ACTA ARITHMETICA
XLIX (1987)

De nouveaux curieux produits infinis

par

J.-P. ALLOUCHE, H. COHEN, M. MENDÈS FRANCE (Talence)
et J. O. SHALLIT (Chicago, Ill.)

En l'honneur du 75e anniversaire de Paul Erdős

Introduction. Soit $s_q(n)$ la somme des chiffres de n en base q. En utilisant des techniques d'analyse réelle, J. O. Shallit a donné dans [6] une généralisation de la preuve de Woods et Robbins ([7], [5]) de l'égalité:

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{s_2(n)}} = 2^{-1/2},$$

à des produits plus généraux où intervient $s_q(n)$.

Dans [2], les deux premiers auteurs donnent une preuve différente utilisant des séries de Dirichlet comme

$$\sum\frac{(-1)^{s_2(n)}}{n^s} \quad \text{et} \quad \sum\frac{(-1)^{s_2(n)}}{(n+1)^s}.$$

Nous nous proposons ici de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit:*

$$F_q(x) = \sum_{n\geq 0} x^{s_q(n)} \log\frac{n+1}{q[n/q]+q},$$

où $s_q(n)$ est la somme des chiffres de n en base q, et $[x]$ la partie entière de x. Si $\sup(|x|^{q-1}, |1+x+\ldots+x^{q-1}|) < q$, alors quel que soit $j \geq 0$:

$$\frac{d^j}{dx_j}F(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{d^j}{dx^j}(x^{s_q(n)})\log\frac{n+1}{q[n/q]+q} = -\log q\cdot\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Si $\sup(|x|^{q-1}, |1+x+\ldots+x^{q-1}|) > q$, la série donnant F_q diverge.

Pour $q = 2$, on obtient par exemple

$$\prod_0^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{s_2(n)}} = 2^{-1/2}, \quad \prod_0^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{-(3/2)^{s_2(n)}} = 2^{-2/5},$$

$$\prod_0^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{s_2(n)(-1)^{s_2(n)}} = 2^{1/4}.$$

Dans la dernière partie, nous étudierons des produits infinis où apparaît un autre exposant: la suite de Rudin Shapiro (voir III).

I. La fonction F_q dans la région $|x| < 1$.

1. Lemme. *Pour tout entier $a \geqslant 0$, on a:*

$$\sum_{s_q(k)=a} \log \frac{k+1}{q[k/q]+q} = -\log q.$$

Nous allons montrer ce résultat en prouvant que la somme du premier membre est indépendante de a: il est clair que la somme vaut $-\log q$ pour $a = 0$. Pour cela, en écrivant tout entier k non nul sous la forme:

$$k = q^i(qj+r), \quad \text{avec} \quad j \geqslant 0,\ 1 \leqslant r \leqslant q-1.$$

on a:

$$s_q(k) = a \quad \text{si et seulement si } s_q(j) = a-r,$$

d'où les égalités (a priori dans $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$)

$$\sum_{s_q(k)=a} \log\left(\frac{k+1}{q[k/q]+q}\right) = \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \sum_{i=0}^{+\infty} \log\left(\frac{q^i(qj+r)+1}{q[q^i(qj+r)/q]+q}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \log\left(\frac{qj+r+1}{qj+q}\right) + \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \sum_{i=1}^{+\infty} \log\left(\frac{q^i(qj+r)+1}{q^i(qj+r)+q}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \log\left(\frac{qj+r+1}{qj+q}\right) + \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \log \frac{q^i(qj+r)+1}{q(q^{i-1}(qj+r)+1)}$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \left(\log\left(\frac{qj+r+1}{qj+q}\right) + \log\left(\frac{qj+r}{qj+r+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \log\left(\frac{qj+r}{qj+q}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q} \sum_{\substack{j \\ s_q(j)=a-r}} \log\left(\frac{qj+r}{qj+q}\right).$$

