ACTA ARITHMETICA
XLVIII (1987)

Ein metrischer Satz über vollständig gleichverteilte Folgen

von

ROBERT F. TICHY (Wien)

Herrn Prof. Dr. K. Prachar zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung. Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von Punkten in $\boldsymbol{R}^k$ heißt *gleichverteilt* mod 1, wenn für jedes k-dimensionale Teilintervall I von $[0, 1[^k$ die Anzahl $A(I, N, x_n)$ der in I enthaltenen Bruchteile $\{x_1\}, \ldots, \{x_N\}$ asymptotisch gleich dem N-fachen Inhalt $|I|$ des Intervalls ist, d.h.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(I, N, x_n)}{N} = |I| \quad \text{für alle } I \subseteq [0, 1[^k. \tag{1.1}$$

H. Weyl [9] bewies, daß eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n = (x_n^{(0)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) \in \boldsymbol{R}^k$ genau dann gleichverteilt modulo 1 ist, wenn für jeden von Null verschiedenen Gitterpunkt $\boldsymbol{h} = (h_0, \ldots, h_{k-1}) \in \boldsymbol{Z}^k$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp\{2\pi i (h_0 x_n^{(0)} + \ldots + h_{k-1} x_n^{(k-1)})\} = 0 \tag{1.2}$$

(Weylsches Kriterium); vgl. die Bücher von E. Hlawka [3] und L. Kuipers und H. Niederreiter [6]. Ein Maß für die Gleichverteilung einer Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von Punkten in $\boldsymbol{R}^k$ ist die Diskrepanz

$$D_N(x_n) = \sup_I \left| \frac{A(I, N, x_n)}{N} - |I| \right|, \tag{1.3}$$

wobei das Supremum über alle Intervalle $I \subseteq [0, 1[^k$ erstreckt wird. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann gleichverteilt modulo 1, wenn

$$\lim_{N\to\infty} D_N(x_n) = 0. \tag{1.4}$$

In [4], Kapitel 3.5 verwendet D. E. Knuth vollständing gleichverteilte Folgen zur Konstruktion von Pseudozufallszahlen. Dabei heißt eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

reeller Zahlen vollständig gleichverteilt modulo 1, falls für alle natürlichen Zahlen k die Folge $((x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}))_{n=1}^{\infty}$ von Punkten in $\mathbf{R}^k$ gleichverteilt modulo 1 ist. D. E. Knuth spricht die Vermutung aus, daß für eine beliebige Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ paarweise verschiedener natürlicher Zahlen die Folge $(x^{a_n})_{n=1}^{\infty}$ vollständing gleichverteilt mod 1 ist für fast alle reellen Zahlen $x > 1$ (im Sinne des üblichen Lebesgue'schen Maßes). Diese Vermutung konnte nach einigen Teilresultaten (J. F. Koksma [5], vergleiche auch [4]) in [7] vollständig bewiesen werden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Beweis gegeben, der zu einer weitreichenden Verallgemeinerung und Verschärfung führt; für eine Verallgemeinerung auf positive (nicht unbedingt ganzzahlige) Exponenten siehe auch [8].

Es wird im folgenden die "Blocklänge" k als variabel, d.h. $k = k(N)$ angenommen und für eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reeller Zahlen die Diskrepanz

$$D_N(k(N), x_n) = D_N((x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k(N)-1})) \tag{1.5}$$

eingeführt. Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt *$k(N)$-gleichverteilt* mod 1, falls

$$\lim_{N\to\infty} D_N(k(N), x_n) = 0 \tag{1.6}$$

gilt. Diese Definition entspricht der Definition (Q1) von Knuth ([4], Sec. 3.5), die sich in besonders zweckmäßiger Weise für die Beschreibung von Pseudozufallszahlen gebrauchen läßt. Eine Folge (x_n) ist genau dann vollständig gleichverteilt modulo 1, wenn (1.4) für alle konstanten Folgen $k(N)$ gilt. In dieser Arbeit wird das folgende Hauptresultat gezeigt:

SATZ 1. *Es sei $k = (k(N))$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $k(N) \leqslant (\log N)^{\theta}$ $(0 < \theta < 1/2)$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei eine Folge positiver reeller Zahlen mit $|a_m - a_n| \geqslant \delta > 0$ (für $m \neq n$) und $\eta > 0$ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann gilt für fast alle $x > 1$ (im Sinne des Lebesgueschen Maßes) und alle natürlichen Zahlen N die Diskrepanzabschätzung*

$$D_N(k(N), x^{a_n}) \leqslant C \cdot N^{-1/2+\eta}$$

mit einer nur von x, δ, θ, η (aber nicht von N) abhängigen Konstanten C.

