Conspectus materiae tomi XLIX, fasciculi 2

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange	Address of the Editorial Board and of the exchange	Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches	Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-07697-6 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ACTA ARITHMETICA
XLIX (1987)

05

Über die geometrische Reihe von E. Hecke

von

EDMUND HLAWKA (Wien)

Gewidmet Paul Erdős zum 75. Geburtstag

Es seien α_1, α_2 Irrationalzahlen mit $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Dann betrachtet E. Hecke [2] die folgende Reihe

$$G(q_1, q_2) = \sum_{\mu_1, \mu_2} q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \tag{1}$$

wo $\mu_1 = m + n\alpha_1$, $\mu_2 = m + n\alpha_2$, wobei m, n alle ganzen Zahlen mit $n\alpha_1 + m > 0$, $n\alpha_2 + m > 0$ durchläuft.

Wir setzen

$$q_1 = e^{-t_1}, \quad q_2 = e^{-t_2} \tag{2}$$

wobei

$$\operatorname{Re} t_1 = \tau_1 > 0, \quad \operatorname{Re} t_2 = \tau_2 > 0.$$

Wir schreiben statt $G(q_1, q_2)$ kurz

$$H(t_1, t_2) = \sum e^{-\mu_1 t_1 - \mu_2 t_2}.$$

Wir setzen

$$H(t_1, t_2) = H_1 + H_2 \tag{3}$$

wobei

$$H_1 = \sum_{m=-\infty}^{0} e^{-m(t_1+t_2)} \sum_n^* e^{-n(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}, \tag{4}$$

und

$$H_2 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(t_1+t_2)} \sum_n^* e^{-n(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}. \tag{5}$$

In $\sum_n^*$ ist nach Definition von μ_1 bzw. μ_2 nur über die n mit $n\alpha_1 + m > 0$ und $n\alpha_2 + m > 0$ zu summieren. Betrachten wir zuerst H_2:

Es ist $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. Da $m \geqslant 1$, so ist $-m/\alpha_1 > -m/\alpha_2$, also muß $n > -m/\alpha_1 > -m/\alpha_2$ sein. Es ist daher $-n < m/\alpha_1$, also $-n \leqslant [m/\alpha_1]$ also $n \geqslant -[m/\alpha_1]$. Es ist somit in H_2

$$\sum_n{}^* = \sum_{n \geqslant -[m/\alpha_1]} e^{-n(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}.$$

Setzt man $n = -[m/\alpha_1]+k$, so kommt

$$\sum_n{}^* = \exp\{[m/\alpha_1](\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\}$$

$$= \exp\{[m/\alpha_1](\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\}(1 - \exp\{-(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\})^{-1}.$$

Es ist

$$H_2 = s \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-m(t_1+t_2) + \left[\frac{m}{\alpha_1}\right](\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\right\} \tag{6}$$

wobei

$$s = (1 - \exp\{-(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\})^{-1} \tag{7}$$

gesetzt wurde.

Nun ist

$$m(t_1+t_2) - \frac{m}{\alpha_1}(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)$$

$$= m(t_1+t_2) - \left[\frac{m}{\alpha_1}\right](\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) - \left(\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)$$

wobei $((\beta)) = \beta - [\beta]$ ist. Da

$$(t_1+t_2) - \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) = t_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2 = t_2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}.$$

Haben wir also

$$H_2 = s \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-m \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} t_2\right\} \exp\left\{-\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\right\}.$$

Wir betrachten jetzt H_1. Setzen wir $m = -m_1$, so ist

$$H_1 = \sum_{m_1=0}^{\infty} \exp\{m_1(t_1+t_2)\} \sum_n{}^* \exp\{-n(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\}. \tag{8}$$

