References

[1] R. G. Ayoub, *On the Waring–Siegel theorem*, Canad. J. Math. 5(1953), pp. 439–450.
[2] B. J. Birch, *Small zeros of diagonal forms of odd degree in many variables*, Proc. London Math. Soc. 21 (1970), pp. 12–18.
[3] H. Davenport, *Analytic methods for diophantine equations and diophantine inequalities*, Lecture Notes, Univ. of Michigan, 1962.
[4] Y. Eda, *On Waring's problem in algebraic number field*, Revista Colombiana de Mat., 1975, pp. 29–72.
[5] E. Hecke, *Lectures on Theory of Algebraic Numbers*, Springer-Verlag, 1980.
[6] Hua Loo Keng and Wang Yuan, *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*, Springer-Verlag and Science Press (Beijing), 1981.
[7] K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, 1982.
[8] O. Körner, *Über das Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern*, Math. Ann. 144 (1961), pp. 224–238.
[9] T. Mitsui, *On the Goldbach problem in an algebraic number field I*, J. Math. Soc. Japan 12 (1960), pp. 290–324.
[10] J. Pitman, *Bounds for solutions of diagonal equations*, Acta Arith. 19 (1971), pp. 223–247.
[11] W. M. Schmidt, *Small zeros of additive forms in many variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 248 (1) (1979), pp. 121–133.
[12] — *Small zeros of additive forms in many variables II*, Acta Math. 143 (1979), pp. 219–232.
[13] C. L. Siegel, *Generalization of Waring's problem to algebraic number fields*, Amer. J. Math. 66 (1944), pp. 122–136.
[14] — *Sums of m-th powers of algebraic integers*, Ann. of Math. 46 (1945), pp. 313–339.
[15] R. M. Stemmler, *The easier Waring problem in algebraic number fields*, Acta Arith. 6 (1961), pp. 447–468.
[16] T. Tatuzawa, *On the Waring problem in an algebraic number field*, J. Math. Soc. Japan 10 (1958), pp. 322–341.
[17] — *On the Waring's problem in algebraic number fields*, Acta Arith. 24 (1973), pp. 37–60.
[18] Wang Yuan, *Bounds for solutions of additive equations in an algebraic number field II* (to appear).

INSTITUTE OF MATHEMATICS
ACADEMIA SINICA
Beijing, China

Received on 30. 5. 1984
and in revised form on 18. 11. 1985 (1428)

ACTA ARITHMETICA
XLVIII (1987)

Théorèmes de densité dans $F_q[X]$

par

MIREILLE CAR (Marseille)

Introduction. Soit F_q le corps fini à q éléments. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes unitaires de l'anneau $F_q[X]$. Soit I un ensemble de polynômes irréductibles unitaires de $F_q[X]$ et $\mathcal{U}(I)$ l'ensemble des polynômes de $\mathcal{U}$ dont tous les facteurs irréductibles sont dans I. Soit $a(n, I)$ le nombre de polynômes de degré n de $\mathcal{U}(I)$. Dans [6] on démontre que lorsque l'ensemble I vérifie certaines conditions de régularité, on a une estimation asymptotique du nombre $a(n, I)$. Ces conditions de régularité sont par exemple réalisées lorsque I est l'ensemble des polynômes irréductibles de degré congru à r modulo un entier h. Nous imposons maintenant des conditions de régularité d'un autre type. L'ensemble I sera l'ensemble des polynômes irréductibles de degré au plus d (ou au moins d). Nous obtenons des résultats analogues aux résultats connus sur les nombres $\Psi(x, y)$, resp. $\Phi(x, y)$ d'entiers $n \leqslant x$ n'ayant aucun facteur premier $p > y$, resp. $p < y$. On trouvera une démonstration de ces résultats dans [7], [3], [4], [2]. L'estimation des nombres $a(n, I)$ s'exprimera à l'aide de la fonction ϱ de Dickman [7], [1], et de la fonction ω de Buchstab [5]. Nous étudierons les nombres $a(n, I)$ lorsque I est l'un des deux ensembles suivants:

ensemble des polynômes irréductibles de degré inférieur à un nombre y donné,

ensemble des polynômes irréductibles de degré supérieur à un nombre y donné.

Nous indiquerons sans démonstration les résultats que l'on peut obtenir lorsque I est l'ensemble des polynômes irréductibles de degré appartenant à un intervalle (x, y) donné ou lorsque I est le complémentaire d'un tel ensemble et une généralisation possible de certains résultats.

I. Notations et conventions. On désigne par $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $F_q[X]$. Remarquons que

$$\mathrm{Card}(\mathcal{U}_n) = q^n. \tag{I.1}$$

On note Π_n le nombre de polynômes irréductibles appartenant à $\mathcal{U}_n$. On a la relation

$$\Pi_n = n^{-1} q^n - e_n \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant e_n \leqslant 2n^{-1} q^{n/2}, \tag{I.2}$$

relation dont on peut trouver une démonstration élémentaire dans [9].

Nous ne nous intéressons qu'aux polynômes unitaires de $\boldsymbol{F}_q[X]$. Dans ce qui suit le mot polynôme désignera toujours un polynôme unitaire de $\boldsymbol{F}_q[X]$. Si P est un diviseur irréductible du polynôme H nous dirons simplement que P est facteur de H et le mot facteur ne sera utilisé que dans ce sens et désignera toujours un facteur unitaire.

