nous imposons que $\psi(y) = o(\sqrt{\log_3 y})$. Avec cette convention, nous posons

$$z_0(y) = y\big(1+(\log y)^{1-\log 4}\exp\{-\psi(y)\sqrt{\log_2 y}\}\big).$$

Pour tous y, z, $z > y \geqslant 2$, nous définissons $u = u(y, z)$ et $\gamma = \gamma(y, z)$ par les relations

$$z = y^{1+u} = y\big(1+(\log y)^{-\gamma}\big).$$

Enfin, la lettre c, avec ou sans indice, désigne une constante positive, dépendant au plus du paramètre r.

Théorème 0 ([9]). (i) *On a uniformément lorsque* $y \to \infty$, $z - y \to \infty$, *et* $y \leqslant z \leqslant \min(z_0(y),\, x^{1/2})$

$$(1.3)\qquad H(x, y, z) = \big(1+o(1)\big)\,x(\log y)^{-\gamma}.$$

(ii) *On a uniformément lorsque* $y \to \infty$, *et* $z_0(y) \leqslant z \leqslant \min(2y,\, x^{1/2})$

$$(1.4)\qquad H(x, y, z) = x(\log y)^{-E(\gamma)+o(1)}.$$

(iii) *Sous la condition* $8 \leqslant 2y \leqslant z \leqslant \min(y^{3/2},\, x^{1/2})$, *on a*

$$(1.5)\qquad xu^{\delta}L(1/u)^{-c_1} \leqslant H(x, y, z) \leqslant c_2\,xu^{\delta}\frac{\log_2(2/u)}{\sqrt{\log(1/u)}}.$$

De plus, lorsque $z = O(y)$, *on peut omettre, quitte à modifier* c_2, *le facteur* $\log_2(2/u)$ *dans la borne supérieure.*

(iv) *On a uniformément pour* $1 \leqslant y \leqslant z \leqslant x$

$$(1.6)\qquad H(x, y, z) = x\left(1+O\left(\frac{\log(2y)}{\log z}\right)\right).$$

Remarques. $v = \log 4 - 1$ est l'unique solution de l'équation $E(v) = v$; de plus, on a $E(0) = \delta$. Il y a donc continuité des exposants dans les estimations (1.3), (1.4) et (1.5). La formule (1.6) n'est non triviale que pour $z \geqslant y^c$ où c est une constante assez grande. D'après (1.5), on a $H(x, y, z) \asymp x$ dans la région intermédiaire $y^{3/2} \leqslant z \leqslant \min(y^c,\, x^{1/2})$.

Dans [9], nous n'avons pas cherché à estimer de manière plus précise le facteur $(\log y)^{o(1)}$ figurant dans (1.4). Il nous sera utile dans le présent contexte de disposer du raffinement suivant, que nous prouvons dans l'Appendice.

Complément au Théorème 0. *Posons*

$$E_1(v) = \begin{cases} v & si \quad v > \log 4 - 1, \\ E(v) & si \quad v \leqslant \log 4 - 1. \end{cases}$$

Sous la condition $2 \leqslant y \leqslant z_0(y) \leqslant z \leqslant \min(2y,\, x^{1/2})$, *on a*

$$(1.7)\qquad x(\log y)^{-E_1(\gamma)}L(\log y)^{-c_3} \leqslant H(x, y, z) \leqslant c_4\,x(\log y)^{-E_1(\gamma)}.$$

Il découle en particulier des énoncés précédents que l'on a

$$(1.8)\qquad \varepsilon(y) = (\log y)^{-\delta+o(1)} \qquad (y \to \infty).$$

Le fait que $\varepsilon(y) \to 0$ est connu depuis 1935. La démonstration est due à Erdős [2]. Le problème avait été introduit par Besicovitch qui, en montrant que $\liminf \varepsilon(y) = 0$, construisit un contre exemple à une conjecture sur les ensembles de multiples [1] – voir aussi [8]. Lorsque nous avons obtenu (1.8), et donc la valeur exacte de l'exposant de $\log y$ dans l'évaluation de $\varepsilon(y)$, nous pensions pouvoir répondre par l'affirmative à la question initiale d'Erdős en établissant une majoration du type

$$(1.9)\qquad \varepsilon'(y) < (\log y)^{-\alpha} \qquad (y \geqslant y_0)$$

pour un $\alpha > \delta$. Nous prouverons cependant ici que (1.9) n'a lieu pour aucun α strictement supérieur à δ. En fait nous montrerons que (1.8) est également valable pour $\varepsilon'(y)$ et même, plus précisément, que l'on a

$$(1.10)\qquad (\log y)^{-\delta}L(\log y)^{-c_5} \leqslant \varepsilon'(y) \leqslant c_6(\log y)^{-\delta}(\log_2 y)^{-1/2},$$

c'est-à-dire qu'aux valeurs numériques des constantes près, $\varepsilon'(y)$ et $\varepsilon(y)$ sont dans le même intervalle d'incertitude.

Ainsi le rapport $\varepsilon'(y)/\varepsilon(y)$, s'il tend vers 0, se comporte comme une fonction à décroissance lente de $\log y$. Nul doute qu'une technique très fine sera nécessaire pour trancher cette question (le lecteur pourra en effet constater que les méthodes du présent article sont déjà passablement sophistiquées).

Nos résultats concernant $P_r(x, y, z)$ sont rassemblés dans le Théorème 1 ci-dessous. Le comportement asymptotique de cette probabilité conditionnelle y est décrit, pour $r = 1$, dans les quatre régions apparaissant au Théorème

0; lorsque $r>1$, les deux domaines intermédiaires sont astreints à la condition supplémentaire $z \leqslant x^{1/(r+1)}$.

Théorème 1. *Soit r un entier fixé, $r \geqslant 1$.*

(i) *On a uniformément lorsque $y \to \infty$, $z-y \to \infty$, $y \leqslant z \leqslant \min(z_0(y), x^{1/2})$*

$$P_r(x, y, z) = \delta_{1r} + o(1) \tag{1.11}$$

où δ_{1r} désigne le symbole de Kronecker.

(ii) *Sous les conditions $y \geqslant y_0(r)$ et $z_0(y) \leqslant z \leqslant \min(2y, x^{1/(r+1)})$, on a*

$$L(\log y)^{-c_7} \leqslant P_r(x, y, z) \leqslant 1. \tag{1.12}$$

(iii) *Sous la condition $y_0(r) \leqslant 2y \leqslant z \leqslant \min(y^{3/2}, x^{1/(r+1)})$, on a*

$$\frac{L(\log y)^{-c_7}}{\log(z/y)} \ll_r P_r(x, y, z) \ll_r \frac{L(\log y)^{c_8}}{(\log(z/y))^{\delta}}. \tag{1.13}$$

(iv) *On a uniformément pour $y \geqslant y_0(r)$, $y^{3/2} \leqslant z \leqslant x^{1/2}$*

$$\frac{\log((\log z)/\log y)}{\log z} \ll_r P_r(x, y, z) \ll_r (\log y)^{1-\delta} \frac{(\log_2 z)^{2r+1}}{\log z}. \tag{1.14}$$

Ces résultats nous portent à conjecturer que $P_r(x, y, z) \asymp_r 1$ sous l'hypothèse

$$z_1(y) \leqslant z \leqslant \min(2y, x^{1/(r+1)}),$$

avec

$$z_1(y) := y\left(1 + (\log y)^{1-\log 4} \exp\{\psi(y)\sqrt{\log_2 y}\}\right).$$