Es muß $n > m_1/\alpha_1$ und $n > m_1/\alpha_2$ sein. Da $\alpha_1 > \alpha_2$ so ist, wenn $m_1 \geqslant 1$, $n > m_1/\alpha_2 > m_1/\alpha_1$ also ist $n \geqslant [m_1/\alpha_2]+1$. Das gilt auch für $m_1 = 0$, denn dann ist $n > 0$ also $n \geqslant 1$. Wir schreiben m statt m_1 und setzen $n = [m/\alpha_2]+1+k$, dann wird

$$\sum_n{}^* = \exp\left\{-\left(\left[\frac{m}{\alpha_2}\right]+1\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-k(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\}. \tag{9}$$

Es wird also

$$H_1 = s \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left\{m(t_1+t_2) - \left(\left[\frac{m}{\alpha_2}\right]+1\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\right\}.$$

Es ist $\mathrm{Re}(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) = \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 > 0$; also $\exp\{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2\} \neq 1$.

Nun ist

$$m(t_1+t_2) - \left[\frac{m}{\alpha_2}\right](\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)$$

$$= m(t_1+t_2) - \frac{m}{\alpha_2}(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) + \left(\frac{m}{\alpha_2}\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)$$

$$= m t_1\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = -m t_1 \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2}.$$

Es wird also

$$H_1 = s \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left\{-m\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2}\right) t_1 + \left(\left(\frac{m}{\alpha_2}\right) - 1\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\right\}.$$

Wir haben also insgesamt

$$s(t_1, t_2) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \exp\left\{-m\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right) t_1 + \left(\left(\frac{m}{\alpha_2}\right) - 1\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\right\}\right. \tag{10}$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-m\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) t_2 - \left(\frac{m}{\alpha_1}\right)(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\right\}\right)$$

wobei

$$s(t_1, t_2) = \frac{1}{1 - \exp\{-(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)\}}$$

ist.

E. Hecke sagt nun in [2]: (Bei Hecke ist t_1 durch t, t_2 durch t' bezeichnet, α_1 durch α, α_2 durch α' bezeichnet. Die Klammer und die Nummern [3] und [7] sind vom Verfasser der Arbeit. Es ist $\alpha_1 = (d+\sqrt{d})/2$, $\alpha_2 = (d-\sqrt{d})/2$, wo $d > 1$ eine quadratfreie natürliche Zahl ist, α_1 und α_2 also quadratische Irrationalitäten sind.)

„Eine in meiner oben zitierten Arbeit angegebene Methode, welche den Weylschen Satz [7] über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1 benutzt, gestattet dann, nach einer kleinen Modifikation, zu zeigen, daß für jedes irrationale α, α' ($\alpha > \alpha' > 0$) die oben definierte Funktion (10) bei Annäherung an $t = 0$, $t' = t_{02}$ unendlich groß wird, falls t_{02} ein Wert mit positiv reellem

Teil ist. Also ist die Mannigfaltigkeit $t = 0$ für die Funktion eine singuläre. Wegen der zweifachen Periodizität der Funktion folgt daraus, daß jeder Punkt, dessen t rein imaginär ist, ein singulärer ist, auch das Entsprechende für t'; mithin ist die Funktion über das Gebiet $\mathscr{R}(t) > 0$ und $\mathscr{R}(t') > 0$ nicht fortsetzbar. Auf diesen Beweis gehe ich hier nicht näher ein. Denn für unsere Potenzreihen im Körper k(1) werde ich im folgenden auf ganz anderem Wege eine viel tiefergehende Analyse ihres Verhaltens in den singulären Punkten geben, woraus die Nichtfortsetzbarkeit als ein Nebenresultat folgt."