On désigne par $A(n, x])$, resp. $A(n, x[)$, resp. $A(n, [x)$, resp. $A(n,]x)$ l'ensemble $\mathscr{U}_n \cap \mathscr{U}(I)$ lorsque I est l'ensemble des polynômes irréductibles de degré $\leqslant x$, resp. $< x$, resp. $\geqslant x$, resp. $> x$. On désigne par $A(n, [x, y])$, resp. $A(n, [x, y[)$, resp. $A(n,]x, y])$, resp. $A(n,]x, y[)$ l'ensemble $\mathscr{U}_n \cap \mathscr{U}(I)$ lorsque I est l'ensemble des polynômes irréductibles dont le degré appartient à l'intervalle $[x, y]$, resp. $[x, y[$, resp. $]x, y]$, resp. $]x, y[$.

Le symbole $\{x$ désignera l'un ou l'autre des symboles $[x$ ou $]x$; le symbole $y\}$ désignera l'un ou l'autre des symboles $y]$ ou $y[$.

Le nombre d'éléments de l'ensemble $A(n, \cdot)$ sera noté $a(n, \cdot)$.

On désigne par $B(n, \{x, y\})$ l'ensemble $\mathscr{U}_n \cap \mathscr{U}(I)$ lorsque I est l'ensemble des polynômes irréductibles de degré n'appartenant pas à l'intervalle $\{x, y\}$ et par $b(n, \{x, y\})$ le nombre d'éléments de cet ensemble.

Remarquons que si x n'est pas entier, les nombres $a(n, x])$ et $a(n, x[)$ d'une part, et les nombres $a(n,]x)$ et $a(n, [x)$ d'autre part, sont égaux.

Nous conviendrons que toute somme

$$\sum_{j \in J} a_j$$

où l'ensemble J est vide est nulle.

Si une fonction réelle de variable réelle admet en un point x une dérivée à gauche, resp. à droite, cette dérivée sera notée $f'(x_-)$, resp. $f'(x_+)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'indication supplémentaire, les constantes impliquées par les symboles O ou $\ll$ ne dépendent que de q ou sont absolues.

II. Les nombres $a(n, x\})$.

II.1. Quelques cas particuliers. Tout d'abord, on remarque que

$$a(n, x]) = 0 \quad \text{si} \quad x < 1, \qquad a(n, x[) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 1.$$

Proposition II.1. (1) *Soit un nombre réel $x \in [1, 2[$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$a(n, x]) = \frac{(n+q-1)!}{(q-1)!\,n!}, \tag{II.1}$$

et, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$a(n, x]) = \frac{n^{q-1}}{(q-1)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{II.2}$$

(2) *Soit un nombre réel $x \in]1, 2]$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$a(n, x[) = \frac{(n+q-1)!}{(q-1)!\,n!}, \tag{II.3}$$

et, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$a(n, x[) = \frac{n^{q-1}}{(q-1)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{II.4}$$

Démonstration. On note que dans le premier cas $a(n, x]) = a(n, 1])$ et que dans le deuxième cas $a(n, x[) = a(n, 1])$. Or l'ensemble $A(n, 1])$ est l'ensemble des produits

$$\prod_{b \in \boldsymbol{F}_q} (X-b)^{n_b}$$

tels que

$$n_b \geqslant 0, \qquad \sum_{b \in \boldsymbol{F}_q} n_b = n, \tag{i}$$

et le nombre $a(n, 1])$ est égal au nombre de solutions $(n_b)_{b \in \boldsymbol{F}_q}$ de l'équation (i). C'est donc le coefficient de z^n dans le développement en série de la fonction

$$z \mapsto (1-z)^{-q}.$$

Par suite,

$$a(n, 1]) = \frac{(n+q-1)!}{(q-1)!\,n!},$$

et les relations (II.1) et (II.3) s'en déduisent. On obtient les estimations (II.2) et (II.4) à l'aide de la formule de Stirling.

Cette proposition nous permettra de limiter par la suite l'étude des nombres $a(n, x\})$ aux nombres $x \geqslant 2$.

II.2. La fonction ϱ de Dickmann. La fonction ϱ *de Dickman* est une fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ par les conditions

$$\begin{cases} \varrho(x) = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \varrho \text{ est continue en } 1, \text{ dérivable sur }]1, +\infty[, \\ x\varrho'(x) = -\varrho(x-1) \quad \text{si} \quad x \in]1, +\infty[. \end{cases} \tag{II.5}$$

Nous n'utiliserons aucune des propriétés de la fonction ϱ établies en [1] où cette fonction est bien étudiée, mais seulement des propriétés obtenues de façon élémentaire à partir de (II.5).

PROPOSITION II.2. *La fonction ϱ est décroissante, et, pour tout $x \geqslant 0$, on a*

$$0 < \varrho(x) \leqslant 1. \tag{II.6}$$

Démonstration. Immédiate avec (II.5).