De même, il est vraisemblable que l'on a

$$P_r(x, y, z) = o(1) \tag{1.15}$$

dès que $z/y \to \infty$, $z \leqslant x^{1-\varepsilon}$. Dans cette direction, nos résultats ont pour limite de sensibilité le facteur

$$L(\log y)^{O(1)} = (\log y)^{o(1)}.$$

Ainsi, par exemple, il découle de (1.13) que (1.15) a effectivement lieu lorsque

$$z \geqslant y \exp\{L(\log y)^{c_9}\} = y^{1+o(1)}.$$

Alors que les formules (1.11) et (1.12) fournissent au moins, grâce au Théorème 0, la valeur exacte des exposants des logarithmes intervenant dans l'évaluation de $H_r(x, y, z)$, les bornes de (1.13) et (1.14) diffèrent d'un facteur $(\log\min(y, z/y))^{1-\delta}(\log_2 z)^{O(1)}$. Nous verrons au cours de la démonstration que cette disparité provient de la prise en compte des entiers possédant de nombreux facteurs premiers $\leqslant z/y$: négligée dans la minoration, leur contribution s'avère prépondérante dans la majoration. Notre conviction est

cependant de la présence de nombreux petits facteurs premiers impose aux entiers de $H_r(x, y, z)$ une structure multiplicative tellement spéciale que l'on peut pratiquement éliminer cette éventualité. Nous n'avons pas trouvé d'argument effectif satisfaisant à l'appui de ce sentiment. Un traitement assez compliqué permet de réduire sensiblement les bornes supérieures de (1.13) et (1.14) sans toutefois permettre de les ramener, même à un facteur $(\log z)^{o(1)}$ près, aux valeurs des bornes inférieures correspondantes. En cette circonstance, il ne nous a pas paru souhaitable de développer ici une amélioration technique n'ayant aucun caractère de finalité.

Nous verrons à la Section 3 que notre méthode pour construire des entiers n tels que $\tau(n; y, z) = r$ repose principalement sur une version quantitative, et plus générale, du principe suivant: *en moyenne, un entier m possédant $o(\log m)$ diviseurs est tel que la plupart de ceux-ci sont "isolés"* (si $d|m$, on dit que d est isolé si d est le seul diviseur de m dans l'intervalle $[d/2, 2d]$). Or, le nombre $I(m)$ de diviseurs isolés de m est lié à l'étude de la fonction d'Erdős–Montgomery $g(n)$, définie comme le nombre de couples (d, d') de diviseurs consécutifs de n tels que $d|d'$. En effet, pour chaque diviseur isolé d de n, $2d$ est le plus petit diviseur de $2n$ excédant d; il s'ensuit que

$$g(2n) \geqslant I(n) \quad (n \geqslant 1).$$

Erdős et l'auteur ont étudié dans [4], [5], l'ordre normal et l'ordre moyen de $g(n)$. En particulier, la fonction $g(n)/\tau(n)$ possède une mesure de répartition continue en 0. Cela établit une forme forte d'une conjecture émise par Montgomery lors du symposium de Durham en 1979. Dans [5], figure un encadrement de l'ordre moyen de $g(n)$ par deux puissances distinctes de $\log n$. A titre d'application de la méthode de cet article, et, en fait, comme une conséquence directe d'un résultat intermédiaire dans la preuve du Théorème 1, nous sommes en mesure d'estimer cet ordre moyen avec un facteur d'incertitude $(\log n)^{o(1)}$. On a plus précisément le résultat suivant.

Théorème 2. *On a uniformément pour $x \geqslant 16$*

$$x(\log x)^{1-\delta} L(\log x)^{-c_{10}} \ll \sum_{n \leqslant x} g(n) \ll x(\log x)^{1-\delta}(\log_2 x)^{-1/2}.$$

Nous concluons cette introduction par la preuve du point (i) du Théorème 1. Pour chaque entier n, posons

$$\varrho(n) = \sum_{\substack{d|n \\ y<d\leqslant z}} 1.$$

Une simple interversion de sommations montre que, sous les hypothèses faites, on a

$$\sum_{n \leqslant x} \varrho(n) = (1+o(1))\, x(\log y)^{-\gamma}. \tag{1.16}$$

Par (1.3) il s'ensuit que

$$\sum_{r=1}^{\infty} rH_r(x, y, z) = \big(1+o(1)\big)H(x, y, z).$$

Comme $H(x, y, z) = \sum_{r=1}^{\infty} H_r(x, y, z)$, cela implique bien le résultat annoncé.

Il est à noter que les estimations effectuées dans [9], pp. 250–253, permettent d'évaluer explicitement le terme reste de (1.3) en fonction de y et z et par conséquent fournissent également une majoration effective du reste de (1.11). Signalons à ce propos deux erreurs typographiques de [9]: la constante c apparaissant à la formule (4), p. 252, doit être remplacée par $2c$, et le signe $-$ figurant dans la majoration de S p. 253 doit être changé en $+$.

2. Notations et conventions. Nous rassemblons ici les principales notations et conventions qui sont utilisées systématiquement dans cet article.

Les lettres p et q sont exclusivement réservées pour désigner des nombres premiers. On note respectivement $\tau(n)$, $\omega(n)$, $\Omega(n)$ le nombre des diviseurs, des facteurs premiers distincts, et des facteurs premiers comptés avec multiplicité, d'un entier n. La suite ordonnée des facteurs premiers distincts est désignée par

$$p_1(n) < p_2(n) < \ldots < p_\omega(n).$$

On pose $P^-(n) = p_1(n)$, $P^+(n) = p_\omega(n)$ $(n > 1)$. Par convention, $P^-(1) = +\infty$, $P^+(1) = 1$.

Pour chaque entier n et chaque réel ξ, $\xi \geqslant 1$, on désigne par $n(\xi)$ le plus grand des diviseurs d de n tels que $P^+(d) \leqslant \xi$, soit

$$n(\xi) := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant \xi}} p^\nu.$$

On définit pour tout couple (y, z), $y \leqslant z$, les fonctions arithmétiques

$$\tau(n; y, z) = \sum_{\substack{d | n \\ y < d \leqslant z}} 1, \qquad \omega(n; y, z) = \sum_{\substack{p | n \\ y < p \leqslant z}} 1,$$

$$\Omega(n; y, z) = \sum_{\substack{p^\nu \| n \\ y < p \leqslant z}} \nu, \qquad \varepsilon(n; y, z) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \tau(n; y, z) \geqslant 1, \\ 0, & \text{si} \quad \tau(n; y, z) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions classiques de Möbius et d'Euler sont désignées respectivement par $\mu(n)$ et $\varphi(n)$. Pour toute fonction multiplicative $f(n)$, nous introduisons le produit canonique

$$\Pi(f, x) := \prod_{p \leqslant x} (1-p^{-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu) p^{-\nu} \qquad (x \geqslant 2),$$

lorsque cette expression a un sens.

Pour tous y, z, $z > y \geqslant 2$, nous désignons par $u = u(y, z)$ et $\gamma = \gamma(y, z)$ les réels implicitement définis par

$$z = y^{1+u} = y\big(1+(\log y)^{-\gamma}\big).$$

Enfin, la lettre c, avec ou sans indice, dénote une constante positive dépendant au plus du paramètre r.

3. Trois lemmes. Le résultat suivant est une conséquence du Theorem 1 de [6].

LEMME 1. *Soit f une fonction multiplicative réelle satisfaisant pour tout p à*

$$0 \leqslant f(p^\nu) \leqslant \lambda_1 \lambda_2^\nu \tag{3.1}$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes telles que $\lambda_1 > 0$, $0 < \lambda_2 < 2$. Alors on a

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \ll x\, \Pi(f, x).$$

Remarque. Ici comme dans la suite nous n'indiquons pas explicitement la dépendance en λ_1 et λ_2 des constantes impliquées par l'emploi du symbole de Vinogradov.

LEMME 2. *Dans les hypothèses du Lemme 1, on a pour tous réels ξ, ζ, tels que $2 \leqslant \xi \leqslant \zeta \leqslant x$*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n(\xi) \geqslant \zeta}} f(n) \ll x\, \Pi(f, x) \exp\left\{-\varkappa \frac{\log \zeta}{\log \xi}\right\}$$

où $\varkappa$ est une constante positive ne dépendant que de λ_2.