Bemerkung. Es seien (a_n) und $(k(N))$ wie in Satz 1 und $k = k(N)$ konstant. Dann gilt für fast alle $x > 1$

$$D_N(k, x^{a_n}) \leqslant C(k, x, \delta, \eta)\, N^{-1/2} (\log N)^{k+3/2+\eta} \qquad (\eta > 0).$$

Dies erhält man aus (3.18) (für $w = 1$ und die Folgen x^{a_n+M}; $M = 0, 1, 2, \ldots$) mit Hilfe der Methode von Gal–Koksma [2].

2. Einige Hilfsresultate.

PROPOSITION 1. *Es sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Punkten in $\mathbf{R}^k$, G bezeichne eine beliebige natürliche Zahl und für jeden ganzzahligen Gitterpunkt $\boldsymbol{h}$ $= (h_0, \ldots, h_{k-1})$ sei $\|\boldsymbol{h}\| = \max_{j=0,\ldots,k-1} |h_j|$ und*

$$R(\boldsymbol{h}) = \prod_{j=0}^{k-1} \max(|h_j|, 1).$$

Dann gilt

$$D_N(x_n) \leqslant 2k^2\, 3^{k+1} \left(\frac{1}{G} + \sum_{0<\|\boldsymbol{h}\|\leqslant G} \frac{1}{R(\boldsymbol{h})} \left|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \langle h, x_n\rangle}\right|\right) \tag{2.1}$$

wobei $\langle .,. \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbf{R}^k$ bedeutet. (Ungleichung von Erdös–Turán–Koksma, vgl. [6], Seite 116).

PROPOSITION 2. *Es sei $u(x)$ eine auf $[\alpha, \beta]$ stetig differenzierbare Funktion mit monotoner (erster) Ableitung, sodaß $|u'(x)| \geqslant K > 0$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$. Dann gilt*

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e(u(x))\,dx\right| \leqslant 1/K,$$

wobei $e(t) = e^{2\pi i t}$ zur Abkürzung gesetzt wird.

(Beweis siehe [6], Seite 15, Lemma 2.1.)

PROPOSITION 3. *Es sei $F(x) = c_1 e^{\gamma_1 x} + \ldots + c_s e^{\gamma_s x}$ eine für $0 < \alpha \leqslant x < \beta$ definierte Funktion; $s \geqslant 2$. Dabei sind c_j, γ_j reelle Zahlen mit $|c_1| \geqslant 1$, $\sum_{j=2}^{s} |c_j| \leqslant H$ $(\geqslant 2)$ und $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_s \geqslant 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 \geqslant \delta$, $0 < \delta < 1$. Dann gilt für jede gegen unendlich strebende Funktion $\psi(N)$ und alle genügend großen natürlichen Zahlen $N \geqslant N_0(\alpha, \beta, \delta, \psi)$ mit $M = [\gamma_1 \log H \cdot \log \psi(N)]$:*

$$\left|\frac{d^M}{dx} F\right| = |F^{(M)}(x)| \geqslant \frac{1}{2} e^{\delta\alpha} H^{(\log\delta)\gamma_1 \log\psi(N)} \qquad (\textit{für alle } x \in [\alpha, \beta]).$$

(N_0 hängt insbesondere nicht von H ab; für $s = 1$ gilt die Abschätzung trivialerweise mit $M = [\log \psi(N)]$.)