Wie sich Hecke den Beweis vorgestellt hat, ist mir unbekannt. Es ist auch später meines Wissens nach kein Beweis dieser Behauptungen erschienen. Dem Vernehmen nach war geplant, den Beweis in der Arbeit eines Schülers zu publizieren, doch ist mir nichts Näheres darüber bekannt geworden. Ein Beweis der nur die Definition der Gleichverteilung benützt, wie bei Hecke angedeutet, ist meines Erachtens nicht möglich. Es muß unbedingt, so glaube ich, die Tatsache benützt werden, daß die Gleichverteilung eine gleichmäßige ist, eine Tatsache, die von H. Weyl [7] am Anfang seiner grundlegenden Arbeit erwähnt wird, aber nicht weiter verwendet wird. Ich glaube, daß Hecke sicher an diese Eigenschaft gedacht haben muß, wie die Arbeiten von Ostrowski [6] und von Behnke [1] – einem Schüler von Hecke – zeigen. Diese besondere Eigenschaft wird heute durch den Begriff der Diskrepanz (Vgl. z. B. [4]) ausgedrückt. Wir werden einen Beweis der Behauptungen von Hecke unter Benützung der Diskrepanz geben. Dies ermöglicht auch schärfere quantitative Resultate abzuleiten, als dies von Hecke in den obigen Bemerkungen in Aussicht gestellt wird. Dabei gehen natürlich die feineren Eigenschaften der auftretenden Irrationalzahlen ein. Wir benützen dabei eine Methode, die ich schon in einer vorhergehenden Arbeit [5] verwendet habe. Es wäre auch nützlich, diese Betrachtungen auf andere Reihen zu verallgemeinern, aber wir begnügen uns mit der Behauptung von Hecke.

Es seien k_1, l_1, k_2, l_2 ganze Zahlen ($l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$) dann betrachten wir die Stellen

$$t_1(k_1, l_1) = \tau_1 + 2\pi i \beta_1, \tag{11}$$

$$t_2(k_2, l_2) = \tau_2 + 2\pi i \beta_2 \tag{11'}$$

wobei

$$\beta_1 = l_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{k_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \tag{12}$$

(1) Anmerkung des Verfassers: $k = Q(\sqrt{d})$.

und

$$\beta_2 = l_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{k_2}{\alpha_1 - \alpha_2}. \tag{12'}$$

Dabei sei $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ und

$$r_1 = \exp\left\{-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right)\tau_1\right\} \tag{13}$$

und

$$r_2 = \exp\left\{-\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\tau_2\right\}. \tag{13'}$$

Es ist

$$0 < r_1 < 1, \quad 0 < r_2 < 1.$$

Weiters ist

$$\lim_{\tau_1 \to 0+0} r_1(\tau_1) = 1. \tag{14}$$

und

$$\lim_{\tau_2 \to 0+0} r_2(\tau_2) = 1. \tag{14'}$$

Die Stellen $t_1(k_1, l_1)$ sind dicht in E_1: $\operatorname{Re} t_1 > 0$ bzw. $t_2(k_2, l_2)$ dicht in E_2: $\operatorname{Re} t_2 > 0$. Ist nämlich $\tau_1 + 2\pi i e_1$ eine beliebige Stelle in H_1 bzw. $\tau_2 + 2\pi i e_2$ in H_2, so gibt es nach dem Kroneckerschen Approximationssatz, da α_1 bzw. α_2 irrational ist, für jedes $\varepsilon > 0$ ganze Zahlen l_1, k_1 bzw. l_2, k_2 so daß (es ist $\alpha_1 > \alpha_2$)

$$|l_1 \alpha_2 + k_1 - e_1(\alpha_1 - \alpha_2)| < \varepsilon(\alpha_1 - \alpha_2)$$

und

$$|l_2 \alpha_1 + k_2 - e_2(\alpha_1 - \alpha_2)| < \varepsilon(\alpha_1 - \alpha_2)$$

also

$$|t_1(k_1, l_1) - \varrho(\tau_1 + 2\pi i e_1)| < \varepsilon$$

und

$$|t_2(k_2, t_2) - \varrho(\tau_2 + 2\pi i e_2)| < \varepsilon$$

ist.