Par ailleurs, toujours a priori dans $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$, on a:

$$\sum_{s_q(k)=a-1} \log\left(\frac{k+1}{q[k/q]+q}\right) = \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\substack{u \\ s_q(qu+t)=a-1}} \log\left(\frac{qu+t+1}{qu+q}\right)$$

$$= \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{\substack{u \\ s_q(u)=a-t-1}} \log\left(\frac{qu+t+1}{qu+q}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{q} \sum_{\substack{u \\ s_q(u)=a-r}} \log\left(\frac{qu+r}{qu+q}\right).$$

Ceci montre donc que les sommes $\sum_{s_q(k)=a} \log\left(\frac{k+1}{q[k/q]+q}\right)$ ne dépendent pas de a: elles sont donc toutes finies et égales à

$$\sum_{s_q(k)=0} \log\left(\frac{k+1}{q[k/q]+q}\right) = -\log q.$$

2. Proposition. *Pour $|x| < 1$, on a:*

$$\sum_{n\geqslant 0} x^{s_q(n)} \log\left(\frac{n+1}{q[n/q]+q}\right) = \frac{-\log q}{1-x}.$$

Les nombres $\log \frac{k+1}{q[k/q]+q}$ sont tous négatifs et la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ absolument convergente pour $|x| < 1$. On a donc:

$$(-\log q) \sum_{n\geqslant 0} x^n = \sum_{n\geqslant 0} x^n(-\log q)$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} x^n \sum_{s_q(k)=n} \log\left(\frac{k+1}{q[k/q]+q}\right)$$

$$= \sum_{k\geqslant 0} x^{s_q(k)} \log\left(\frac{k+1}{q[k/q]+q}\right).$$

II. Un plus grand domaine de convergence pour F_q. Nous allons prouver d'abord la proposition suivante:

1. Proposition. *Soit A un nombre réel tel que $1 < A < q$ et soit D la région*:

$$D = \{x\colon\ \sup(|x|^{q-1}, |1+x+\ldots+x^{q-1}|) \leqslant A\}.$$

Alors la série

$$\sum_{n\geqslant 0} x^{s_q(n)} \log \frac{n+1}{q[n/q]+q}$$

est uniformément convergente sur D. Sa somme $F_q(x)$ est donc analytique dans D, égale à $-\log q/(1-x)$ par prolongement analytique, et pour tout j on a:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{d^j}{dx^j}(x^{s_q(n)})\log\left(\frac{n+1}{q[n/q]+q}\right)=(-\log q)\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

La démonstration repose sur le lemme suivant:

2. Lemme. *Soit:*

$$S_q(N,x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant N-1}x^{s_q(n)}.$$

Si $\sup(|x|^{q-1},\ |1+x+\ldots+x^{q-1}|)\leqslant A$, *avec* $A>1$, *alors:*

$$|S_q(N,x)|\leqslant C'\log N\cdot N^{\log A/\log q}.$$

En effet, calculons d'abord $S_q(aq^N,x)$ avec $0\leqslant a\leqslant q-1$:

$$\begin{aligned}S_q(aq^N,x)&=\sum_{0\leqslant n\leqslant aq^N-1}x^{s_q(n)}=\sum_{j=0}^{q-1}\ \sum_{0\leqslant m\leqslant aq^{N-1}-1}x^{s_q(qm+j)}\\&=\sum_{j=0}^{q-1}x^j\sum_{0\leqslant m\leqslant aq^{N-1}-1}x^{s_q(m)}\\&=\Big(\sum_{j=0}^{q-1}x^j\Big)S_q(aq^{N-1},x)\end{aligned}$$

d'où, en itérant:

$$S_q(aq^N,x)=\Big(\sum_{j=0}^{q-1}x^j\Big)^N S_q(a,x).$$

Supposons maintenant que l'entier N s'écrive:

$$N=a_0+a_1q+a_2q^2+\ldots+a_kq^k$$

avec $0\leqslant a_i\leqslant q-1$, $a_k\neq 0$. Alors

$$S_q(N,x)=\Sigma_0+\Sigma_1+\ldots+\Sigma_k$$

où:

$$\Sigma_j=\sum_{n\in I_j}x^{s_q(n)}$$

et I_j est l'intervalle:

$$I_j=[a_kq^k+a_{k-1}q^{k-1}+\ldots+a_{k-j+1}q^{k-j+1},\quad a_kq^k+a_{k-1}q^{k-1}+\ldots+a_{k-j}q^{k-j}-1].$$