Beweis. Wegen $\gamma_j/\gamma_1 \leqslant 1 - \delta/\gamma_1$ $(j = 2, \ldots, s)$ gilt für alle $x \in [\alpha, \beta]$:

$$|F^{(M)}(x)| \geqslant \gamma_1^M e^{\gamma_1 x} \left|1 - H\left(1 - \frac{\delta}{\gamma_1}\right)^M\right|.$$

Nun ist

$$\left(1 - \frac{\delta}{\gamma_1}\right)^{\gamma_1} \leqslant e^{-\delta} < 1$$

und daher gilt für alle $N \geqslant N_0(\alpha, \beta, \delta, \psi)$

$$|F^{(M)}(x)| \geqslant \frac{1}{2} e^{\delta\alpha} \delta^M \geqslant \frac{e^{\delta\alpha}}{2} H^{(\log\delta)\gamma_1 \log\psi(N)}$$

was zu beweisen war.

Proposition 4. *Es sei F eine auf $[\alpha, \beta]$ M-mal stetig differenzierbare Funktion (M eine natürliche Zahl) und es gelte*

$$|F^{(M)}(x)| \geqslant A > 0 \quad \text{für alle } x \in [\alpha, \beta].$$

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens $M(M+1)/2+1$ Intervalle $I_j = I_j(\varepsilon)$ $(j = 1, \ldots, M(M+1)/2+1)$, sodaß für deren Lebesgue-Maß

$$\lambda\big(\bigcup_j I_j\big) \geqslant \beta-\alpha-2M(M+1)\varepsilon$$

gilt, alle Ableitungen $F^{(M-k)}$ $(0 \leqslant k \leqslant M)$ auf jedem Intervall I_j streng monoton sind und die Abschätzung

$$|F^{(M-k)}(x)| \geqslant A\varepsilon^k \quad \text{für alle } x \in \bigcup_j I_j$$

erfüllen.

Beweis. Nach dem Satz von Rolle und den Voraussetzungen besitzt $F^{(M-k)}$ $(0 \leqslant k \leqslant M)$ höchstens k Nullstellen im Intervall $[\alpha, \beta]$. Die Anzahl dieser Nullstellen wird mit $p = p(k) \leqslant k$ bezeichnet und die Nullstellen seien (der Größe nach geordnet) $a_{k,h}$ $(1 \leqslant h \leqslant p)$. Sei $J = [a_{1,1}-\varepsilon, a_{1,1}+\varepsilon]$ für $p(1) = 1$. Das Komplement von J bebesteht aus höchstens $\frac{1\cdot 2}{2}+1 = 2$ Intervallen I_1, I_2 und für jedes $x \in I_1 \cup I_2$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|F^{(M-1)}(x)| = |F^{(M)}(\xi)|\,|x-a_{1,1}| \geqslant A\cdot\varepsilon.$$

Es wird nun vollständige Induktion (nach k) durchgeführt und angenommen, daß $q = q(k) \leqslant k(k+1)/2$ Intervalle $J_1, \ldots, J_{q(k)}$ existieren mit

$$\lambda\big(\bigcup_{i=1}^{q} J_i\big) \leqslant 2k(k+1)\varepsilon \quad \text{und} \quad |F^{(M-k)}(x)| \geqslant A\cdot\varepsilon^k$$

für alle x aus dem Komplement von $\bigcup_{i=1}^{q} J_i$.

Nun betrachtet man die Intervalle $J'_h = [a_{k+1,h}-\varepsilon, a_{k+1,h}+\varepsilon]$ (für $1 \leqslant h \leqslant p(k+1) \leqslant k+1$). Aus den Intervallen J_i und J'_h bildet man nun eine Familie aus $q(k+1) \leqslant (k+1)(k+2)/2$ Intervallen $J''_1, \ldots, J''_{q(k+1)}$, indem man überlappende Intervalle zusammenfaßt und alle Intervalle, die eine Nullstelle von $F^{(M-k)}$ enthalten, nach links und rechts um die Länge ε vergrößert.