Es ist nun

$$\exp\left\{2\pi i \beta_1 m_1 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right)\right\} = \exp\left\{2\pi i \left(m_1 l_1 + \frac{k_1 m_1}{\alpha_2}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{2\pi i \frac{k_1 m_1}{\alpha_2}\right\} = \exp\left\{2\pi i k_1 \left(\frac{m_1}{\alpha_2} - \left[\frac{m_1}{\alpha_2}\right]\right)\right\}$$

und

$$\exp\left\{2\pi i\beta_2 m_2\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right\} = \exp\left\{2\pi i\left(m_2 l_2+\frac{k_2 m_2}{\alpha_1}\right)\right\}$$
$$= \exp\left\{2\pi i\frac{k_2 m_2}{\alpha_1}\right\} = \exp\left\{2\pi i k_2\left(\frac{m_2}{\alpha_2}-\left[\frac{m_2}{\alpha_2}\right]\right)\right\}.$$

Es wird also an den Stellen $t_1(k_1, l_1)$, $t_2(k_2, l_2)$

(15) $H(t_1(k_1, l_1), t_2(k_2, l_2))$

$$= s(t_1(k_1, l_1), t_2(k_2, l_2))\left(\sum_{m=0}^{\infty} r_1^m \exp\left\{-2\pi i k_1\left(\frac{m}{\alpha_2}\right)+\left(\left(\frac{m}{\alpha_2}\right)-1\right)(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)\right\}\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty} r_2^m \exp\left\{-2\pi i k_2\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)-(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)\right\}\right).$$

Wir haben also die beiden Reihen

$$S_1 = \sum_{m=0}^{\infty} r_1^m \exp\left\{\left(\frac{m}{\alpha_2}\right)((\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)-2\pi i k_1)\right\} \tag{16}$$

und

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} r_2^m \exp\left\{\left(\frac{m}{\alpha_1}\right)((\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)-2\pi i k_2)\right\} \tag{17}$$

zu betrachten, dann ist

$$H = s(e^{-(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)} S_1+S_2). \tag{18}$$

Es sind die Reihen S_1, S_2 Spezialfälle der Reihe

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} r^m f(m\gamma) \tag{19}$$

wobei

$$f(x) = \exp\{\pm(x-[x])((\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)-2\pi i k)\} \tag{20}$$

ist. Dabei haben wir k für k_1 bzw. k_2 und

$$\gamma = 1/\alpha_2 \quad \text{bzw.} \quad 1/\alpha_1 \text{ gesetzt.}$$

Dabei setzen wir in S_2: $f(0) = 0$.

Nun gilt für jede Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m r^m$$

die für $0 \leqslant r < 1$ konvergent ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m r^m = (1-r)\sum_{m=0}^{\infty} C_m r^m \tag{*}$$

wobei

$$C_M = c_0+c_1+\ldots+c_M$$

ist. Wir nehmen nun

$$c_m = f(m\gamma)-\lambda(f)$$

wobei

$$\lambda(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

ist. Es ist dann

$$C_m = \sum_{k=0}^{m}(f(k\gamma)-\lambda(f)). \tag{21}$$

Setzen wir

$$\Delta_m(f) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(f(k\gamma)-\lambda(f)). \tag{22}$$

So wird

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m r^m = \sum_{m=0}^{\infty}(f(m\gamma)-\lambda(f))r^m = \sum_{m=0}^{\infty} f(m\gamma)r^m-\frac{\lambda(f)}{1-r}. \tag{23}$$

Es wird also nach (*)

$$S = \frac{\lambda(f)}{1-r}+(1-r)\sum_{m=0}^{\infty}\Delta_m(f)(m+1)r^m = \frac{\lambda(f)}{1-r}+R. \tag{24}$$

Es ist nun nach (20)

$$|f(x)| \leqslant e^{(x)(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)} \leqslant e^{\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2}+1.$$

(Es sind ja α_1, α_2, τ_1, τ_2 positiv.)

Weiter gilt (vgl. [4], Kap. VII, S. 107) für jede reellwertige Funktion g mi beschränkter Variation $V(g)$

$$|\Delta_m(g)| \leqslant V(g) D_m$$

wobei D_m die Diskrepanz der Folge $(k\gamma)$ $(k = 1, \ldots, m)$ ist.