On a donc:

$$\Sigma_j=\sum_{0\leqslant n\leqslant a_{k-j}q^{k-j}-1}x^{s_q(a_kq^k+a_{k-1}q^{k-1}+\ldots+a_{k-j+1}q^{k-j+1}+n)},$$

et comme $n\leqslant a_{k-j}q^{k-j}-1\leqslant q^{k-j+1}-1$, on a:

$$\begin{aligned}\Sigma_j&=(x^{a_k+a_{k-1}+\ldots+a_{k-j+1}})\sum_{0\leqslant n\leqslant a_{k-j}q^{k-j}-1}x^{s_q(n)}\\&=(x^{a_k+a_{k-1}+\ldots+a_{k-j+1}})S_q(a_{k-j}q^{k-j},x)\\&=(x^{a_k+a_{k-1}+\ldots+a_{k-j+1}})\Big(\sum_{t=0}^{q-1}x^t\Big)^{k-j}S_q(a_{k-j},x)\end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'inégalité

$$\sup(|x|^{q-1},\ |1+x+\ldots+x^{q-1}|)\leqslant A,\qquad\text{avec } A>1:$$

$$|\Sigma_j|\leqslant(A^{1/(q-1)})^{j(q-1)}A^{k-j}(A^{1/(q-1)})^{q-2}\cdot(q-1)$$

d'où:

$$|\Sigma_j|\leqslant CA^k.$$

Par conséquent:

$$|S_q(N,x)|\leqslant|\Sigma_0|+|\Sigma_1|+\ldots+|\Sigma_k|\leqslant C(k+1)A^k.$$

Comme $N\geqslant a_kq^k\geqslant q^k$, on a $k\leqslant\dfrac{\log N}{\log q}$, d'où finalement:

$$|S_q(N,x)|\leqslant C'\log N\cdot N^{\log A/\log q}.$$

3. Preuve de la proposition. Pour $n\equiv q-1 \pmod q$, on a

$$x^{s_q(n)}\log\left(\frac{n+1}{q[n/q]+q}\right)=0;$$

pour les autres valeurs de n modulo q, on a:

$$x^{s_q(n)}\log\left(\frac{n+1}{q[n/q]+q}\right)=\frac{x^{s_q(n)}}{n}\left(q-1-q\left\{\frac{n}{q}\right\}\right)+x^{s_q(n)}O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mais, si $|x|^{q-1}\leqslant A$, on a:

$$|x^{s_q(n)}|\leqslant(A^{1/q-1})^{s_q(n)}\leqslant(A^{1/q-1})^{(q-1)((\log n/\log q)+1)}=A^{1+(\log n/\log q)},$$

(si $q^a\leqslant n\leqslant q^{a+1}-1$, on a $s_q(n)\leqslant(q-1)(a+1)\leqslant(q-1)\left(1+\dfrac{\log n}{\log q}\right)$).

Par conséquent

$$\left|\frac{x^{s_q(n)}}{n^2}\right|\leqslant Cn^{-2+\log A/\log q},$$

et la série $\sum n^{-2+\log A/\log q}$ converge pour $A<q$.

Il suffit donc de prouver que la série $\sum\dfrac{x^{s_q(n)}}{n}$ converge uniformément dans D: en utilisant la transformation d'Abel, on a:

$$\sum_{M\leqslant n\leqslant N}\frac{x^{s_q(n)}}{n}=\sum_{M\leqslant n\leqslant N}\big(S_q(n+1,x)-S_q(n,x)\big)\frac{1}{n}$$

$$=-\frac{1}{M}S_q(M,x)+\sum_{M+1\leqslant n\leqslant N}S_q(n,x)\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{N}S_q(N+1,x).$$

Pour $A<q$, la majoration donnée dans le lemme ci-dessus permet d'affirmer que les quantités ci-dessus tendent vers 0 uniformément pour x dans la région D, lorsque M et N tendent vers $+\infty$, ce qui achève la preuve de la proposition.