Es gilt dann

$$\lambda\big(\bigcup_{i=1}^{q(k+1)} J''_i\big) \leqslant \lambda\big(\bigcup_{i=1}^{q(k)} J_i\big)+\lambda\big(\bigcup_{h=1}^{p(k+1)} J'_h\big)+2k\varepsilon$$
$$\leqslant 2k(k+1)\varepsilon+2(k+1)\varepsilon+2k\varepsilon \leqslant 2(k+1)(k+2)\varepsilon.$$

Das Komplement von $\bigcup_{i=1}^{q(k+1)} J''_i$ besteht aus höchstens $(k+1)(k+2)/2+1$ Intervallen; sei $I = [c, d]$ ein solches. Für zwei aufeinanderfolgende Nullstellen $a_{k,h} < c$ und $a_{k,h+1} > d$ von $F^{(M-k)}$ sind dann die beiden Fälle möglich:

(i) in $]a_{k,h}, a_{k,h+1}[$ ist keine Nullstelle von $F^{(M-k-1)}$ enthalten;

(ii) in $]a_{k,h}, a_{k,h+1}[$ ist genau eine Nullstelle a von $F^{(M-k-1)}$ enthalten.

Es wird nun angenommen, daß $F^{(M-k-1)}$ im Intervall $[a_{k,h}, a_{k,h+1}]$ streng monoton wachsend ist.

Ist im Fall (i) $F^{(M-k-1)}$ auf $[a_{k,h}, a_{k,h+1}]$ positiv, so gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für alle $x \in]c, d[$ und passendes ξ mit $c-\varepsilon < \xi < x$:

$$F^{(M-k-1)}(x) = F^{(M-k-1)}(c-\varepsilon)+F^{(M-k)}(\xi)(x-c+\varepsilon) \geqslant A\varepsilon^{k+1},$$

denn $c-\varepsilon$ liegt nicht im Inneren von $\bigcup_{i=1}^{q(k)} J_i$. Für negatives $F^{(M-k-1)}$ schließt man in analoger Weise.

Im Fall (ii) sind nur die beiden folgenden Unterfälle möglich, denn $F^{(M-k-1)}$ ist als monoton wachsend vorausgesetzt.

(ii)1. $a_{k,h} < c < d < a < a_{k,h+1}$ und $F^{(M-k-1)}(x) < 0$ für alle $x \in]a_{k,h}, a[$.

(ii)2. $a_{k,h} < a < c < d < a_{k,h+1}$ und $F^{(M-k-1)}(x) > 0$ für alle $x \in]a, a_{k,h+1}[$.

Im Fall (ii)1. erhält man nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für alle $x \in]c, d[$ und mit einem passenden ξ mit $x < \xi < d+\varepsilon$:

$$F^{(M-k-1)}(x) = F^{(M-k-1)}(d+\varepsilon)+F^{(M-k)}(\xi)(x-d-\varepsilon) \leqslant -A\varepsilon^{k+1}.$$

Ebenso erhält man im Fall (ii)2. für alle $x \in]c, d[$ mit einem passenden ξ mit $c-\varepsilon < \xi < x$:

$$F^{(M-k-1)}(x) = F^{(M-k-1)}(c-\varepsilon)+F^{(M-k)}(\xi)(x-c+\varepsilon) \geqslant A\varepsilon^{k+1}.$$

Ersetzt man F durch $(-F)$, so folgen dieselben Abschätzungen für auf dem Intervall $[a_{k,j}, a_{k,j+1}]$ monoton fallendes $F^{(M-k-1)}$. Damit gilt für alle x aus dem Komplement von $\bigcup_{i=1}^{q(k+1)} J''_i$ die Abschätzung

$$|F^{(M-k-1)}(x)| \geqslant A\varepsilon^{k+1}.$$

Mit vollständiger Induktion ist daher Lemma 4 bewiesen.

3. Beweis von Satz 1. Im folgenden wird von einer Folge $k = k(N) \leqslant (\log N)^\theta$ (für $N \geqslant N^*$) ausgegangen und für festes (genügend großes)

N und einen festen ganzzahligen Gitterpunkt $\boldsymbol{h} = (h_0, \ldots, h_{k-1})$ mit $0 < \|\boldsymbol{h}\| \leqslant G = [\sqrt{N}]$ und fast alle x aus einem festen Intervall $[\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta)$ die Weylsche Summe