Ist g stetig differenzierbar, so ist

$$V(g) = \int_0^1 |g'(x)|\,dx. \tag{25}$$

Das wenden wir auf

$$g_1(x) = \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}(e^{x(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi i k_1)})$$
$$= e^{x(\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2)} \cos((\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - 2\pi k_1) x)$$

und

$$g_2 = \operatorname{Im} f = e^{x(\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2)} \sin((\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - 2\pi k_1) x)$$

an.

Es ist

$$\int_0^1 |g_1'|\, dx \leqslant |\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2| \int_0^1 e^{x(\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2)} |\cos(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + 2\pi i k_1)(x)|\, dx$$
$$+ (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + 2\pi k_1) \int_0^1 e^{x(\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2)} |\sin(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - 2\pi k_1)|\, dx$$
$$\leqslant (e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} + 1)(|\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2| + |\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - 2\pi k_1|).$$

Analog ist

$$\int_0^1 |g_2'|\, dx \leqslant (e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} + 1)(|\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2| + |\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - 2\pi k_1|).$$

Es wird also nach (25), da

$$\Delta_m(f) = \Delta_m(g_1) + i\Delta_m(g_2), \tag{26}$$

$$|\Delta_m(f)| \leqslant \sqrt{\Delta_m^2(g_1) + \Delta_m^2(g_2)} \tag{27}$$
$$\leqslant \sqrt{2}(|\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2| + |\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 - 2\pi k|)(e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} + 1) D_m,$$

$$|\Delta_m(f)| \leqslant \sqrt{2}\left(|\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2| - 2\pi k_1 (e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} + 1)\right) D_m. \tag{28}$$

Wir erhalten also

$$\left| S - \frac{\lambda(f)}{1-r} \right| \leqslant V(f)(1-r) \sum_{m=0}^{\infty} D_m (m+1) r^m. \tag{29}$$

Es ist nun

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) r^m = \frac{1}{(1-r)^2}$$

also

$$\left| S - \frac{\lambda(f)}{1-r} \right| \leqslant \frac{V(f)}{1-r} \sum_{m=0}^{\infty} D_m (m+1) r^m \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) r^m. \tag{30}$$

Da nun α_1, α_2 irrational sind, ist $\lim_{m\to\infty} D_m(1/\alpha_1)$ und $\lim_{m\to\infty} D_m(1/\alpha_2)$ gleich 0. Es ist also

$$\lim_{r\to 1} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} D_m (m+1) r^m}{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) r^m} = 0. \tag{31}$$

Da

$$|S| \geqslant \frac{1}{1-r} \left(\lambda(f) - V(f) \frac{\sum_{m=0}^{\infty} D_m (m+1) r^m}{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) r^m} \right)$$

so folgt, wenn $\lambda(f) \neq 0$

$$\lim_{r=1} S(r) = \infty.$$

Es ist ($k = k_1$ bzw. k_2)

$$\lambda(f) = \int_0^1 e^{x(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi i k)}\, dx = \frac{e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi k i} - 1}{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi i k} \tag{31'}$$

also ist tatsächlich $\lambda(f) \neq 0$.

Es wird also

$$H = s\left(e^{-(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)} \frac{e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} - 1}{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi i k_1} + \frac{e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} - 1}{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi i k_2} \right) + R \tag{32}$$

wobei nach (15), (18), (28) und (29)

$$|R| \leqslant V \left(\frac{|e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} - 1|}{1 - r_1} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} D_m(1/\alpha_1)(m+1) r_1^m}{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) r_1^m} + \frac{|e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} - 1|}{1 - r_2} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} D_m(1/\alpha_2)(m+1) r_2^m}{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) r_2^m} \right).$$