PROPOSITION II.3. *Soient un nombre réel y et un entier n tels que $1 \leqslant y \leqslant n$. Alors, on a*

$$\Big|\sum_{y \leqslant j \leqslant n} j^{-1}\varrho\Big(\frac{n-j}{j}\Big)+\varrho\Big(\frac{n}{y}\Big)-1\Big| \leqslant \frac{2}{y}, \tag{II.7}$$

$$-\frac{2}{y}\Big(1+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}q^{-y/2}\Big) \leqslant \sum_{y \leqslant j \leqslant n} q^{-j}\Pi_j\varrho\Big(\frac{n-j}{j}\Big)+\varrho\Big(\frac{n}{y}\Big)-1 \leqslant \frac{2}{y}, \tag{II.8}$$

$$\Big|\sum_{y < j \leqslant n} j^{-1}\varrho\Big(\frac{n-j}{j}\Big)+\varrho\Big(\frac{n}{y}\Big)-1\Big| \leqslant \frac{2}{y}, \tag{II.9}$$

$$-\frac{2}{y}\Big(1+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}q^{-y/2}\Big) \leqslant \sum_{y < j \leqslant n} q^{-j}\Pi_j\varrho\Big(\frac{n-j}{j}\Big)+\varrho\Big(\frac{n}{y}\Big)-1 \leqslant \frac{2}{y}. \tag{II.10}$$

Démonstration. La proposition est triviale si $y = n$. On suppose $y < n$. Si y n'est pas entier, les relations (II.7) et (II.9), resp. (II.8) et (II.10), sont identiques.

La fonction

$$t \mapsto g(t) = \varrho\Big(\frac{n-t}{t}\Big)$$

est croissante sur $[y, n]$. Posons pour $z \in [y, n]$,

$$T(z) = \sum_{y < j \leqslant z} j^{-1}, \tag{1}$$

et, si y est entier,

$$T^*(z) = \sum_{y \leqslant j \leqslant z} j^{-1}. \tag{2}$$

Le symbole * imposant la condition supplémentaire y entier, on a

$$T(z) = \log(z/y)+r(z), \tag{3}$$

avec

$$|r(z)| \leqslant y^{-1}, \tag{4}$$

$$T^*(z) = \log(z/y)+r^*(z), \tag{5}$$

avec

$$0 \leqslant r^*(z) \leqslant y^{-1}. \tag{6}$$

Par sommation partielle, on obtient

$$\sum_{y<j\leqslant n} g(j)j^{-1} = g(n)r(n)+\int_y^n x^{-1}g(x)\,dx-\int_y^n r(x)\,dg(x).$$

La fonction g étant croissante, avec (4) on a

$$\Big|\int_y^n r(x)\,dg(x)\Big| \leqslant y^{-1}\sup(g(n), g(y)),$$

d'où, avec (II.6),

$$\Big|\sum_{y<j\leqslant n} g(j)j^{-1}-\int_y^n g(x)x^{-1}\,dx\Big| \leqslant 2/y.$$

Si y est entier, on procède de même, avec T^* et r^*. La majoration (6) nous permet d'écrire

$$\Big|\sum_{y\leqslant j\leqslant n} g(j)j^{-1}-\int_y^n g(x)x^{-1}\,dx\Big| \leqslant 1/y.$$

D'autre part, avec (II.5), on a

$$\int_y^n g(t)\,dt = \int_y^n t^{-1}\varrho\Big(\frac{n-t}{t}\Big)dt = \int_1^{n/y} t^{-1}\varrho(t-1)\,dt = \varrho(1)-\varrho\Big(\frac{n}{y}\Big) = 1-\varrho\Big(\frac{n}{y}\Big),$$

d'où les relations (II.7) et (II.9).

Les relations (II.8) et (II.10) se déduisent immédiatement des relations (I.2), (II.7) et (II.9).

II.3. Le cas général.

PROPOSITION II.4. *Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ la suite de nombres réels définie par les relations*

$$X_i = A(q)(2^{i-1}-1), \tag{II.11}$$

où

$$A(q) = 3+2(q-\sqrt{q})^{-1}. \tag{II.12}$$

Alors, pour tout entier $i \geqslant 1$, si le nombre réel x et l'entier n vérifient les conditions

$$x \geqslant 2, \quad n/x < i, \tag{II.13}$$

on a

(II.14) $$|a(n, x[) - q^n \varrho(n/x)| \leqslant X_i q^n x^{-1},$$

si le nombre réel x et l'entier n vérifient les conditions

(II.15) $$x \geqslant 2, \quad n/x \leqslant i,$$

on a

(II.16) $$|a(n, x]) - q^n \varrho(n/x)| \leqslant X_i q^n x^{-1}.$$

Démonstration. (A) Soient un nombre réel $x \geqslant 2$ et un entier $n < x$. Alors,

$$A(n, x[) = \mathscr{U}_n \quad \text{et} \quad a(n, x[) = q^n.$$

Avec (II.5) on voit que (II.14) est vérifiée pour $i = 1$.

(B) Soit un entier $i \geqslant 1$. On suppose qu'il existe un nombre réel $A_i \geqslant 0$ tel que pour tout nombre réel u, pour tout entier m vérifiant les conditions

(C_i) $$2 \leqslant u, \quad m/u < i,$$

on ait

(R_i) $$|a(m, u[) - q^m \varrho(m/u)| \leqslant A_i q^m u^{-1}.$$

Soient alors, un nombre réel x et un entier n vérifiant les conditions

(C_{i+1}) $$2 \leqslant x, \quad n/x < i+1.$$

Si $n/x < i$ on écrit (R_i). On suppose $n/x \geqslant i$ ce qui implique $n \geqslant x$. Soient $A'(n, x[)$ le complémentaire de $A(n, x[)$ dans $\mathscr{U}_n$ et $a'(n, x[)$ le nombre d'éléments de $A'(n, x[)$. On a

(1) $$q^n = a(n, x[) + a'(n, x[).$$

Soit $H \in A'(n, x[)$. Alors H est de degré n et H possède un facteur P de degré $\geqslant x$, et, compte tenu de (C_{i+1}), H a au plus i facteurs de degré $\geqslant x$. Soit $d \geqslant x$ le degré maximal des facteurs de H. Si H a exactement r facteurs de degré d, H s'écrit de façon unique comme produit

$$P_1 \ldots P_r K$$

où $K \in A(n-rd, d[)$.