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} e(u_\nu(\boldsymbol{h}, x))$$

abgeschätzt, wobei $u_\nu(\boldsymbol{h}, x) = u_\nu(x) = \sum_{j=0}^{k-1} h_j e^{xa_{\nu+j}}$. Es bezeichne Ω die Menge $\Omega = \{j \in \boldsymbol{Z}:\ 0 \leqslant j \leqslant k-1,\ h_j \neq 0\}$ und $\varrho = |\Omega|$; ferner seien $\tilde{b}_1(\nu) > \tilde{b}_2(\nu) > \ldots > \tilde{b}_\varrho(\nu)$ die $a_{\nu+j}$, $j \in \Omega$ in monoton fallender Ordnung. Dann gilt

$$u_\nu(x) = \sum_{j=1}^{\varrho} \tilde{g}_j(\nu) e^{x\tilde{b}_j(\nu)},$$

wobei die $\tilde{g}_j(\nu)$, $1 \leqslant j \leqslant \varrho$ eine Umordnung der h_j, $j \in \Omega$ bilden. Weiters gilt

$$\sum_{j=1}^{\varrho} |\tilde{g}_j(\nu)| = \sum_{j\in\Omega} |h_j| =: H \leqslant \sqrt{N}\log N.$$

Es wird nun die obige Exponentialsumme abgeschätzt (vgl. auch [1]). Dazu wird für $w = w(N) = [k(N)\cdot \log\log N]$

$$I_{\boldsymbol{h}}(N) = I(N) = \int_\alpha^\beta \left|\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} e(u_\nu(x))\right|^{2w} dx \tag{3.1}$$

nach oben abgeschätzt. Klarerweise gilt

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{N} e(u_\nu(x))\Big|^{2w} = \sum_{n} e(f_n(x));$$

dabei bezeichnet

$$n = (n_1, \ldots, n_{2w}) \quad (1 \leqslant n_l \leqslant N)$$

und

$$f_n(x) = u_{n_1}(x) - u_{n_2}(x) + \ldots + u_{n_{2w-1}}(x) - u_{n_{2w}}(x).$$

Wir bezeichnen mit $\bar{b}_i(n)$ $(i = 1, \ldots, \bar{r})$ eine Aufzählung der $\tilde{b}_j(n_l)$ $(j = 1, \ldots, \varrho;\ l = 1, \ldots, 2w)$ in streng monoton fallender Reihenfolge; dabei ist $\bar{r} \leqslant 2\varrho w$. Es sei X_N die Menge aller $n = (n_1, \ldots, n_{2w})$, für die gilt: jedes $\bar{b}_i(n)$, welches unter den $\tilde{b}_j(n_l)$ nur einmal vorkommt, ist kleiner als $\sqrt{N}$. Nun wird die Kardinalität der Menge X_N abgeschätzt:

$$\operatorname{card} X_N \leqslant (2w)!\ \operatorname{card}\{n \in X_n:\ n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_{2w}\}.$$

Ferner induziert jedes n auf $\{1, \ldots, 2w\}$ eine Partition mit zusammenhängenden Blöcken; $\lambda(n)$ bezeichne die Anzahl der einelementigen Blöcke dieser Partition. Für jeden einelementigen Block $\{l\}$ gilt: $n_l \leqslant \sqrt{N}$ oder $l > 0$ und $n_{l-1} < n_l \leqslant n_{l-1} + k - 1$ (mit $k = k(N)$); es bezeichne $\mu(n)$ $(\leqslant \lambda(n))$ die Anzahl der einelementigen Blöcke $\{l\}$ mit $n_l \leqslant \sqrt{N}$. Dann gilt:

$$\operatorname{card} X_N \leqslant (2w)! \sum_{\lambda=0}^{2w} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \sum \binom{\lambda}{\mu} N^{w-(\lambda/2)} \left(\frac{\sqrt{N}}{\delta}\right)^{\lambda}, \tag{3.2}$$

wobei die innerste Summe über alle n mit $\lambda(n) = \lambda$ und $\mu(n) = \mu$ erstreckt wird. (Man beachte dabei, daß die Anzahl der mehrelementigen Blöcke $\leqslant \frac{1}{2}(2w - \lambda)$ ist und $k(N) \leqslant (\log N)^\theta \leqslant \sqrt{N}$.) Schließlich kann die Anzahl der n mit $\lambda(n) = \lambda$ und $\mu(n) = \mu$ durch die Anzahl aller Partitionen mit zusammenhängenden Blöcken und somit durch 2^{2w} abgeschätzt werden. Insgesamt erhält man also

$$\operatorname{card} X_N \leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^{2w} (2w)!\, N^w \cdot 2^{2w+1} \leqslant 2\cdot\left(\frac{8w}{\delta}\right)^{2w} N^w. \tag{3.3}$$