Démonstration. Soit α un paramètre positif. La quantité à majorer ne dépasse pas

$$\zeta^{-\alpha} \sum_{n \leqslant x} f_\alpha(n) \tag{3.2}$$

où f_α est la fonction multiplicative définie par $f_\alpha(n) = f(n)\big(n(\xi)\big)^\alpha$. On choisit $\alpha = \varkappa/\log \xi$, où $\varkappa$ est telle que $\lambda_2 e^\varkappa < 2$. Alors f_α satisfait aux hypothèses du Lemme 1. La quantité (3.2) est donc

$$\ll \zeta^{-\alpha} x\, \Pi(f_\alpha, x) = \zeta^{-\alpha} x\, \Pi(f, x) \prod_{p \leqslant \xi} \left(\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu) p^{(\alpha-1)\nu}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu) p^{-\nu}} \right).$$

Compte tenu des majorations de $f(p^\nu)$ pour $\nu \geqslant 2$, le dernier produit est

$$\ll \exp\left\{\sum_{p \leqslant \xi} \frac{f(p)}{p}(p^\alpha - 1)\right\} = \exp\left\{O_\varkappa\left(\sum_{p \leqslant \xi} \frac{f(p) \log p}{p \log(2\xi)}\right)\right\} \ll 1.$$

Cela achève la démonstration.

LEMME 3. *Soient x, y, z des nombres réels tels que*

$$8 \leqslant 2y \leqslant z \leqslant \min(y^{3/2}, x^{3/4}), \tag{3.3}$$

et soit f une fonction multiplicative satisfaisant (3.1). *On suppose de plus qu'il existe des réels α, $u \leqslant \alpha \leqslant 1+u$, et $v \geqslant 0$ tels que l'on ait pour tout $\nu \geqslant 1$*

$$f(p^\nu) = \begin{cases} 1, & si \quad z/y < p \leqslant y^\alpha, \\ v, & si \quad y^\alpha < p \leqslant z. \end{cases} \tag{3.4}$$

Alors on a uniformément pour $0 \leqslant v \leqslant v_0 < \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} f(n)\varepsilon(n; y, z) \ll x\Pi(f, x)(u/\alpha)^\delta \left(1+\alpha^{1-v}\log\left(1+\frac{\alpha}{u}\right)\right). \tag{3.5}$$

Démonstration. Nous employons essentiellement la méthode de [5], lemme 9. Nous profitons de l'occasion pour signaler que les deux majorations de H_3 p. 144 de [5] ont été malencontreusement interverties par l'imprimeur après la correction des épreuves.

Notons respectivement a, b, h, m un entier générique dont tous les facteurs premiers sont dans $[2, z/y]$, $(z/y, y^\alpha]$, $(y^\alpha, z]$, $(z, +\infty)$. Ainsi chaque entier se décompose canoniquement sous la forme

$$n = abhm,$$

et la condition (3.4) implique alors

$$f(n) = f(a)v^{\omega(h)}f(m).$$

Soit $\varkappa$ la constante apparaissant au Lemme 1. Posant

$$w = \log(1+\alpha/u),$$

nous répartissons les entiers $n \leqslant x$ en trois classes, définies par les conditions suivantes:

(classe 1) $\quad a > y^{wu/\varkappa}$,

(classe 2) $\quad \Omega(b) > w/\log 2$,

(classe 3) $\quad a \leqslant y^{wu/\varkappa} \quad$ et $\quad \Omega(b) \leqslant w/\log 2$.

Désignons par T_i la contribution des entiers de la classe i à la somme initiale $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. Par le Lemme 2, on a

$$T_1 \leqslant \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n(y^u) > y^{wu/\varkappa}}} f(n) \ll x(u/\alpha)\Pi(f, x).$$

Ensuite, on a pour tout t, $1 \leqslant t \leqslant 3/2$,

$$T_2 \leqslant \sum_{n \leqslant x} f(n)t^{\Omega(b)-w/\log 2} \ll x(u/\alpha)^{1-t+(\log t)/\log 2}\Pi(f, x),$$

d'après le Lemme 1 appliqué à la fonction $n \mapsto f(n)t^{\Omega(b)}$. Le choix optimal $t = 1/\log 2$ fournit la majoration

$$T_2 \ll x(u/\alpha)^\delta \Pi(f, x).$$

Il est à noter que nous avons utilisé ici de manière essentielle l'hypothèse (3.4), qui assure que les fonctions multiplicatives $f(n)$ et $t^{\Omega(b)}$ ont des "supports" disjoints, au sens où leurs facteurs d'indice p dans le produit canonique $\Pi(\cdot, x)$ ne sont jamais simultanément distincts de 1.

Si n est compté dans T_3, alors n possède un diviseur dans $(y, z]$, et ce diviseur est nécessairement de la forme $a'b'h'$, avec $a'|a$, $b'|b$, $h'|h$. Compte tenu de la majoration de a vérifiée par hypothèse, on a

$$y^{1-wu/\varkappa} < y/a' < b'h' \leqslant z = y^{1+u}.$$

On peut donc écrire, pour tout t, $0 < t \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} T_3 &\leqslant \sum_{n \leqslant x} f(n)t^{\Omega(b)-w/\log 2} \sum_{\substack{b'|b,\, h'|h \\ y^{1-wu/\varkappa} < b'h' \leqslant y^{1+u}}} 1 \\ &= \sum_{y^{1-wu/\varkappa} < b'h' \leqslant y^{1+u}} t^{\Omega(b')} \sum_{n \leqslant x/b'h'} f(nh')t^{\Omega(b)-w/\log 2}. \end{aligned}$$

La somme intérieure peut être estimée par le Lemme 2 de [4]. Elle est

$$\ll \frac{x}{b'h'} g(h') \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1-t-(\log t)/\log 2} \Pi\left(f, \frac{x}{b'h'}\right),$$

où g est une fonction fortement multiplicative telle que

$$g(p) = v\left(1+O\left(\frac{\log p}{p}\right)\right)$$

pour tout p.

En remarquant que $\Pi(f, x/n) \ll \Pi(f, x)$ uniformément pour $n \leqslant z \leqslant x^{3/4}$, il vient donc

$$T_3 \ll x\Pi(f, x)\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1-t-(\log t)/\log 2} \sum_{y^{1-wu/\varkappa} < n \leqslant y^{1+u}} \frac{\lambda(n)}{n}$$

où λ est la fonction multiplicative définie par

$$\lambda(n) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad a \neq 1, \\ t^{\Omega(b)}g(h), & \text{si} \quad a = 1. \end{cases}$$

Le Lemme 1 permet d'estimer facilement la fonction sommatoire de λ et une sommation d'Abel montre alors que la somme en n ci-dessus est

$O\left(w(u/\alpha)^{1-t}\alpha^{1-v}\right)$. En effectuant alors le choix optimal $t = 1/\log 4$, on obtient

$$T_3 \leqslant x\Pi(f, x)\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\delta} w\alpha^{1-v},$$

ce qui fournit la conclusion souhaitée.

4. Preuve du Théorème 1: majorations. Nous nous proposons d'établir ici le résultat suivant qui implique, compte tenu du Théorème 0, les majorations de $P_r(x, y, z)$ figurant aux points (iii) et (iv) du Théorème 1.

PROPOSITION 1. *Soit r un entier fixé $\geqslant 1$. On a uniformément pour tous x, y, z satisfaisant*

$$8 \leqslant 2y \leqslant z \leqslant x^{1/2} \tag{4.1}$$

la majoration

$$H_r(x, y, z) \ll_r x(\log y)^{1-\delta}\frac{(\log_2 z)^{2r+1}}{\log z}. \tag{4.2}$$

Remarque. Nous n'avons pas cherché à optimiser l'exposant de $\log_2 z$ apparaissant dans cette majoration.

Démonstration. Posons $s = 1+[(\log r)/\log 2]$, de sorte que $s \leqslant r$. Par un théorème classique de Landau le membre de droite de (4.2) majore le nombre des entiers $n \leqslant x$ tels que $\omega(n) \leqslant s$, et nous pouvons nous restreindre à ne considérer que les entiers n pour lesquels $\omega(n) > s$. Nous désignons alors par $k(n)$ le produit des s plus petits facteurs premiers de n et nous répartissons les entiers comptés dans $H_r(x, y, z)$ dans les trois classes définies par les conditions suivantes:

(classe 1) $\qquad k(n) > (z/y)^{1/6}$,

(classe 2) $\qquad \forall d|n,\ y < d \leqslant z \Rightarrow P^-(d) \leqslant k(n) \leqslant (z/y)^{1/6}$,

(classe 3) $\qquad k(n) \leqslant (z/y)^{1/6}$ et $\exists d|n,\ y < d \leqslant z,\ P^-(d) > k(n)$.