Désignons par $\gamma_r(d)$ le nombre de polynômes s'écrivant comme produits

$$P_1 \ldots P_r$$

où $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes irréductibles de degré d. Alors, on a

(2) $$a'(n, x[) = \sum_{r=1}^{i} \sum_{x \leqslant d \leqslant n/r} \gamma_r(d)\, a(n-rd, d[).$$

Si $r = 1, \ldots, i$, si $x \leqslant d \leqslant n/r$,

$$(n-rd)/d \leqslant n/x - r < i+1-r \leqslant i.$$

La relation (R_i) s'appliquera aux nombres $a(n-rd, d[)$. Toutefois on appliquera la relation (II.14) aux nombres $a(n-id, d[)$, ce qui est possible d'après le (A).

Sauf dans le cas $r = 1$, nous n'utiliserons pas la valeur exacte des nombres $\gamma_r(d)$ mais la majoration triviale

$$\gamma_r(d) \leqslant \Pi_d^r \leqslant q^{rd} d^{-r}.$$

Posons

(3) $$b_1 = \sum_{x \leqslant d \leqslant n} \Pi_d\, a(n-d, d[),$$

(4) $$b_2 = \sum_{r=2}^{i} \sum_{x \leqslant d \leqslant n/r} d^{-r} q^{rd}\, a(n-rd, d[).$$

Avec (2) il vient

(5) $$0 \leqslant a'(n, x[) - b_1 \leqslant b_2.$$

Les relations (R_i) et (II.6) nous donnent pour $r = 2, \ldots, i-1$, $x \leqslant d \leqslant n/r$,

$$a(n-rd, d[) \leqslant q^{n-rd} + A_i q^{n-rd} d^{-1}.$$

On a aussi

$$a(n-id, d[) = q^{n-id},$$

d'où,

(6) $$q^{-n} b_2 \leqslant \sum_{r=2}^{i} \sum_{x \leqslant d \leqslant n/r} (d^{-r} + A_i d^{-r-1}) + \sum_{x \leqslant d \leqslant n/i} d^{-i}.$$

Avec (R_i) on a

$$\left|a(n-d, d[) - q^{n-d} \varrho\left(\frac{n-d}{d}\right)\right| \leqslant A_i q^{n-d} d^{-1},$$

d'où,

$$\left|q^{-n} b_1 - \sum_{x \leqslant d \leqslant n} q^{-d} \Pi_d\, \varrho\left(\frac{n-d}{d}\right)\right| \leqslant A_i \sum_{x \leqslant d \leqslant n} q^{-d} d^{-1} \Pi_d.$$

Les relations (II.8) et (I.2) nous donnent

(7) $$\left|q^{-n} b_1 + \varrho\left(\frac{n}{x}\right) - 1\right| \leqslant \frac{\alpha(q)}{x} + A_i \sum_{x \leqslant d \leqslant n} d^{-2},$$

où

(8) $$\alpha(q) = 1 + 2(q - \sqrt{q})^{-1}.$$

Avec (1), (5), (6) et (7) on a

$$|q^{-n} a(n, x[) - \varrho(n/x)| \leqslant \frac{\alpha(q)}{x} + (1 + A_i) \sum_{r=2}^{i} \sum_{x \leqslant d \leqslant n/(r-1)} d^{-r}$$
$$\leqslant \frac{\alpha(q)}{x} + (1 + A_i) \sum_{x \leqslant d \leqslant n} \sum_{r \geqslant 2} d^{-r} \leqslant \frac{\alpha(q)}{x} + (1 + A_i)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{n}\right),$$

d'où,

(R_{i+1}) $$|a(n, x[) - q^n \varrho(n/x)| \leqslant A_{i+1} q^n x^{-1},$$

avec

(9) $$A_{i+1} = \alpha(q) + 2 + 2A_i.$$

On remarque que $A_{i+1} \geqslant A_i$ et que (R_{i+1}) reste vraie sans la restriction $n/x \geqslant i$.

Si l'on pose $A_1 = 0$, la relation (9) montre que $A_i = X_i$ pour tout entier $i \geqslant 1$, et, compte tenu de (A), la relation (II.14) est établie pour tout $i \geqslant 1$.

(C) Soient un nombre réel $x \geqslant 2$ et un entier $n \geqslant 0$.

(C.1) Si $x \geqslant n$,

$$a(n, x]) = q^n = q^n \varrho(n/x)$$

et (II.16) est vérifiée pour $i = 1$.

(C.2) Sinon, soit un entier i tel que $i < n/x \leqslant i + 1$.

Comme au (B) on pose

(1*) $$q^n = a(n, x]) + a'(n, x]).$$

Par des arguments analogues à ceux utilisés au (B) on obtient la relation

(2*) $$a'(n, x]) = \sum_{r=1}^{i} \sum_{x < d \leqslant n/r} \gamma_r(d)\, a(n - rd, d[).$$