Dabei ist

$$r_1 = e^{-(\alpha_1/\alpha_2 - 1)\tau_1}, \quad r_2 = e^{-(1-\alpha_1/\alpha_2)\tau_2},$$

und

$$V = |\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi i k_1| + |\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 - 2\pi i k_2|,$$

$$s = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}} = \frac{e}{e^{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2} - 1}$$

also

$$H = \frac{e^{-(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)}}{(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_1)(1-r_1)} + \frac{e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}}{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_2}\cdot\frac{1}{(1-r_2)}$$

$$= \frac{e^{-(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)}}{(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_1)(1-e^{(\alpha_1/\alpha_2-1)\tau_1})}$$

$$+\frac{e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}}{(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_2)}\cdot\frac{1}{1-e^{-(1-\alpha_2/\alpha_1)\tau_2}}+R.$$

Es ist also da $e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}$ stets $\neq 0$

(33) $$\lim_{\tau_1\to 0+0} H = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\tau_2\to 0+0} H = \infty.$$

Daraus folgt die Behauptung von E. Hecke.

Betrachten wir den Fall, daß β_1 eine Irrationalzahl von beschränkten Typus ist, d.h. daß für alle Brüche p/q

(34) $$\left|\beta_1-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{c_1 q^2}$$

gilt. Dabei ist c_1 eine Konstante, die nur von β_1 abhängt. Es gilt dann (vgl. z.B. [6]) für die Diskrepanz D_m von β_1

(35) $$D_m \leqslant C(\beta_1)\frac{\log m}{m+1}$$

wobei $C(\beta_1)$ wieder eine Konstante ist, die nur von β_1 abhängt. Es wird dann

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m(m+1)r^m \leqslant C(\beta_1)\sum_{m=1}^{\infty}\log m r^m.$$

Nun ist bekanntlich bei passendem K

$$\left|\log m-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\right| \leqslant K$$

also erhalten wir

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m(m+1)r^m \leqslant C\left(K\sum_{m=1}^{\infty} r^m+\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\ldots+\frac{1}{m}\right)r^m\right)$$

$$\leqslant C_1\left(\frac{K}{1-r}+\frac{1}{1-r}|\log(1-r)|\right).$$

Es wird also

(36) $$\left|S-\frac{\lambda(f)}{1-r}\right| \leqslant V(f)\big(C_2|\log(1-r)|\big) = R_1$$

also nach (28) und (31′)

$$\left|S-\frac{\lambda(f)}{1-r}\right| \leqslant 2C_2(e^{\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2}+1)\big(|\log(1-r)|\big)\big(|\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi k i|\big)$$

wo C_1, C_2 neue Konstanten sind.

Wir haben also

$$\left|S-\frac{e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}}{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_2}\cdot\frac{1}{1-r}\right| \leqslant R_1.$$

Daraus folgt

$$\Bigg|H-e^{-(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)}\frac{e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}-1}{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_1}\cdot\frac{1}{1-e^{-(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)}}\cdot\frac{1}{1-r_1}$$

$$+\frac{e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}-1}{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_2}\cdot\frac{1}{1-e^{(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)}}\cdot\frac{1}{1-r_2}\Bigg|$$

$$=\left|H-\frac{1}{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_1}\cdot\frac{1}{1-r_1}-\frac{e^{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2}}{\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_2}\cdot\frac{1}{1-r_2}\right| \leqslant R_2$$

wobei

$$|R_2| \leqslant 2(e^{(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)}-1)\big(|\log(1-r_1)|+|\log(1-r_2)|\big).$$

Es ist also

$$|H| \geqslant \big(|\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_1|(1-e^{-(\alpha_1/\alpha_2-1)\tau_1})\big)^{-1}$$

$$-\big(|\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_2|(1-e^{-(\alpha_1/\alpha_2-1)\tau_2})\big)^{-1}$$

$$-|\log(1-e^{-(\alpha_1/\alpha_2-1)})|-e^{-(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)}|\log(1-e^{-(\alpha_1/\alpha_2+1)})|$$

$$\times(e^{\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2}+1)$$

also ($C_3>0$, $C_4>0$)

$$|H| \geqslant C_3\left(|\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_1|^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-1\right)^{-1}\tau_1^{-1}\right)$$

$$-C_4|\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_2|^{-1}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{-1}\tau_2^{-1}$$

$$+(\log\tau_1)+(\log\tau_2)+\left|\log\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-1\right)\right|+\left|\log\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\right|.$$