Notons H_{ri}, $1 \leqslant i \leqslant 3$, la contribution à $H_r(x, y, z)$ des entiers de la classe i.

Si n est compté dans H_{r1}, alors $P^+\left(k(n)\right) > (z/y)^{1/(6s)}$ et n possède moins de s facteurs premiers distincts dans $[2, (z/y)^{1/(6s)}]$ (cette condition étant vide si $(z/y)^{1/(6s)}$ n'excède pas le s-ième nombre premier).

Notant $f_1(n)$ la fonction multiplicative définie par

$$f_1(p^\nu) = \begin{cases} t, & \text{si } 2 \leqslant p \leqslant (z/y)^{1/(6s)}, \\ 1, & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

où t est un paramètre, $0 < t \leqslant 1$, on peut donc écrire

$$H_{r1} \leqslant t^{1-s}\sum_{n \leqslant x} f_1(n)\varepsilon(n; y, z).$$

La somme en n peut être majorée en appliquant le Lemme 3, avec $\alpha = 1+u$, si $z \leqslant y^{3/2}$, et le Lemme 1 si $z > y^{3/2}$ — en majorant trivialement, dans ce dernier cas, $\varepsilon(n; y, z)$ par 1. On obtient

$$H_{r1} \ll_s t^{1-s} x \min\left(u^\delta \log(2+1/u),\ 1\right)\left(\log(z/y)\right)^{t-1}.$$

En choisissant $t = 1/\log_2 z$, il vient

$$H_{r1} \ll_s x \min\left(u^\delta \log(2+1/u),\ 1\right)\frac{(\log_2 z)^{s-1}}{u\log y}.$$

En remarquant que $u \gg 1/\log y$, on voit que cette majoration est compatible avec (4.2).

Si n est compté dans H_{r2}, le diviseur

$$d^* := \min\{d:\ d|n,\ y < d \leqslant z\}$$

est tel que $P^-(d^*) \leqslant k(n)$. De plus, on a trivialement $d^*/P^-(d^*) \leqslant y$, d'où

$$y < d^* \leqslant yk(n).$$

On peut donc écrire

$$H_{r2} \leqslant \sum_{\substack{k \leqslant (z/y)^{1/6} \\ \omega(k)=s}} \mu(k)^2 \sum_{\substack{n \leqslant x \\ k(n)=k \\ \omega(n;y,z) \leqslant r}} \varepsilon(n; y, ky),$$

puisque les entiers de $H_r(x, y, z)$ satisfont nécessairement la condition $\omega(n; y, z) \leqslant r$. Maintenant, effectuons le changement de variables $n = km$ dans la sommation intérieure et remarquons d'une part que $\omega(m; ky, z) \leqslant \omega(n; y, z) \leqslant r$ et d'autre part que la condition $\varepsilon(n; y, ky) = 1$ implique $\varepsilon(m; y/k, ky) = 1$. On peut donc écrire pour tout t, $0 < t \leqslant 1$,

$$H_{r2} \leqslant t^{-r}\sum_{\substack{k \leqslant (z/y)^{1/6} \\ \omega(k)=s}} \mu(k)^2 \sum_{m \leqslant x/k} f_2(m; k)\varepsilon(m; y/k, ky)$$

où $f_2(m; k)$ est la fonction multiplicative de m définie par

$$f_2(p^\nu; k) = \begin{cases} 0, & \text{si } \quad p \leqslant P^+(k),\ p \nmid k, \\ t, & \text{si } \quad ky < p \leqslant z, \\ 1, & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Lorsque $k \leqslant y^{1/5}$, la somme intérieure peut être estimée par le Lemme 3, avec $\alpha = 1+u$, $v = 1$. La condition (3.4) devient en effet ici: $k^2 < p \leqslant ky \Rightarrow f(p^\nu) = 1$, qui est manifestement réalisée. Lorsque $k > y^{1/5}$, on majore simplement $\varepsilon(m; y/k, ky)$ par 1 et on fait appel au Lemme 1. On obtient ainsi que la somme intérieure en m est

$$\ll \frac{x}{\varphi(k)\log P^+(k)}\left(\frac{\log z}{\log(ky)}\right)^{t-1} \min\left(1, \left(\frac{\log k}{\log y}\right)^{\delta}\log_2 y\right).$$

En choisissant $t = 1/\log_2 z$ et en reportant dans la majoration initiale de H_{r2}, il vient

$$H_{r2} \ll_s x \frac{(\log_2 z)^{r+1}}{\log z} \Big\{ (\log y)^{1-\delta} \sum_{\substack{k \leqslant y \\ \omega(k) = s}} \frac{\mu(k)^2}{\varphi(k)} (\log k)^{1-\delta} + \sum_{\substack{y < k \leqslant z/y \\ \omega(k) = s}} \frac{\mu(k)^2}{\varphi(k)} \Big\}$$

où nous avons utilisé le fait que $\log P^+(k) \geqslant (1/s) \log k$. Il n'est pas difficile de montrer que les deux sommes en k ci-dessus sont respectivement $O_s(1)$ et $O_s(\log_2 z)^s$. Cela implique pour H_{r2} une majoration compatible avec (4.2).

Considérons un entier n compté dans H_{r3} et soit d l'un de ses diviseurs satisfaisant à $y < d \leqslant z$ et $P^-(d) > k(n)$. Alors les 2^s diviseurs de n de la forme $k'd$ avec $k'|k(n)$ sont dans l'intervalle $(d, k(n)d]$. Comme $2^s > r$, on a nécessairement $d > z/k(n)$. On peut donc écrire

$$H_{r3} \leqslant \sum_{\substack{k \leqslant (z/y)^{1/6} \\ \omega(k) = s}} \mu(k)^2 \sum_{\substack{n \leqslant x \\ k(n) = k \\ \omega(n; y, z) \leqslant r}} \varepsilon(n; z/k, z)$$

d'où l'on déduit comme précédemment, pour tout v, $0 < v \leqslant 1$,

$$H_{r3} \ll v^{-r} \sum_{\substack{k \leqslant (z/y)^{1/6} \\ \omega(k) = s}} \mu(k)^2 \sum_{m \leqslant x/k} f_3(m; k) \varepsilon(m; z/k^2, z) .$$

où $f_3(m; k)$ est la fonction multiplicative définie par

$$f_3(p^\nu; k) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad p \leqslant P^+(k),\ p \nmid k, \\ v, & \text{si} \quad k^2 y < p \leqslant z, \\ 1, & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

La somme intérieure relève du Lemme 3. La quantité jouant le rôle de (u/α) est ici $(2 \log k)/\log(k^2 y)$ et la majoration $k \leqslant (z/y)^{1/6}$ implique que la condition correspondant à (3.3) est réalisée. On obtient ainsi que la somme en m est

$$\ll \frac{x}{\varphi(k) \log k} \left(\frac{\log z}{\log(ky)} \right)^{v-1} \left(\frac{\log k}{\log(ky)} \right)^{\delta} \log_2 y.$$

En choisissant $v = 1/\log_2 z$, on obtient

$$H_{r3} \ll x \frac{(\log_2 z)^{r+1}}{\log z} \sum_{\substack{k \leqslant z/y \\ \omega(k) = s}} \frac{(\log k)^{\delta-1}}{\varphi(k)} (\log(ky))^{1-\delta}$$

$$\ll x \frac{(\log_2 z)^{2r+1}}{\log z} (\log y)^{1-\delta},$$

ce qui achève la démonstration de la Proposition 1.

5. Principe de la minoration de $H_r(x, y, z)$: diviseurs isolés. Notre méthode de minoration repose sur le concept suivant.