Posons

(3*) $$b_1^* = \sum_{x < d \leqslant n} \Pi_d\, a(n-d, d[).$$

Avec (2*) et (3*) on a

(4*) $$0 \leqslant a'(n, x]) - b_1^* \leqslant b_2^*$$

où

(5*) $$b_2^* = \sum_{r=2}^{i} \sum_{x < d < n/r} \gamma_r(d)\, a(n - rd, d[).$$

Si $r \in \{1, \ldots, i\}$, si $d > x$, on a

$$(n - rd)/d < n/x - r \leqslant i + 1 - r,$$

et la relation (II.14) s'applique aux nombres $a(n - rd, d[)$. On majore alors b_2^* comme on a majoré b_2. D'autre part, les relations (II.14) et (I.2) nous donnent

$$\left|q^{-n} b_1^* - \sum_{x < d \leqslant n} q^{-d} \Pi_d\, \varrho\left(\frac{n-d}{d}\right)\right| \leqslant X_i \sum_{x < d \leqslant n} d^{-2},$$

d'où, avec (II.10) et (8)

(6*) $$\left|q^{-n} b_1^* + \varrho\left(\frac{n}{x}\right) - 1\right| \leqslant \frac{\alpha(q)}{x} + X_i \sum_{x < d \leqslant n} d^{-2}.$$

On achève la démonstration comme au (B) et on trouve

$$|a(n, x]) - q^n \varrho(n/x)| \leqslant X_{i+1} q^n x^{-1},$$

ce qui établit (II.16) pour tout entier $i \geqslant 1$.

Remarque. Cette proposition donne une bonne estimation des nombres $a(n, x\})$ pour x fixé et n tendant vers $+\infty$. Si x varie en fonction de n, l'estimation des nombres $a(n, x\})$ donnée par cette proposition n'est intéressante que si x reste assez grand par rapport à n. La restriction $x \geqslant 2$ que l'on a apportée pour simplifier les calculs n'est donc pas très importante.

Les deux résultats établis ci-dessus peuvent se résumer dans le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour tout nombre réel $T > 0$, pour tout entier $n \geqslant 2T$, on a*

(II.17) $$|a(n, n/T\}) - q^n \varrho(T)| \leqslant A(q)\, T(2^T - 1)\, q^n n^{-1},$$

où

$$A(q) = 3 + 2(q - \sqrt{q})^{-1}.$$

Démonstration. Soient un nombre réel $T > 0$ et un entier $n \geqslant 2T$. On suppose T non entier. Soit i l'entier déterminé par les conditions

$$i < T < i + 1.$$

Alors, n et n/T vérifient les conditions (II.13) et (II.15). Avec (II.14) et (II.16) on a

$$\left|a\left(n, \frac{n}{T}\right\}\right) - q^n \varrho(T)\right| \leqslant X_{i+1} q^n \frac{T}{n},$$

où

$$X_{i+1} = A(q)(2^i - 1) < A(q)(2^T - 1),$$

et (II.17) est vérifiée.

On suppose T entier ne divisant pas n. Alors, $a(n, n/T]) = a(n, n/T[)$ et avec (II.16) on a

$$\left|a\Bigl(n, \frac{n}{T}\Bigr\}\Bigr) - q^n \varrho(T)\right| \leqslant X_T q^n \frac{T}{n},$$

d'où, (II.17).

Enfin, si T est un entier divisant n, on a avec (II.14) et (II.16)

$$\left|a\Bigl(n, \frac{n}{T}\Bigl[\Bigr) - q^n \varrho(T)\right| \leqslant X_{T+1} q^n \frac{T}{n},$$

$$\left|a\Bigl(n, \frac{n}{T}\Bigr]\Bigr) - q^n \varrho(T)\right| \leqslant X_T q^n \frac{T}{n},$$

d'où, (II.17).

III. Les nombres $a(n, \{y)$.

III.1. Quelques cas particuliers.

Proposition III.1. *Soient un nombre réel* $y > 0$ *et un entier* $n > 0$. *Alors, on a*

(III.1) $\qquad a(n, [y) = 0 \quad si \quad y > n,$

(III.2) $\qquad a(n,]y) = 0 \quad si \quad y \geqslant n,$

(III.3) $\qquad a(n, [y) = q^n \quad si \quad y \leqslant 1,$

(III.4) $\qquad a(n,]y) = q^n \quad si \quad y < 1.$

Démonstration. Immédiate.

Par la suite, on limitera l'étude des nombres $a(n, [y)$, resp. $a(n,]y)$, aux nombres y tels que $1 < y \leqslant n$, resp. $1 \leqslant y < n$.

III.2. La fonction ω de Buchstab. La fonction ω *de Buchstab* est définie sur $[1, +\infty[$ par les conditions

(III.5) $$\begin{cases} \omega(x) = 1/x & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \omega \text{ est continue en 2, dérivable sur }]2, +\infty[, \\ (x\omega(x))' = \omega(x-1) & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Proposition III.2. (1) *Pour tout nombre* $x \in [1, +\infty[$, *on a*

(III.6) $$0 < \omega(x) \leqslant 1.$$

(2) *La fonction* ω *admet au point* 2 *une dérivée à droite et à gauche et, pour tout* $x \in [1, +\infty[$, *on a*

(III.7) $$|\omega'(x_\pm)| \leqslant 1/x.$$

Démonstration. (1) La relation (III.6) est vérifiée pour $1 \leqslant x \leqslant 2$. Grâce aux conditions (III.5), on démontre par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$ que (III.6) est vraie pour tout $x \in [1, n]$.

(2) Les relations (III.5) montrent que ω est dérivable à gauche et à droite au point 2 et que

$$\omega'(2_+) = 1/4, \qquad \omega'(2_-) = -1/4.$$

Par suite, (III.7) est vérifiée pour $x = 2$. Pour $x \neq 2$, la dernière des conditions (III.5) et (III.6) donnent (III.7).

Proposition III.3. *Soient un entier* $i \geqslant 2$, *un entier* n *et un nombre réel* $y \geqslant 1$ *tels que* $i < n/y \leqslant i+1$.