Es ist

$$|\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2-2\pi i k_1| = \sqrt{(\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2)^2+(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-2\pi i k_1)^2}.$$

Es ist also, wenn wir τ_2 festhalten und mit τ_1 gegen 0 gehen $(C>0)$

$$|H| \geqslant \frac{C}{\tau_1} - O(|\log \tau_1|) - O(1) \tag{37}$$

wobei die Konstanten von τ_2 abhängen.

Es gilt analog, wenn τ_1 fest und τ_2 gegen 0 geht

$$|H| \geqslant \frac{C}{\tau_2} - O(|\log \tau_2|) - O(1). \tag{37'}$$

Ist $\gamma = 1/\alpha_1$ oder $1/\alpha_2$ vom Potenztypus, gilt also für alle p/q

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{C_2^{k+1}}$$

dann ist (vgl. [6])

$$D_m \leqslant C m^{-1/k}.$$

Es ist dann also

$$\sum_m D_m (m+1) r^m \leqslant C_1 \sum_{m=0}^{\infty} m^{1-1/k} r^m.$$

Nun ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^{1-1/k} r^m \leqslant C_2 \frac{1}{(1-r)^{2-1/k}} = C_3 (1-r)^{1/k-2}$$

denn es ist doch, wenn $a_m = m^{1-1/k}$ und $b_m = \binom{m+s}{m}$ der Koeffizient von $(1-r)^{1/k-2} = (1-r)^{-1+s}$ (wo $s = 1-1/k$ gesetzt wurde).

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m^s}{\binom{m+s}{m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{m!\, m^{1+s}}{(s+1)\ldots(s+1+m)} \cdot \frac{s+1+m}{m} = \Gamma(s+1)$$

also ist

$$\lim_{r\to 1} (1-r)^{2-1/k} \sum_{m=0}^{\infty} D_m m r^m = \lim_{r\to 1} (1-r)^{2-1/k} \frac{\Gamma(2-1/k)}{(1-r)^{2-1/k}} = \Gamma\left(2-\frac{1}{k}\right)$$

wie vorher behauptet und es kommt, wo R_2 wie früher erklärt ist.

$$|R_2| \leqslant C\left(\frac{1}{(1-r_1)^{1-1/k}} + \frac{1}{(1-r_2)^{1-1/k}}\right) V(f)$$

also

$$|H| \geqslant C\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_1^{1-1/k}} + \frac{1}{\tau_2^{1-1/k}}\right) = \frac{C}{\tau_1}(1 - \tau_1^{1/k} - \tau_2^{1/k})$$

wenn α_1, α_2 vom gleichen Potenztypus sind).

Literaturverzeichnis

[1] H. Behnke, *Über die Verteilung von Irrationalzahlen* mod 1, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), S. 252–267.

[2] E. Hecke, *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen I, II*, ibid. 1 (1922), S. 102–126.

[3] – *Über analytische Funktionen und die Verteilung der Zahlen* mod *Eins*, ibid. 1 (1922), S. 54–76.

[4] E. Hlawka, *Theorie der Gleichverteilung*, B. I. Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien, Zürich 1979, 142 S.

[5] – *Über eine Methode von E. Hecke in der Theorie der Gleichverteilung*, Acta Arith. 24 (1973), S. 11–31.

[6] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen I, II, III*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), S. 77–88, 250–251; 4 (1926), S. 224.

[7] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung* mod *Eins*, Math. Ann. 77 (1916), S. 313–352.

Eingegangen am 11.2.1986 (1589)