Définition. Soit n un nombre entier et η un réel positif. On dit qu'un diviseur d de n est *η-isolé* (ou *simplement isolé*) si l'on a

$$d'|n, \quad d' \neq d \ \Rightarrow\ |\log(d'/d)| > \eta.$$

On note $\mathscr{I}(n) = \mathscr{I}(n; \eta)$ l'ensemble des diviseurs η-isolés de n et l'on pose

$$I(n) = I(n; \eta) := \operatorname{card} \mathscr{I}(n; \eta).$$

Sous l'hypothèse

(5.1) $$y \geqslant 2, \quad y\left(1 + \frac{1}{\log y}\right) \leqslant z \leqslant \min(y^{3/2}, x^{1/(r+1)})$$

nous allons construire un ensemble d'entiers $n \leqslant x$ tels que

(5.2) $$\tau(n; y, z) = r.$$

Il s'agit de tous les entiers n'excédant pas x qui peuvent s'écrire sous la forme

(5.3) $$n = m q_1 \ldots q_r h$$

avec les conditions

(i) $m \leqslant y^{1/(r+3)}$,

(ii) $q_1 < q_2 < \ldots < q_r$,

(iii) $q_j \in \mathscr{P}(m) := \bigcup_{d \in \mathscr{I}(m; \log(z/y))} \left(\frac{y}{d}, \frac{z}{d} \right]$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$.

(iv) $P^-(h) > z$.

Il n'est pas difficile de vérifier que tous les entiers de ce type satisfont (5.2). D'une part, le point (iii) garantit pour chaque j, $1 \leqslant j \leqslant r$, l'existence d'un d_j, $d_j \in \mathscr{I}(m; \log(z/y))$, tel que

$$y < q_j d_j \leqslant z.$$

On a donc $\tau(n; y, z) \geqslant r$ (noter que $q_1 > y/m > m$). D'autre part, chaque diviseur t de n dans $(y, z]$ est nécessairement premier avec h, donc $t | m q_1 \ldots q_r$. Or, il existe au plus une valeur de j telle que $q_j | t$ car $q_j \geqslant q_1 > (y/m) \geqslant y^{(r+2)/(r+3)} \geqslant y^{3/4}$, donc les produits $q_i q_j$, $i \neq j$, dépassent tous $y^{3/2} \geqslant z$. Comme, de plus, $m < y$, il existe en fait exactement un j tel que $q_j | t$. On a donc $t = d q_j$ pour un certain diviseur d de m, d'où $|\log(d/d_j)| < \log(z/y)$. Comme d_j est $\log(z/y)$-isolé par hypothèse, on a nécessairement $d = d_j$. Cela implique bien $\tau(n; y, z) \leqslant r$.

La décomposition d'un entier sous la forme (5.3) est unique car les termes du produit ont leurs facteurs premiers dans des ensembles disjoints. On peut donc écrire

$$H_r(x, y, z) \geqslant \sum_{m \leqslant y^{1/(r+3)}} \sum_{\substack{q_1 < \ldots < q_r \\ \forall j, q_j \in \mathscr{P}(m)}} \sum_{\substack{h \leqslant x/(m q_1 \ldots q_r) \\ P^-(h) > z}} 1.$$

Dans la somme intérieure, on a

$$mq_1 \ldots q_r \leqslant y^{1/(r+3)} z^r \leqslant xz^{-3/4}$$

car $z^{r+1} \leqslant x$. D'après un résultat classique de la Théorie du Crible, il s'ensuit que la somme en h est $\gg x/(mq_1 \ldots q_r \log y)$. On peut alors estimer la somme r-uple en $q_1, \ldots, q_r$ en remarquant que $\mathscr{P}(m)$ est une réunion disjointe d'intervalles. On obtient le résultat suivant par une simple application du théorème des nombres premiers.

LEMME 4. *Sous l'hypothèse* (5.1), *on a*

$$H_r(x, y, z) \gg_r \frac{x}{\log y} u^r \sum_{m \leqslant y^{1/(r+3)}} \frac{I(m; u \log y)^r}{m}. \tag{5.4}$$

Il nous faut maintenant estimer la somme en m. La première étape consiste à établir une minoration générale pour le nombre des diviseurs isolés d'un entier.

LEMME 5. *Soit η un réel positif. Pour chaque entier n, posons*

$$\Delta(n; v) := \operatorname{card}\{d : d \mid n,\ v < \log d \leqslant v + 2\eta\} \qquad (v \in \boldsymbol{R}),$$

et

$$J(n) := \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n; v)\big(\Delta(n; v) - 1\big)\, dv.$$

Alors on a

$$I(n; \eta) \geqslant \tau(n) - J(n)/\eta. \tag{5.5}$$

Démonstration. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n; v)\, dv = 2\eta\tau(n)$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(n; v)^2\, dv = \sum_{d \mid n} \sum_{d' \mid n} \big(2\eta - |\log(d'/d)|\big)^+,$$

avec la convention usuelle $(v)^+ := \max(v, 0)$.

D'où

$$\begin{aligned}\tau(n) - J(n)/\eta &= (1/2\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n; v)\big(3 - 2\Delta(n; v)\big)\, dv \\ &= \sum_{d \mid n} \Big(3 - \sum_{d' \mid n} \big(2 - |\log(d'/d)|/\eta\big)^+\Big) \\ &\leqslant I(n; \eta).\end{aligned}$$

En effet, le terme d'indice d dans la sommation externe de dépasse pas 1 si d est η-isolé et est négatif ou nul dans le cas contraire.

COROLLAIRE. *Pour $r \geqslant 1$, on a*

$$I(n; \eta)^r \geqslant 2^{-r} \tau(n)^{r-1} \big(\tau(n) - 2J(n)/\eta\big). \tag{5.6}$$

Démonstration. L'inégalité est trivialement satisfaite si $J(n)/\eta > \tau(n)/2$. Dans le cas contraire on a par (5.5)

$$I(n; \eta)^r \geqslant \big(\tau(n)/2\big)^r \geqslant \big(\tau(n)/2\big)^{r-1} \big(\tau(n)/2 - J(n)/\eta\big).$$

ce qui est exactement la minoration annoncée.

Choisissons maintenant une fois pour toutes

$$\eta = \log(z/y) = u \log y$$

et posons pour tout $n \geqslant 1$

$$I_0(n) = I_0(n; y, z) := \tau(n) - 2J(n)/\eta.$$

En restreignant la sommation figurant au membre de droite de (5.4) aux seuls entiers m tels que $\omega(m) = K$, où K est un entier fixé, on obtient, grâce à (5.6), le résultat suivant

LEMME 6. *Sous l'hypothèse* (5.1), *on a pour tout entier $K \geqslant 1$*

$$H_r(x, y, z) \gg_r \frac{x}{\log y} 2^{(r-1)K} u^r \sum_{\substack{m \leqslant y^{1/(r+3)} \\ \omega(m) = K}} \frac{I_0(m)}{m}. \tag{5.7}$$

Nous consacrons la prochaine section à l'estimation de la somme en m figurant dans (5.7).

6. Le lemme fondamental. Nous allons développer dans cette section des calculs conduisant à une minoration de la moyenne logarithmique de la fonction $I_0(n)$. Les détails techniques étant assez complexes, il n'est pas inutile d'exposer d'abord notre motivation heuristique.

L'écart moyen entre deux diviseurs d'un entier n de taille y est $(\log y)/\tau(n)$. Si cet écart est sensiblement plus grand que η et si n possède une structure multiplicative "normale", la fonction $\Delta(n; v)$ définie au Lemme 5 vaudra souvent 0 ou 1. L'intégrale

$$J(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n, v)\big(\Delta(n, v) - 1\big)\, dv$$

sera donc petite, et, par conséquent, on obtiendra pour $I_0(n)$ une minoration optimale, i.e. de l'ordre de $\tau(n)$.