4. Fin de la preuve du théorème annoncé dans l'introduction. Pour terminer la démonstration de ce théorème, il reste à établir la divergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}x^{s_q(n)}\log\frac{n+1}{q[n/q]+q}\quad\text{lorsque}\quad \sup(|x|^{q-1},|1+x+\ldots+x^{q-1}|)>q.$$

– Une première étape, facile, consiste à remarquer que le terme général de cette série ne tend pas vers 0 lorsque

$$|x|\geqslant q^{1/(q-1)}:$$

en effet, dans ce cas et si $n=q^N-q=(q-1)(q+q^2+\ldots+q^{N-1})$, on a

$$s_q(n)=(q-1)(N-1),$$

d'où:

$$\left|x^{s_q(n)}\log\frac{n+1}{q[n/q]+q}\right|=|x|^{(q-1)(N-1)}\left|\log\left(\frac{q^N-q+1}{q^N}\right)\right|$$

$$\sim|x|^{(q-1)(N-1)}\frac{q-1}{q^N}$$

et cette dernière quantité est supérieure à $q^{N-1}\dfrac{(q-1)}{q^N}$ qui tend vers $\dfrac{q-1}{q}$.

– Dans une deuxième étape, nous supposons donc:

$$|x|<q^{1/(q-1)}\quad\text{et}\quad|1+x+\ldots+x^{q-1}|>q.$$

Choisissons alors un réel a tel que:

$$1<\frac{1}{2}\left(\frac{\log|1+x+\ldots+x^{q-1}|}{\log q}+1\right)<a<\frac{\log|1+x+\ldots+x^{q-1}|}{\log q}.$$

Nous allons montrer que la quantité

$$B(N)=\sum_{q^{[aN]}+1\leqslant n\leqslant q^{[aN]}+q^N-1}\frac{x^{s_q(n)}}{n},$$

ne tend pas vers zéro; ceci impliquera donc que la série $\sum x^{s_q(n)}/n$ diverge, et donc que la série donnant F_q diverge puisque d'après la preuve de la proposition au 3 ci-dessus ces deux séries ont même nature pour $|x|^{q-1}<q$.

Comme le réel a a été choisi supérieur à 1, on a:

$$\forall N\in N\quad aN\geqslant N,\quad\text{d'où}\quad[aN]\geqslant N$$

d'où:

$$B(N)=\sum_{1\leqslant n\leqslant q^N-1}\frac{x^{s_q(q^{[aN]}+n)}}{n+q^{[aN]}}=x\sum_{1\leqslant n\leqslant q^N-1}\frac{x^{s_q(n)}}{n+q^{[aN]}}$$

$$=x\sum_{1\leqslant n\leqslant q^N-1}\frac{S_q(n+1,x)-S_q(n,x)}{q^{[aN]}+n}$$

$$=x\sum_{2\leqslant n\leqslant q^N-1}S_q(n,x)\left(\frac{1}{n-1+q^{[aN]}}-\frac{1}{n+q^{[aN]}}\right)$$

$$+\frac{xS_q(q^N,x)}{q^{[aN]}+q^N-1}-x\frac{S_q(1,x)}{1+q^{[aN]}}.$$

Le troisième terme tend vers zéro, le second est en module de l'ordre de

$$\frac{|x|}{q^{aN}}|1+x+\ldots+x^{q-1}|^N,$$

quantité qui tend vers $+\infty$.

Il suffit donc de montrer que le premier terme T tend vers zéro. Pour cela on écrit:

$$|T|=\left|\sum_{2\leqslant n\leqslant q^N-1}S_q(n,x)\left(\frac{1}{n-1+q^{[aN]}}-\frac{1}{n+q^{[aN]}}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{C}{q^{2aN}}\sum_{2\leqslant n\leqslant q^N-1}|S_q(n,x)|.$$

On majore alors $S_q(n,x)$ comme dans le lemme ci-dessus, avec

$$A=A_x=\sup(1,|x|^{q-1},|1+x+\ldots+x^{q-1}|)=|1+x+\ldots+x^{q-1}|,$$

soit:

$$|S_q(n,x)|\leqslant C'\log n\cdot n^{\log A_x/\log q}\leqslant C'\log q^N\cdot(q^N)^{\log A_x/\log q}.$$

D'où:

$$|T|\leqslant\frac{C''}{q^{2aN}}q^N NA_x^N=C''N\left(\frac{A_x}{q^{2a-1}}\right)^N$$

et cette dernière quantité tend vers 0, d'après le choix de a.