Soient

(III.8) $$S(i, n, y) = \sum_{y < j \leqslant n/i} j^{-2} \omega\left(\frac{n-j}{j}\right),$$

(III.9) $$T(i, n, y) = \sum_{y \leqslant j \leqslant n/i} j^{-2} \omega\left(\frac{n-j}{j}\right),$$

(III.10) $$s(i, n, y) = \sum_{y < j \leqslant n/i} q^{-j} j^{-1} \Pi_j \omega\left(\frac{n-j}{j}\right),$$

(III.11) $$t(i, n, y) = \sum_{y \leqslant j \leqslant n/i} q^{-j} j^{-1} \Pi_j \omega\left(\frac{n-j}{j}\right).$$

Alors, on a

(III.12) $$\left|S(i, n, y) - y^{-1} \omega\left(\frac{n}{y}\right) + \frac{i}{n} \omega(i)\right| \leqslant (1 + \log 2) y^{-2},$$

(III.13) $$\left|T(i, n, y) - y^{-1} \omega\left(\frac{n}{y}\right) + \frac{i}{n} \omega(i)\right| \leqslant (1 + \log 2) y^{-2},$$

(III.14) $$\left|s(i, n, y) - y^{-1} \omega\left(\frac{n}{y}\right) + \frac{i}{n} \omega(i)\right| \leqslant \left(1 + \log 2 + \frac{2}{\sqrt{q} - 1}\right) y^{-2},$$

(III.15) $$\left|t(i, n, y) - y^{-1} \omega\left(\frac{n}{y}\right) + \frac{i}{n} \omega(i)\right| \leqslant \left(1 + \log 2 + \frac{2}{\sqrt{q} - 1}\right) y^{-2}.$$

Démonstration. On remarque que si y n'est pas entier

$$S(i, n, y) = T(i, n, y), \qquad s(i, n, y) = t(i, n, y).$$

On pose $v = n/i$ et, pour $x \in [y, v]$,

(1) $$g(x) = \omega\left(\frac{n-x}{x}\right),$$

(2) $$S_1(x) = \sum_{y<j\leqslant x} j^{-2},$$

(3) $$S_2(x) = \sum_{y\leqslant j\leqslant x} j^{-2}, \quad \text{si } y \text{ est entier.}$$

On a

(4) $$S_1(x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + r_1(x) \quad \text{où} \quad |r_1(x)| \leqslant y^{-2},$$

(5) $$S_2(x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + r_2(x) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant r_2(x) \leqslant y^{-2}.$$

La fonction g est dérivable sur $[y, v]$ sauf au point $n/3$ si celui-ci appartient à l'intervalle $[y, v]$, et, dans ce cas, g admet en $n/3$ des dérivées à droite et à gauche.

Par sommation partielle, il vient

(6) $$S(i, n, y) = \int_y^v x^{-2} g(x)\,dx + R_1(i, n, y),$$

(7) $$T(i, n, y) = \int_y^v x^{-2} g(x)\,dx + R_2(i, n, y),$$

où, pour $k = 1, 2$,

(8) $$R_k(i, n, y) = r_k(v)\,g(v) - \int_y^v r_k(x)\,dg(x).$$

La relation (III.7) nous donne

$$|g'(x_{\pm})| \leqslant n x^{-1}(n-x)^{-1},$$

d'où, avec (III.6), (4), (5) et (8),

$$|R_k(i, n, y)| \leqslant y^{-2} + y^{-2}\log\left(\frac{v(n-y)}{y(n-v)}\right),$$

(9) $$|R_k(i, n, y)| \leqslant y^{-2}(1+\log 2).$$

Avec (III.5) on a facilement l'égalité

$$\int_y^v x^{-2} g(x)\,dx = \frac{1}{y}\,\omega\left(\frac{n}{y}\right) - \frac{1}{v}\,\omega\left(\frac{n}{v}\right).$$

On déduit alors, (III.12) et (III.13) des relations (6), (7) et (9). Avec (I.2) et

(III.6), on a

$$0 \leqslant S(i, n, y) - s(i, n, y) \leqslant T(i, n, y) - t(i, n, y) \leqslant 2\sum_{j\geqslant y} q^{-j/2} j^{-2}$$

$$\leqslant 2y^{-2} q^{-y/2}\sqrt{q}(\sqrt{q}-1)^{-1} \leqslant (2/(\sqrt{q}-1))\,y^{-2},$$

et les relations (III.14) et (III.15) découlent alors de (III.12) et (III.13).

III.3. Le cas général.

Proposition III.4. *Soit $(Y_i)_{i\geqslant 2}$ la suite de nombres réels définie par les relations*

(III.16) $$Y_2 = B(q),$$

(III.17) $$Y_{i+3} = 2^{i+1}B(q) + (2^{i+1}-1)\,C(q) \quad \textit{pour} \quad i \geqslant 0,$$

où

(III.18) $$B(q) = 2\sup_{k\geqslant 1}(kq^{-k/2}),$$

(III.19) $$C(q) = 3 + \log 2 + 2(\sqrt{q}-1)^{-1}.$$

Alors, pour tout entier $j \geqslant 2$, si le nombre y et l'entier n vérifient les conditions

(III.20) $$y \geqslant 1, \quad 1 < n/y \leqslant j,$$

on a

(III.21) $$|a(n,]y) - y^{-1} q^n \omega(n/y)| \leqslant Y_j q^n y^{-2}.$$

Démonstration. (A) Soient un nombre réel y et un entier n tels que $1 \leqslant y < n \leqslant 2y$. Alors, $A(n,]y)$ est l'ensemble des polynômes irréductibles de degré n, d'où,

$$a(n,]y) = \Pi_n.$$

Les relations (I.2) et (III.5) nous donnent

$$\left|a(n,]y) - \frac{q^n}{y}\,\omega\left(\frac{n}{y}\right)\right| \leqslant \frac{2q^{n/2}}{n} = 2\frac{q^n}{y^2}\left(\frac{y^2}{n} q^{-n/2}\right) \leqslant 2\frac{q^n}{y^2}(yq^{-y/2})$$

et (III.21) est vérifiée pour $j = 2$.