On a $\eta = u \log y$. L'inégalité $(\log y)/\tau(n) > \eta$ implique donc

$$\omega(n) < \log(1/u)/\log 2, \tag{6.1}$$

une première condition à imposer aux entiers n candidats à une bonne minoration. Cela dit, la présence de trop nombreux petits diviseurs constitue une obstruction au raisonnement probabiliste précédent. La répartition des

$\log d$, lorsque d parcourt les diviseurs de n, n'est en effet pas "normalement" uniforme. Le principe d'Erdős sur la croissance exponentielle itérée des facteurs premiers laisse prévoir que $n(z/y)$ est usuellement de taille proche de z/y, ce qui induit, si $\omega(n; 1, z/y)$ est grand, une forte concentration de diviseurs de n au voisinage de ceux d'entre eux qui divisent $n/n(z/y)$. Une telle situation implique l'existence de grandes valeurs de $\Delta(n; v)$ — ce que nous cherchons précisément à éviter. Nous éliminerons l'éventualité de ce phénomène en imposant une seconde condition:

$$P^-(n) > z/y. \tag{6.2}$$

La qualité de la minoration sera d'autant meilleure que l'on pourra choisir $\omega(n)$ proche de la borne supérieure de (6.1). Cela signifie que nous considérerons une suite d'entiers de densité nulle. Le caractère "normal" de leur structure multiplicative devra donc recevoir une acception relative. Nous obtiendrons finalement cette bonne répartition compatible avec (6.1) en choisissant des entiers de la forme $m/m(z/y)$ où m est tel que

$$\omega(m) \approx \max(\log(1/u), \log_2 y)/\log 2 \tag{6.3}$$

et est lui-même "normal" parmi les entiers satisfaisant (6.3), en un sens assez restrictif que nous préciserons ultérieurement.

Nous pouvons montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 3 (Lemme fondamental). *Soit r un entier $\geqslant 1$ fixé. Sous la condition*

$$y \geqslant y_0(r), \quad y(1+1/(\log y)) \leqslant z \leqslant y\exp\{\log y/L(\log y)^{c_{11}}\} \tag{6.4}$$

on a

$$\sum_{\substack{m \leqslant y^{1/(r+3)} \\ \omega(m)=K}} \frac{I_0(m)}{m} \geqslant M(y, z)\, L(\log y)^{-c_{12}} \tag{6.5}$$

où l'on a posé

$$K = K(y, z) = \left[\frac{\log(1/u)}{\log 2} - c_{11}\sqrt{\log_2 y \log_3 y}\right]$$

et

$$M(y, z) = \begin{cases} (\log y)^{2+\gamma-E(\gamma)} & si \quad z \leqslant 2y, \\ u^{\delta-2}, & si \quad z > 2y. \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$\lambda = (1+\max(\gamma, 0))/\log 2, \quad \varrho = 1-(c_{11}/2\lambda)\sqrt{\log_3 y/\log_2 y},$$
$$\xi = \xi(y, z) := [\varrho\lambda \log_2 y] - K(y, z).$$

Pour chaque entier n tel que $\omega(n) \geqslant K+\xi$, nous introduisons le produit partiel

$$n_k := \prod_{\xi < j \leqslant k+\xi} p_j(n) \quad (0 \leqslant k \leqslant K).$$

Un réel ε étant donné dans (0, 1), nous définissons la suite A_k des entiers n pour lesquels on a

$$(A_k) \quad \begin{cases} \mu(n)^2 = 1, \quad \omega(n) = k, \\ |\log_2 p_j(n) - (j+\xi)/\lambda| \leqslant (j+\xi)\theta_{j+\xi}/\lambda \ (1 \leqslant j \leqslant k), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\theta_j = \sqrt{2(1+\varepsilon)(\log j)/j} \quad (j \geqslant 1).$$

Nous minorerons la somme (6.5) la restreignant à A_K. Nous utiliserons à cette fin des séries de Dirichlet d'arguments réels portant sur la suite A des entiers n satisfaisant à

$$(A) \quad \begin{cases} \mu(n)^2 = 1, \quad \omega(n) \geqslant K+\xi, \\ n_k \in A_k \ (1 \leqslant k \leqslant K). \end{cases}$$

Le lemme suivant montre que le coefficient pondéral $\lambda^{\omega(n)}$ permet d'opérer un "recentrage" autour de la suite A.

LEMME 7. *On a uniformément pour $1 < \sigma \leqslant 1+1/\log y$, $\lambda = O(1)$, $0 < \varepsilon < c_{13}$,*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin A}}^{\infty} \mu(n)^2 \lambda^{\omega(n)} n^{-\sigma} \ll_\varepsilon \xi^{-\varepsilon}(\sigma-1)^{-\lambda}. \tag{6.6}$$

Démonstration. Désignons respectivement par V_1 et V_2 les contributions respectives au membre de gauche de (6.6) des n tels que $\omega(n) < K+\xi$ et des n tels que $\omega(n) \geqslant K+\xi$ et ($\exists k$, $1 \leqslant k \leqslant K$, $n_k \notin A_k$). On a

$$\begin{aligned} V_1 &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)^2 \lambda^{\omega(n)} \varrho^{\omega(n)-(K+\xi)} n^{-\sigma} \\ &\ll (\sigma-1)^{-\varrho\lambda}(\log y)^{-\lambda\varrho\log\varrho} \\ &\ll (\sigma-1)^{-\lambda}(\log y)^{-\lambda Q(\varrho)} \ll (\sigma-1)^{-\lambda}\xi^{-\varepsilon}, \end{aligned}$$

pour $\varepsilon < c_{13}$, puisque $\xi = O(\log_2 y)$.

Posons, pour $j \geqslant 1$, $T_j^{\pm} = \exp\exp\{j(1\pm\theta_j)/\lambda\}$ et $\omega_j^{\pm}(n) := \omega(n; 1, T_j^{\pm})$. Si n est compté dans V_2, alors il existe au moins un j, $\xi < j \leqslant K+\xi$, tel que $\omega_j^+(n) \leqslant j$ ou $\omega_j^-(n) \geqslant j$. Pour tous α_j, β_j tels que $0 < \alpha_j \leqslant 1 \leqslant \beta_j$, $\xi < j \leqslant K+\xi$, on a donc

$$V_2 \leqslant \sum_{j>\xi}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)^2 \lambda^{\omega(n)} \alpha_j^{\omega_j^+(n)-j} n^{-\sigma} + \sum_{j>\xi}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)^2 \lambda^{\omega(n)} \beta_j^{\omega_j^-(n)-j} n^{-\sigma}.$$

En choisissant $\alpha_j = (1+\theta_j)^{-1}$, $\beta_j = (1-\theta_j)^{-1}$, $\xi < j \leqslant K+\xi$, on obtient facilement que les termes d'indice j dans les sommes précédentes sont tous les deux $O\big((\sigma-1)^{-\lambda} j^{-1-\varepsilon}\big)$. Cela implique bien (6.6).

Reprenons la démonstration du Théorème 3. Nous allons majorer par récurrence sur k, $0 \leqslant k \leqslant K$, la quantité

$$S_k(\sigma) := \sum_{n\in A} \lambda^{\omega(n)} J(n_k) n^{-\sigma},$$

en remarquant que

$$S_0(\sigma) = 0. \tag{6.7}$$

Pour tout k, $0 \leqslant k < K$, et tout entier n de A, on peut écrire l'équation fonctionnelle

$$\Delta(n_{k+1};\, v) = \Delta(n_k;\, v) + \Delta\big(n_k;\, v - \log p_{k+\xi+1}(n)\big).$$

En reportant dans la définition de $J(n_{k+1})$, il vient

$$J(n_{k+1}) = 2J(n_k) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n_k;\, v)\, \Delta\big(n_k;\, v - \log p_{k+\xi+1}(n)\big)\, dv.$$