Remarque. Ce qui précède ne donne pas la nature de la série F_q sur la frontière d'équation:

$$\sup(|x|^{q-1}, |1+x+\ldots+x^{q-1}|) = q.$$

La première étape du 4 ci-dessus montre seulement qu'il y a divergence sur le morceau de frontière d'équations

$$|x|^{q-1} = q \quad \text{et} \quad |1+x+\ldots+x^{q-1}| \leqslant q.$$

III. Une généralisation du théorème. Le théorème précédent, dans le cas où q vaut 2, permet de calculer des produits infinis liés à la suite de Thue–Morse $s_2(n)$ (voir [4] par exemple). Un autre exemple de suite étudiée dans [4] dans un cadre différent est la suite de Rudin–Shapiro qu'on peut définir ainsi:

si $n = \sum_0^{+\infty} e_q 2^q$, $e_q = 0$ ou 1, alors:

$$u(n) = \sum_0^{+\infty} e_q e_{q+1}.$$

En d'autres termes $u(n)$ compte le nombre de 11 dans le développement de n en base 2.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour x complexe vérifiant $|x| \leqslant 1$ et $x \neq 1$, on a:*

$$\sum_{n \geqslant 0} x^{u(n)} \log \frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)} = \frac{-\log 2}{1-x}.$$

Pour $x = -1$ on obtient

$$\prod_0^{\infty} \left(\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)}\right)^{(-1)^{u(n)}} = 2^{-1/2}.$$

La démonstration commence par un lemme analogue à celui établi au début du premier paragraphe pour la suite $(s(n))$:

1. LEMME. *Pour tout entier k positif ou nul, on a:*

$$\sum_{u(n)=k} \log \frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)} = -\log 2.$$

Nous commençons par montrer que, quel que soit k:

$$\sum_{u(n)=k} (1/n) < +\infty.$$

En effet, soit $N \geqslant 0$ et soit l l'entier défini par

$$4^{l-1} \leqslant N \leqslant 4^l - 1 \qquad (\text{d'où } l \leqslant (\log N/\log 4)+1),$$

alors:

$$\sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant N \\ u(n)=k}} 1 \leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant 4^l-1 \\ u(n)=k}} 1 \leqslant \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant 4^l-1 \\ n \in S}} 1$$

où S est l'ensemble des entiers qui comprennent au plus k fois le chiffre 3 en base 4.

Cette dernière somme vaut:

$$\sum_{j \leqslant k} C_l^j (4-1)^{l-j} \leqslant \sum_{j \leqslant k} \frac{l^j}{j!} (4-1)^{l-j} \leqslant (k+1) l^k (4-1)^l.$$

d'où:

$$\sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant N \\ u(n)=k}} 1 \leqslant C_k (\log N)^k N^{\log 3/\log 4}.$$

On pose alors

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(n) = k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$S(n) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} a(j) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ u(j)=k}} 1.$$

On a alors:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant N \\ u(n)=k}} \frac{1}{n} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{a(n)}{n} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{S(n)-S(n-1)}{n}$$

$$= -S(0) + \frac{S(N)}{N} + \sum_{1 \leqslant n \leqslant N-1} \frac{S(n)}{n(n+1)}$$

qui tend vers une limite finie d'après la majoration donnée plus haut pour $S(n)$.