Die eben durchgeführte kombinatorische Überlegung kann verfeinert werden (vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von Herrn M. Goldstern). Für $I(N)$ ergibt sich daher

$$I(N) \leqslant \frac{1}{N^{2w}} \sum_{n \notin X_N} \left|\int_\alpha^\beta e(f_n(x))\,dx\right| + O\big((8w/\delta)^{2w} N^{-w}\big). \tag{3.4}$$

Für $L = 0, 1, 2$ sowie $n \notin X_N$ setzen wir

$$f_n^{(L)} = \frac{d^L}{dx} f_n(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i^L(n)\, g_i(n)\, e^{xb_i(n)}, \tag{3.5}$$

wobei die $b_i(n)$ $(i = 1, \ldots, r;\ r \leqslant \bar{r} \leqslant 2\varrho w \leqslant 2k(N)w(N))$ eine streng monoton fallend geordnete Teilmenge der $\bar{b}_i$ ist und die $g_i(n)$ Linearkombinationen der $\tilde{g}_i(n_l)$ sind. Wegen $n \notin X_N$ gilt $b(n) := b_1(n) \geqslant \sqrt{N}$ und $|g_1(n)| \geqslant 1$; weiters ist

$$\sum_{i=1}^{r} |g_i(n)| \leqslant 2wH.$$

Nun setzt man $\sigma(j) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\log(j+2)}$ für $j \geqslant 2$ und unterscheidet drei Fälle:

(i) $r = 1$;
(ii) $r \geqslant 2$ und $b(n) - b_2(n) > N^{\sigma(2)}$;
(iii) $r \geqslant 2$ und es existiert ein maximales s, $2 \leqslant s \leqslant r$ mit

$$b(n) - b_s(n) \leqslant N^{\sigma(s)}.$$

Im Fall (ii) gilt

$$\left|\frac{f_n^{(L)}}{b^L(n)}\right| = |g_1(n)| + \sum_{i=2}^{r} \frac{b_i^L(n)}{b^L(n)} g_i(n)\, e^{x(b_i(n)-b(n))} \tag{3.6}$$

$$\geqslant |g_1(n)| - \sum_{i=1}^{r} |g_i(n)|\, e^{-xN^{\sigma(2)}}$$

$$\geqslant 1-2wHe^{-\alpha N^{\sigma(2)}} \geqslant \tfrac{1}{2}$$

für alle hinreichend großen $N \geqslant N_0$. Im Fall (i) gilt die Abschätzung (3.6) trivialerweise. Wegen $b(n) \geqslant \sqrt{N}$ folgt aus (3.5) und (3.6) (mit $L = 1$) für $f_n' = f_n^{(1)}$ und alle hinreichend großen $N \geqslant N_1$:

$$|f_n^{(1)}(x)| \geqslant \tfrac{1}{2} b(n)\, e^{xb(n)} \geqslant e^{\alpha\sqrt{N}}. \tag{3.7}$$

Aus (3.5) und (3.6) (mit $L = 2$) folgt eine analoge Abschätzung für $f_n'' = f_n^{(2)}$; insbesondere ist f_n also auf $[\alpha, \beta]$ eine monotone Funktion. Proposition 2 liefert daher für die Fälle (i) und (ii) die Abschätzung

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e(f_n(x))\,dx\right| \leqslant e^{-\alpha\sqrt{N}} \quad \text{für } N \geqslant N_1. \tag{3.8}$$

Im Fall (iii) schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{b_i^L(n)}{b^L(n)} g_i(n)\, e^{x(b_i(n)-b(n))} + \sum_{i=s+1}^{r} \frac{b_i^L(n)}{b^L(n)} g_i(n)\, e^{x(b_i(n)-b(n))} =: U_{L,s}+V_{L,s}. \tag{3.9}$$