D'où

$$S_{k+1}(\sigma) = 2\big(S_k(\sigma) + R_k(\sigma)\big), \tag{6.8}$$

avec

$$R_k(\sigma) := \sum_{n\in A} \lambda^{\omega(n)} n^{-\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n_k;\, v)\, \Delta\big(n_k;\, v - \log p_{k+\xi+1}(n)\big)\, dv$$

$$\leqslant \lambda^{k+1} \sum_{m\in A_k} m^{-\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(m;\, v) \sum_{p > P^+(m)} \frac{\Delta(m;\, v-\log p)}{p^\sigma} {\sum}' \lambda^{\omega(h)} h^{-\sigma}\, dv$$

où l'apostrophe indique que la sommation est restreinte aux entiers h qui n'ont pas de facteur premier dans $[P^-(m),\, P^+(m)]$. Pour $\sigma \leqslant 1 + 1/\log y$, cette somme intérieure est $\ll (\sigma-1)^{-\lambda} \left(\dfrac{\log P^-(m)}{\log P^+(m)}\right)^{\lambda}$ et le théorème des nombres premiers montre que la somme en p ne dépasse pas

$$\sum_{d\mid m} \sum_{\substack{p > P^+(m) \\ v-\log d < \log p \leqslant v - \log d + 2\eta}} \frac{1}{p} \ll \frac{\eta\tau(m)}{\log P^+(m)}$$

$$\ll \eta 2^k \exp\{-\lambda^{-1}(k+\xi)(1-\theta_{k+\xi})\}$$

où, pour la première majoration, on a utilisé le fait que $\xi \gg \sqrt{\log_2 y \log_3 y}$.

En tenant compte de la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(m;\, v)\, dv = 2^{k+1}\eta$ $(m \in A_k)$, nous obtenons donc

$$R_k(\sigma) \ll \eta^2 (4\lambda)^k \exp\{-\lambda^{-1}(k+\xi)(1-\theta_{k+\xi})\} \times (\sigma-1)^{-\lambda} \sum_{m\in A_k} \left(\frac{\log P^-(m)}{\log P^+(m)}\right)^{\lambda} m^{-\sigma}. \tag{6.9}$$

A ce stade, on remarque que pour chaque $m \in A_k$, on a

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n_k = m}}^{\infty} \mu(n)^2 \lambda^{\omega(n)} n^{-\sigma} = \lambda^k m^{-\sigma} \prod_{p \notin [P^-(m),\, P^+(m)]} (1+\lambda p^{-\sigma})$$

$$\gg \lambda^k (\sigma-1)^{-\lambda} \left(\frac{\log P^-(m)}{\log P^+(m)}\right)^{\lambda} m^{-\sigma}$$

d'où en sommant sur $m \in A_k$

$$\lambda^k (\sigma-1)^{-\lambda} \sum_{m\in A_k} \left(\frac{\log P^-(m)}{\log P^+(m)}\right)^{\lambda} m^{-\sigma} \ll (\sigma-1)^{-\lambda}.$$

En reportant dans la majoration (6.9), il vient

$$R_k(\sigma) \ll \eta^2 4^k (\sigma-1)^{-\lambda} \exp\{-\lambda^{-1}(k+\xi)(1-\theta_{k+\xi})\}.$$

On en déduit par (6.8) que l'on a pour $0 \leqslant k < K$

$$2^{-k-1} S_{k+1}(\sigma) \leqslant 2^{-k} S_k(\sigma) + C\eta^2 (\sigma-1)^{-\lambda} 2^k \exp\{-\lambda^{-1}(k+\xi)(1-\theta_{k+\xi})\}$$

et finalement grâce à (6.7)

$$S_K(\sigma) \ll \eta^2 (\sigma-1)^{-\lambda} 2^{K-\xi} \sum_{\xi \leqslant j < K+\xi} \big(2\exp\{-\lambda^{-1}(1-\theta_j)\}\big)^j.$$

En remarquant que $2\exp\{-\lambda^{-1}\} = \exp\{\max(\gamma,\, 0)/\lambda\}$, il suit

$$S_K(\sigma) \ll \eta^2 (\sigma-1)^{-\lambda} 2^K \exp\{(K\max(\gamma,\, 0) - \xi)/\lambda\} L(\log y)^{c_{14}}$$

d'où l'on tire

$$S_K(\sigma) \ll \eta (\sigma-1)^{-\lambda} 2^K L(\log y)^{-c_{15}} \tag{6.10}$$

pour un choix convenable de c_{11}.

Maintenant, on peut donc écrire pour $1 < \sigma \leqslant 1 + 1/\log y$

$$\sum_{n\in A} \lambda^{\omega(n)} I_0(n_K) n^{-\sigma} = \sum_{n\in A} \lambda^{\omega(n)} \big(2^K - 2J(n_K)/\eta\big) n^{-\sigma}$$

$$= 2^K \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)^2 \lambda^{\omega(n)} n^{-\sigma} - \sum_{n\notin A} \mu(n)^2 \lambda^{\omega(n)} n^{-\sigma} - 2^{1-K} S_K(\sigma)/\eta\Big\}$$

$$\gg 2^K (\sigma-1)^{-\lambda} \big\{1 - O_\varepsilon(\xi^{-\varepsilon}) - O\big(L(\log y)^{-c_{15}}\big)\big\}$$

$$\gg 2^K (\sigma-1)^{-\lambda}.$$

Comme on a de plus

$$\sum_{n\in A} \lambda^{\omega(n)} I_0(n_K) n^{-\sigma}$$

$$\leqslant \sum_{m\in A_K} \frac{I_0(m)}{m} \lambda^K \prod_{p\notin[P^-(m),P^+(m)]} (1+\lambda p^{-\sigma})$$

$$\ll \sum_{m\in A_K} \frac{I_0(m)}{m} \lambda^K (\sigma-1)^{-\lambda} \exp\{-(K+\xi)(1-\theta_{K+\xi})+\xi(1+\theta_\xi)\}$$

$$\ll \sum_{m\in A_K} \frac{I_0(m)}{m} (\sigma-1)^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^K L(\log y)^{c_{16}},$$

on obtient finalement

$$\sum_{m\in A_K} \frac{I_0(m)}{m} \gg \left(\frac{2e}{\lambda}\right)^K L(\log y)^{-c_{16}}.$$

Il est facile de vérifier que $(2e/\lambda)^K \gg M(y, z) L(\log y)^{-c_{17}}$. En remarquant de plus que $A_K \subset [1, y^{1/(r+3)}]$ dès que c_{11} est assez grande en fonction de r, on voit que cela achève la démonstration du Théorème 3.

7. Fin de la démonstration du Théorème 1: minorations. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant, qui implique, par comparaison avec le Théorème 0 et son Complément, les minorations annoncées aux points (ii) à (iv) du Théorème 1. Pour simplifier l'écriture nous posons

$$z_2(y) = y\exp\{(\log y)/L(\log y)^{c_{11}}\}.$$

Proposition 2. (i) *On a uniformément pour* $y \geqslant y_0(r)$, $y(1+1/\log y) \leqslant z \leqslant \min(2y, x^{1/(r+1)})$

(7.1) $$H_r(x, y, z) \gg_r x(\log y)^{-E(y)} L(\log y)^{-c_{18}}.$$

(ii) *On a uniformément pour* $y \geqslant y_0(r)$, $2y \leqslant z \leqslant \min(z_2(y), x^{1/(r+1)})$

(7.2) $$H_r(x, y, z) \gg_r xu^{\delta-1}(\log y)^{-1} L(\log y)^{-c_{18}}.$$

(iii) *On a uniformément pour* $y \geqslant y_0(r)$, $z_2(y) \leqslant z \leqslant x^{1/2}$

(7.3) $$H_r(x, y, z) \gg_r x\frac{\log((\log z)/\log y)}{\log z}.$$

Remarque. La partition du domaine de variation des variables x, y, z n'est pas exactement ici celle qui apparaît au Théorème 1. Cela n'a aucune influence sur le résultat final car, à la valeur de l'exposant de $L(\log y)$ près, la minoration (7.3) fournit dans la région $z_2(y) \leqslant z \leqslant y^{3/2}$ la même estimation qu'une éventuelle extension de (7.2).