Nous pouvons alors prouver le lemme: on commence par poser

$$A(k) = \sum_{u(n)=k} \log \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Dans cette somme, et si n n'est pas nul, on écrit $n = 2^j m$, avec m impair et $j \geqslant 0$, d'où:

$$A(k) = E_k + \sum_{m \text{ impair}} \sum_{\substack{j \geqslant 0 \\ u(2^j m)=k}} \log \frac{2^{j+1} m+1}{2^{j+1} m+2}$$

où E_k vaut 0 pour $k > 0$ et $-\log 2$ pour $k = 0$, c'est-à-dire:

$$A(k) = E_k + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ u(m)=k}} \sum_{j \geqslant 0} \log \frac{2^{j+1} m+1}{2(2^j m+1)}, \qquad \text{car} \quad u(2m) = u(m);$$

la série en j se calcule par "télescopage de termes", d'où:

$$A(k) = E_k + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ u(m)=k}} \log\frac{m}{m+1} = E_k + \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k}} \log\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Ceci montre la convergence de la série

$$B(k) = \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k}} \log\frac{2n+1}{2n+2},$$

et l'égalité

$$A(k) = E_k + B(k).$$

Par ailleurs, en séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a:

$$\forall k \geqslant 0, \quad \sum_{u(n)=k} \log\frac{2n+1}{2n+2} = \sum_{u(n)=k} \log\frac{4n+1}{4n+2} + \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k}} \log\frac{4n+3}{4n+4},$$

$$\forall k \geqslant 1, \quad \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k}} \log\frac{2n+1}{2n+2} = \sum_{u(n)=k} \log\frac{4n+1}{4n+2} + \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k-1}} \log\frac{4n+3}{4n+4}$$

(on a utilisé les relations $u(4n+1) = u(n)$ et $u(4n+3) = 1+u(2n+1)$) d'où, par différence:

$$\forall k \geqslant 1, \quad 0 = A(k) - B(k) = \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k}} \log\frac{4n+3}{4n+4} - \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k-1}} \log\frac{4n+3}{4n+4}.$$

En appelant alors E la valeur commune des sommes $\displaystyle\sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=k}} \log\frac{4n+3}{4n+4}$, on a:

$$\forall k \geqslant 0, \quad \sum_{u(n)=k} \log\frac{2n+1}{2n+2} = \sum_{u(n)=k} \log\frac{4n+1}{4n+2} + E$$

d'où

$$\sum_{u(n)=k} \log\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)} = E.$$

Il reste enfin à calculer E, ce qui peut se faire de la façon suivante:

$$A(0) = \sum_{u(n)=0} \log\frac{2n+1}{2n+2} = \sum_{u(n)=0} \log\frac{4n+1}{4n+2} + E,$$

$$B(0) = \sum_{\substack{n \\ u(2n+1)=0}} \log\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Mais si $u(2n+1)$ est nul, n est nécessairement pair (rappelons que $u(4n+3) = 1+u(2n+1)$), d'où:

$$B(0) = \sum_{\substack{m \\ u(m)=0}} \log\frac{4m+1}{4m+2}$$

d'où, par différence:

$$-\log 2 = A(0) - B(0) = E.$$

2. Proposition. *Pour* $|x| < 1$, *on a*:

$$\sum_{n \geqslant 0} x^{u(n)} \log\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)} = \frac{-\log 2}{1-x}.$$

En effet, pour $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ est absolument convergente et les quantités $\log\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)}$ sont toutes négatives, d'où:

$$-(\log 2) \sum_{k \geqslant 0} x^k = \sum_{k \geqslant 0} x^k(-\log 2)$$
$$= \sum_{k \geqslant 0} x^k \sum_{u(n)=k} \log\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)}$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} x^{u(n)} \log\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)}.$$

3. Fin de la preuve du théorème 2. Pour terminer la démonstration du théorème 2 il suffit de montrer que la série

$$\sum_{n \geqslant 0} x^{u(n)} \log\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)}$$

converge uniformément sur chacun des rayons du cercle unité (à l'exception du rayon réel positif):

$$x = re^{2i\pi\theta}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad \theta \text{ fixé non entier}.$$

Comme on a:

$$\log\frac{(2n+1)^2}{(n+1)(4n+1)} = -\frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

il suffit de montrer la convergence uniforme sur les rayons de la série $\sum_{n \geqslant 1} x^{u(n)}/n$. Pour cela on pose $\sum_{0 \leqslant n \leqslant N} x^{u(n)} = T(N)$, d'où:

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{x^{u(n)}}{n} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{T(n)-T(n-1)}{n} = \frac{T(N)}{N} + \sum_{1 \leqslant n \leqslant N-1} \frac{T(n)}{n(n+1)} - 1.$$

Il suffit donc de prouver que sur un rayon non réel positif du cercle unité, on a uniformément

$$T(n) = O(n^\alpha) \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Pour cela on reprend la méthode utilisée dans [3] (p. 34) dans le cas où x est de module 1.