Falls $s \leqslant r-1$, dann ist $b(n)-b_{s+1}(n) > N^{\sigma(s+1)}$ (nach der Definition von s), also

$$V_{L,s}(x) \leqslant e^{-xN^{\sigma(s+1)}} \sum_{i=s+1}^{r} |g_i(n)| \leqslant 2wHe^{-\alpha N^{\sigma(s+1)}}. \tag{3.10}$$

Wegen $V_{L,s}(x) = 0$ für $s = r$ gilt (3.10) auch in diesem Fall. Nun setzen wir $d = b(n)-b_s(n)$ und (für $N \geqslant N_2$)

$$U_{L,s}(x) = \frac{b_s^L(n)\, e^{-dx}}{b^L(n)} \sum_{i=1}^{s} \frac{b_i^L(n)}{b_s^L(n)} g_i(n)\, e^{x(b_i(n)-b_s(n))} \tag{3.11}$$

$$= \frac{b_s^L(n)\, e^{-dx}}{b^L(n)} F_n(x) \geqslant \frac{e^{-dx}}{4} F_n(x).$$

Dabei ist

$$F_n(x) = F_{L,n}(x) = \sum_{i=1}^{s} c_i\, e^{x\gamma_i} \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{b_i^L(n)}{b_s^L(n)} g_i(n)$$

und $\gamma_i = b_i(n)-b_s(n)$ eine Funktion wie in Proposition 3. Da alle in Proposition 3 erforderlichen Voraussetzungen gleichmäßig in n und L erfüllt

sind, gilt mit $M = [\gamma_1 \log(2Hw) \log\log N]$:

$$|F_{L,n}^{(M)}| \geqslant \frac{e^{\delta\alpha}}{2}(2wH)^{(\log\delta)(\log\log N)\gamma_1} \tag{3.12}$$

für alle hinreichend großen $N \geqslant N_3$. Nach Proposition 4 und (3.12) kann $[\alpha, \beta]$ in eine Vereinigung von höchstens $M(M+1)/2+1$ Intervalle I_j zerlegt werden, sodaß auf jedem solchen Intervall I_j die Abschätzung

$$|F_{L,n}| \geqslant \frac{e^{\delta\alpha}}{2}(2wH)^{(\log\delta)(\log\log N)\gamma_1}\varepsilon^M \tag{3.13}$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ erfüllt ist. Nun setzt man $\varepsilon = 1/N^{2w}$ und berücksichtigt $2wH \leqslant N$, $\gamma_1 = d \leqslant N^{\sigma(s)}$ (für genügend großes N); dann gilt für alle $x \in W = \bigcup_j I_j$ und alle hinreichend großen $N \geqslant N_4$

$$|U_{L,s}(x)-V_{L,s}(x)| \tag{3.14}$$

$$\geqslant \left|e^{-\beta d}\frac{e^{\delta\alpha}}{8} N^{(\log\delta)(\log\log N)\gamma_1-(\log N)^4 N^{\sigma(s)}}\right| - |Ne^{-\alpha N^{\sigma(s+1)}}| \geqslant e^{-N^{3/8}},$$

denn $s \leqslant 2wk \leqslant 2(\log N)^{2\theta}\log\log N$. Somit ergibt sich aus (3.4) und (3.5) sowie wegen $b(n) \geqslant \sqrt{N}$, daß für alle $x \in W$, alle $L = 1, 2$ und alle hinreichend großen $N \geqslant N_5$

$$|f_{mn}^{(L)}(x)| \geqslant \sqrt{N}\, e^{\alpha\sqrt{N}}\, e^{-N^{3/8}} \geqslant e^{(\alpha/2)\sqrt{N}}. \tag{3.15}$$

Daher ist f_n auf jedem Intervall I_j streng monoton, und es gilt nach Proposition 2

$$\left|\int_{I_j} e(f_n(x))\,dx\right| \leqslant e^{-(\alpha/2)\sqrt{N}}. \tag{3.16}$$