Démonstration. Les points (i) et (ii) découlent directement du Lemme 6 et du Théorème 3. Par (5.7) et (6.5) on a en effet

$$H_r(x, y, z) \gg_r \frac{x}{\log y} uL(\log y)^{-(r-1)c_{11}} M(y, z)$$

et la conclusion découle alors de l'estimation triviale

$$u \asymp (\log y)^{-1-\gamma} \quad (z \leqslant 2y).$$

La preuve de (7.3) est très simple. Il suffit de considérer les entiers $\leqslant x$ de la forme

$$n = 2^{r-1} pm$$

avec $y < p \leqslant 2^{1-r}z$, $P^-(m) > z$. Ces conditions impliquent bien $\tau(n; y, z) = r$, les diviseurs de n dans $(y, z]$ étant exactement les r diviseurs $2^j p$, $0 \leqslant j \leqslant r-1$. On peut donc écrire sous l'hypothèse indiquée

$$H_r(x, y, z) \geqslant \sum_{y<p\leqslant 2^{1-r}z} \sum_{\substack{m\leqslant x/p \\ P^-(m)>z}} 1 \gg \frac{x}{\log z} \sum_{y<p\leqslant 2^{1-r}z} \frac{1}{p}$$

$$\gg_r \frac{x}{\log z} \log((\log z)/\log y).$$

Il est à noter que nous n'avons pas cherché à déterminer le meilleur exposant de $\log((\log z)/\log y)$ dans (7.3). Lorsque $r = 2^s$ par exemple, une modification évidente du raisonnement précédent fournit

$$x(\log((\log z)/\log y))^s/\log z$$

à la place du résultat énoncé.

8. Preuve du Théorème 2. La borne supérieure ayant été établie dans [5], il reste à montrer la validité de la borne inférieure. Nous avons vu dans l'introduction que l'on a

$$g(2n) \geqslant I(n) = I(n; \log 2) \quad (n \geqslant 1).$$

De plus, pour $p > 2n$, on a trivialement

$$g(2np) = 2g(2n)$$

puisque la suite ordonnée des diviseurs de $2np$ est constituée de deux sous-suites adjacentes de même structure multiplicative. Nous pouvons donc écrire pour $x \geqslant 2^{20}$

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) \geqslant \sum_{m\leqslant x^{1/5}} \sum_{\sqrt{x}/2m<p\leqslant x/2m} g(2mp)$$

$$\geqslant \sum_{m\leqslant x^{1/5}} I(m) \sum_{\sqrt{x}/2m<p\leqslant x/2m} 1 \gg \frac{x}{\log x} \sum_{m\leqslant x^{1/5}} \frac{I(m)}{m}.$$

Le Théorème 3 appliqué avec $r=2$ et $z=2y$ fournit alors l'estimation

$$\sum_{m\leqslant x^{1/5}} \frac{I(m)}{m} \geqslant (\log x)^{2-\delta} L(\log x)^{-c_{12}}$$

ce qui implique directement le résultat souhaité.

Appendice. Nous nous proposons ici de prouver le Complément du Théorème 0. La minoration découle immédiatement du point (ii) de la Proposition 2 appliquée avec $r=1$ – le facteur à croissance lente en $\log y$ absorbe en effet, dans le domaine considéré, l'erreur commise en remplaçant $E(\gamma)$ par $E_1(\gamma)$. La méthode exposée dans [9] conduit d'ailleurs au même résultat.

Pour ce qui est de la majoration, la méthode de [9] fonctionne sans changement et fournit le résultat meilleur

$$H(x, y, z) \ll x(\log y)^{-E(\gamma)}(\log y)^{-1/2}$$

sous l'hypothèse supplémentaire que $\gamma(y, z) \leqslant \gamma_0 < \log 4-1$. La difficulté est ici d'obtenir une estimation uniforme au voisinage du point critique $\log 4-1$.

Nous distinguerons deux cas, selon que z est plus petit ou plus grand que $Z(y) := y\left(1+(\log y)^{1-\log 4}\right)$.

Si $z \leqslant Z(y)$, on obtient le résultat annoncé en majorant simplement $\varepsilon(n; y, z)$ par $\tau(n; y, z)$, soit

$$H(x, y, z) \leqslant \sum_{n\leqslant x} \tau(n; y, z) \leqslant x \sum_{y<d\leqslant z} (1/d) \ll x(\log y)^{-\gamma}.$$

Si $z > Z(y)$, on répartit les entiers $n \leqslant x$ tels que $\varepsilon(n; y, z) = 1$ en deux classes correspondant aux conditions $\Omega(n; 2, z) > \lambda\log_2 y$, $\Omega(n; 2, z) \leqslant \lambda\log_2 y$, avec $\lambda = (1+\gamma)/\log 2$. L'intérêt d'écarter les puissances de 2 dans $\Omega(n; 2, z)$ réside dans le fait que la majoration

$$\sum_{n\leqslant\xi} v^{\Omega(n;2,z)} \ll \xi(\log z)^{v-1}$$

est valable uniformément pour $0 \leqslant v \leqslant v_0 < 3$, $\xi \geqslant z$. Cela découle par exemple du Theorem 1 de [6].

Cela dit, désignons respectivement par H_1 et H_2 les contributions respectives à $H(x, y, z)$ des deux classes définies précédemment. On a pour tout v, $1 \leqslant v \leqslant 5/2$,

$$H_1 \leqslant \sum_{n\leqslant x} v^{\Omega(n;2,z)-\lambda\log_2 y} \ll x(\log y)^{v-1-\lambda\log v} \ll x(\log y)^{-E(\gamma)}$$

en choisissant $v = \lambda \leqslant 2$.

De plus, pour tout w, $0 \leqslant w \leqslant 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} H_2 &\leqslant \sum_{n\leqslant x} w^{\Omega(n;2,z)-\lambda\log_2 y} \sum_{\substack{d\mid n\\ y<d\leqslant z}} 1 \\ &\leqslant (\log y)^{-\lambda\log w} \sum_{y<d\leqslant z} w^{\Omega(d;2,z)} \sum_{n\leqslant x/d} w^{\Omega(n;2,z)} \\ &\ll x(\log y)^{w-1-\lambda\log w} \sum_{y<d\leqslant z} w^{\Omega(d;2,z)} d^{-1}. \end{aligned}$$

La somme intérieure peut être majorée en appliquant un théorème de Shiu [7]. Elle est

$$\ll \frac{z-y}{y}\,\frac{1}{\log z} \exp\left\{w \sum_{2<p\leqslant z} \frac{1}{p}\right\} \ll (\log y)^{w-1-\gamma}.$$

On obtient donc

$$H_2 \ll x(\log y)^{2w-2-\gamma-\lambda\log w} \ll x(\log y)^{-E(\gamma)}$$

en effectuant le choix optimal $w = \frac{1}{2}\lambda \leqslant 1$. Cela achève la démonstration.

Bibliographie

[1] A. S. Besicovitch, *On the density of certain sequences of integers*, Math. Ann. 110 (1934), p. 336–341.

[2] P. Erdős, *Note on the sequences of integers no one of which is divisible by any other*, J. London Math. Soc. 10 (1935), p. 126–128.

[3] P. Erdős et R. L. Graham, *Old and new problems and results in combinatorial number theory*, Monographie n° 28 de l'Enseignement Mathématique, Genève 1980.

[4] P. Erdős et G. Tenenbaum, *Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier*, Ann. Inst. Fourier 31 (1981), p. 17–37.

[5] – – *Sur les diviseurs consécutifs d'un entier*, Bull. Soc. Math. France 111 (1983), p. 125–145.

[6] H. Halberstam et H.-E. Richert, *On a result of R. R. Hall*, J. Number Theory 11 (1979), p. 76–89.

[7] P. Shiu, *A Brun–Titchmarsh Theorem for multiplicative functions*, J. Reine Angew. Math. 313 (1980), p. 161–170.

[8] G. Tenenbaum, *Sur les ensembles de multiples*, Colloque Hubert Delange, Publ. Math. Orsay 83.04 (1983), p. 143–146.

[9] – *Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné*, Compositio Math. 51 (1984), p. 243–263.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NANCY I
B. P. 239, F-54506 Vandœuvre Cedex

Reçu le 17.3.1986 (1605)