(B) Soit un entier $i \geqslant 2$. On fait l'hypothèse suivante. Si le nombre v et l'entier m vérifient les conditions

(C_i) $$v \geqslant 1, \quad 1 < m/v \leqslant i,$$

alors,

(R_i) $$|a(m,]v) - v^{-1} q^m \omega(m/v)| \leqslant Y_i q^m v^{-2}.$$

Soient alors, un nombre y et un entier n vérifiant les conditions

$$(C_{i+1}) \qquad y \geqslant 1, \quad 1 < n/y \leqslant i+1.$$

(B.1) Si $n/y \leqslant i$, on écrit (R_i).
(B.2) On suppose $n/y > i$. On pose

$$(1) \qquad v = n/i.$$

Les nombres v et n vérifient (C_i), d'où,

$$(2) \qquad |a(n,]v) - v^{-1} q^n \omega(n/v)| \leqslant Y_i q^n v^{-2}.$$

Soit H un polynôme de $A(n,]y)$ n'appartenant pas à $A(n,]v)$. Soit d le degré minimal des facteurs de H et r le nombre de facteurs de H de degré d. On a

$$y < d \leqslant v.$$

On écrit H comme produit

$$P_1 \ldots P_r K$$

où $P_1, \ldots, P_r$ sont les r facteurs de H de degré d, où $K \in A(n-rd,]d)$. Or, pour $d \geqslant n-rd \geqslant 1$ l'ensemble $A(n-rd,]d)$ est vide.

On a

$$i = n/v \leqslant n/d < n/y \leqslant i+1,$$

et n/d n'est entier que si $d = v$. On ne peut avoir $n-rd = 0$ que si $r = i$ et $d = v$. Sinon, $n-rd \geqslant 1$, et l'ensemble $A(n-rd,]d)$ est vide si $r+1 \geqslant n/d$. On n'aura à considérer que les entiers r tels que $r+1 < n/d \leqslant i+1$, d'où

$$(3) \qquad a(n,]y) - a(n,]v) = \sum_{r=1}^{i-1} \sum_{y<d\leqslant v} a(n-rd,]d)\, \gamma_r(d) + \gamma_i^*(v)$$

où $\gamma_r(d)$ désigne toujours le nombre de polynômes ayant exactement r facteurs de degré d et n'ayant pas d'autres facteurs, où $\gamma_i^*(v) = 0$ si v n'est pas entier, où $\gamma_i^*(v) = \gamma_i(v)$ si v est entier.

Si $r = 1, \ldots, i-1$, si $y < d \leqslant v$,

$$\frac{n-rd}{d} < \frac{n}{y} - r \leqslant i+1-r \leqslant i.$$

La relation (R_i) s'appliquera aux nombres $a(n-rd,]d)$. Posons

$$(4) \qquad \beta_1 = \sum_{y<d\leqslant v} a(n-d,]d)\, \Pi_d,$$

$$(5) \qquad \beta_2 = \sum_{r=2}^{i-1} \sum_{y<d\leqslant v} a(n-rd,]d)\, q^{-dr} r^{-d}.$$

Avec (3) on a

$$(6) \qquad 0 \leqslant a(n,]y) - a(n,]v) - \beta_1 \leqslant \beta_2 + \gamma_i^*(v).$$

Si $r \in \{2, \ldots, i-1\}$, si $y < d \leqslant v$, avec (III.6) et (R_i) on a

$$a(n-rd,]d) \leqslant d^{-1} q^{n-rd} + Y_i d^{-2} q^{n-rd},$$

d'où,

$$(7) \qquad q^{-n} \beta_2 \leqslant \sum_{r=2}^{i-1} \sum_{y<d\leqslant v} d^{-r-1} + Y_i d^{-r-2}.$$

On a aussi pour $y < d \leqslant v$,

$$\left| a(n-d,]d) - q^{n-d} d^{-1} \omega\left(\frac{n-d}{d}\right) \right| \leqslant Y_i q^{n-d} d^{-2}$$

d'où,

$$\left| q^{-n} \beta_1 - \sum_{y<d\leqslant v} q^{-d} \Pi_d\, \omega\left(\frac{n-d}{d}\right) \right| \leqslant Y_i \sum_{y<d\leqslant v} q^{-d} d^{-1} \Pi_d.$$

Les relations (1), (III.14) et (I.2) nous donnent alors

$$(8) \qquad \left| q^{-n} \beta_1 - y^{-1} \omega\left(\frac{n}{y}\right) + \frac{i}{n} \omega\left(\frac{n-d}{d}\right) \right| \leqslant Y_i \sum_{y<d\leqslant v} d^{-3} + C'(q)\, y^{-2}$$

avec

$$(9) \qquad C'(q) = 1 + \log 2 + 2/(\sqrt{q}-1).$$

Avec (1), (2), (6), (7) et (8) il vient

$$(10) \qquad |q^{-n} a(n,]y) - y^{-1} \omega(n/y)| \leqslant C'(q)\, y^{-2} + \Sigma(i, y, v),$$

où

$$(11) \qquad \Sigma(i, y, v) = Y_i\Big(v^{-2} + \sum_{y<d\leqslant v} d^{-i-1}\Big) + (1+Y_i) \sum_{r=3}^{i} \sum_{y<d\leqslant v} d^{-r} + \gamma_i^*(v)\, q^{-n}.$$