Also ist für alle hinreichend großen $N \geqslant N_5$ und alle $n \notin X_N$

$$\left|\int_W e(f_n(x))\,dx\right| \leqslant \left(\frac{M(M+1)}{2}+1\right)e^{-(\alpha/2)\sqrt{N}} \leqslant e^{-(\alpha/4)\sqrt{N}}.$$

Das Integral über $[\alpha, \beta]$ spaltet man in das Integral über W und das Kompement W^c von W auf:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e(f_n(x))\,dx\right| \leqslant \left|\int_{W^c} e(f_n(x))\,dx\right| + \left|\int_W e(f_n(x))\,dx\right| \tag{3.17}$$

$$\leqslant \frac{(\log N)^2}{N^{2w}} + e^{-(\alpha/4)\sqrt{N}} \leqslant \frac{1}{N^w}$$

für alle hinreichend großen $N \geqslant N_6$ und alle $n \notin X_N$.

Wegen (3.4) gilt also

$$I(N) = O\left(\left(\frac{8w}{\delta}\right)^{2w} N^{-w}\right). \tag{3.18}$$

Nun betrachtet man die Menge (für beliebiges $\eta > 0$)

$$\mathscr{M}(N, \boldsymbol{h}) = \left\{x \in [\alpha, \beta]: \left|\sum_{\nu=1}^{N} e(u_\nu(x))\right| \geqslant \frac{8w}{\delta} N^{1/2} N^{\eta}\right\}. \tag{3.19}$$

Nach (3.18) gilt für das Lebesguemaß λ dieser Menge

$$\lambda(\mathscr{M}(N, \boldsymbol{h})) \leqslant N^{-\eta w}.$$

Für das Maß der Vereinigungsmenge

$$\mathscr{M}(N) = \bigcup_{\|\boldsymbol{h}\| \leqslant \sqrt{N}} \mathscr{M}(N, \boldsymbol{h})$$

erhält man daher wegen $w(N) = [k(N) \log \log N]$

$$\lambda(\mathscr{M}(N)) \leqslant (2\sqrt{N}+1)^{k(N)} N^{-\eta w} \leqslant 1/N^2 \tag{3.20}$$

für alle hinreichend großen $N \geqslant N_7$. Daher konvergiert die Reihe $\sum_N \lambda(\mathscr{M}(N))$, und nach dem Lemma von Borel–Cantelli gilt, daß für fast alle $x \in [\alpha, \beta]$ eine natürliche Zahl $\bar{N}(x)$ existiert, sodaß für alle $N > \bar{N}(x)$ und alle Gitterpunkte $\boldsymbol{h}$ mit $0 \leqslant \|\boldsymbol{h}\| \leqslant \sqrt{N}$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N} e(u_\nu(\boldsymbol{h}, x))\right| = O(N^{1/2+\eta}) \tag{3.21}$$

gilt. Nun verwendet man die Ungleichung von Erdös–Turán–Koksma (Proposition 1) mit $G = [\sqrt{N}]$ und erhält das gewünschte Resultat nach Ersetzung von x durch $\log x$.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös and J. F. Koksma, *On the uniform distribution of lacunary sequences*, Indag. Math. 11 (1949), S. 79–88.

[2] I. S. Gal et J. F. Koksma, *Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables*, Indag. Math. 12 (1950), S. 192–207.

[3] E. Hlawka, *Theorie der Gleichverteilung*, Bibl. Inst., Mannheim – Wien – Zürich 1979.

[4] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 2, *Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, Reading 1969.

[5] J. F. Koksma, *Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins*, Compositio Math. 2 (1935), S. 250–258.

[6] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley and Sons, New York 1974.

[7] H. Niederreiter and R. F. Tichy, *Solution of a problem of Knuth on complete uniform distribution of sequences*, Mathematika 32 (1985), S. 26–32.

[8] — — *Metric Theorems on Uniform Distribution and Approximation Theory*, to appear.

[9] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*, Math. Ann. 77 (1916), S. 313–352.

ABT. FÜR TECHNISCHE MATHEMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Wiedner Hauptstraße 8–10
1040 Wien, Austria

Eingegangen am 17. 10. 1985
und in revidierter Form am 9. 3. 1986 (1555)