Ici on note

$$p_N = \sum_{0 \leqslant n \leqslant 2^N - 1} x^{u(n)}, \quad q_N = \sum_{0 \leqslant n \leqslant 2^N - 1} x^{u(2n+1)},$$

d'où:

$$\begin{bmatrix} p_N \\ q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{N-1} \\ q_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}.$$

La norme L^2 de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ se majore facilement: si

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

alors:

$$\begin{aligned} |a'|^2 + |b'|^2 &= (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) + (a+bx)(\bar{a}+\bar{b}\bar{x}) \\ &= 2|a|^2 + (1+|x|^2)|b|^2 + a\bar{b}(1+\bar{x}) + \bar{a}b(1+x). \end{aligned}$$

D'où, pour $x = re^{2i\pi\theta}$ avec $0 \leqslant r \leqslant 1$, et en majorant $|a\bar{b}|$ par $\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$:

$$|a'|^2 + |b'|^2 \leqslant (2+|1+x|)(|a|^2+|b|^2) = \left(2+\sqrt{r^2+2r\cos 2\pi\theta+1}\right)(|a|^2+|b|^2).$$

On remarque alors que pour r dans l'intervalle $[0, 1]$, on a:

$$2+\sqrt{r^2+2r\cos 2\pi\theta+1} \leqslant 2+\left(\sup(1,\ 2+2\cos 2\pi\theta)\right)^{1/2}$$

(étudier suivant le signe de $\cos 2\pi\theta$ les variations de la fonction $r \to r^2 + 2r\cos 2\pi\theta + 1$), donc la norme L^2 de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ est majorée par:

$$\beta = \left(2+\left(\sup(1,\ 4\cos^2 \pi\theta)\right)^{1/2}\right)^{1/2} = \left[\sup(3,\ 2(1+|\cos \pi\theta|))\right]^{1/2}$$

et pour θ non entier, on a $0 < \beta < 2$.

On en déduit comme dans [3] que

$$|p_N| < C\, 2^{\alpha N}, \quad \text{avec} \quad \alpha = (\log \beta)/(\log 2),$$

et on étend comme dans [3] à l'inégalité:

$$\Big|\sum_{0 \leqslant n \leqslant N} x^{u(n)}\Big| = O(N^\alpha),$$

ce qui achève la démonstration.

Remarques. Le domaine de convergence de la série donnée ci-dessus est vraisemblablement plus gros que le disque $|x| \leqslant 1$ privé du point 1.

Nous reviendrons dans [1] sur des séries analogues où l'exposant de x n'est plus $s(n)$ ou $u(n)$ mais plus généralement le nombre d'apparitions d'un bloc de 0 et de 1 dans le développement binaire de n.

Références

[1] J.-P. Allouche and J. O. Shallit, *Infinite products associated with counting blocks in binary strings*, en préparation.

[2] J.-P. Allouche and H. Cohen, *Dirichlet series and curious infinite products*, Bull. London Math. Soc. 17 (1985), p. 531–538.

[3] J.-P. Allouche and M. Mendès France, *On an extremal propriety of the Rudin–Shapiro sequence*, Mathematika 32 (1985), p. 33–38.

[4] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), p. 401–419.

[5] D. Robbins, *Solution to problem* E 2692, Amer. Math. Monthly 86 (1979), p. 394–395.

[6] J. O. Shallit, *On infinite products associated with sums of digits*, J. Number Theory 21 (1985), p. 128–134.

[7] D. R. Woods, *Elementary problem proposal*, E 2692, Amer. Math. Monthly 85 (1978), p. 48.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U.A. 226
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex
France

Adresse actuelle du quatrième auteur:
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
UNIVERSITY OF CHICAGO
1100 E. 58th St.
Chicago, Ill. 60637
Etats-Unis

Reçu le 18.2.1986 (1592)