On a

$$\gamma_i^*(v) \leqslant q^{iv}/v^i \leqslant q^n/v^i.$$

Des majorations élémentaires nous donnent

$$(12) \qquad \Sigma(2, y, v) \leqslant (2Y_2 + 1)\, y^{-2},$$

$$(13) \qquad \Sigma(i, y, v) \leqslant 2(1+Y_i)\, y^{-2} \quad \text{si} \quad i > 2.$$

Avec (9) et (10) on a

$$(R_{i+1}) \qquad \left| q^{-n} a(n,]y) - y^{-1} \omega\left(\frac{n}{y}\right) \right| \leqslant B_{i+1}\, y^{-2},$$

où

$$B_{i+1} = C'(q)+2Y_2+1 < Y_3 \quad \text{si} \quad i = 2,$$
$$B_{i+1} = C'(q)+2+2Y_i = Y_{i+1} \quad \text{si} \quad i > 2.$$

La relation (R_{i+1}) restant vraie si la condition $n/y > i$ n'est pas remplie, la relation (III.21) est démontrée par récurrence sur l'entier j.

PROPOSITION III.5. *Soit $(Z_i)_{i\geq 2}$ la suite de nombres réels définie par les relations*

(III.22) $$Z_2 = 2\sup\left(1+\frac{2}{q^2}, \frac{4}{q}+\frac{2}{q^3}\right),$$

(III.23) $$Z_i = Y_i \quad \textit{pour} \quad i \geq 3.$$

Alors, pour tout entier $j \geq 2$, si le nombre réel y et l'entier n vérifient les conditions

(III.24) $$y > 1, \quad 1 \leq n/y \leq j,$$

on a

(III.25) $$|a(n, [y) - y^{-1}q^n\omega(n/y)| \leq Z_j y^{-2} q^n.$$

Démonstration. On a $Y_i \leq Z_i$ pour tout $i \geq 2$. Si y n'est pas entier, $a(n, [y) = a(n,]y)$, et, dans ce cas, la proposition III.5 se déduit de la proposition III.4.

On ne démontrera la proposition III.5 qu'avec l'hypothèse supplémentaire:

$$y \text{ est entier.}$$

Dans ce cas, la condition (III.24) s'écrit

$$y \geq 2, \quad 1 \leq n/y \leq j.$$

(A) On suppose $1 \leq n/y < 2$. On a

(1) $$a(n, [y) = \Pi_n.$$

(B) On suppose $n = 2y$. L'ensemble $A(n, [y)$ est constitué par l'ensemble des polynômes irréductibles de degré n et par l'ensemble des produits PQ où P et Q sont des polynômes irréductibles de degré y, d'où,

$$a(n, [y) = \Pi_n + \tfrac{1}{2}\Pi_y(\Pi_y+1).$$

Avec (I.2) on a

(2) $$a(n, [y) - n^{-1}q^n \leq 2(1+2q^{-2})n^{-2}q^n,$$

(3) $$a(n, [y) - n^{-1}q^n \geq -4(q^{-3}+2q^{-1})n^{-2}q^n.$$

Les relations (1), (2) et (3) nous donnent pour $1 \leq n/y \leq 2$,

$$|a(n, [y) - q^n y^{-1}\omega(n/y)| \leq B^*(q)q^n n^{-2},$$

où

$$B^*(q) = \sup\left(B(q), 2(1+2q^{-2}), 4(q^{-3}+2q^{-1})\right),$$

et la relation (III.25) est vérifiée pour $i = 2$.

(C) Soit un entier $i \geq 2$. Soient y et n des entiers tels que

$$y \geq 2, \quad i < n/y \leq i+1.$$

On pose

(4) $$v = n/i.$$

Les nombres n et v vérifient les conditions (III.20), d'où,

(5) $$|a(n,]v) - q^n v^{-1}\omega(n/v)| \leq Y_i q^n v^{-2}.$$

Avec des arguments analogues à ceux développés pour la démonstration de la proposition III.4 on montre que

(6) $$0 \leq a(n, [y) - a(n,]v) - \beta_1^* \leq \beta_2^* + \gamma_i^*(v)$$

où

(7) $$\beta_1^* = \sum_{y\leq d\leq v} a(n-d,]d),$$

(8) $$\beta_2^* = \sum_{r=2}^{i-1}\sum_{y\leq d\leq v} q^{n-rd}d^{-r}a(n-rd,]d),$$

$\gamma_i^*(v)$ étant défini comme à la proposition III.4.

On procède comme pour la proposition précédente, la seule modification consistant à remplacer dans toutes les relations la condition $y < d \leq v$ par la condition $y \leq d \leq v$. On utilise (III.15) au lieu de (III.14). On obtient

(9) $$|q^{-n}a(n, [y) - y^{-1}\omega(n/y)| \leq C'(q)y^{-2} + \Sigma^*(i, y, v),$$

où

(10) $$\Sigma^*(i, y, v) \leq Y_i\Big(v^{-2} + \sum_{y\leq d\leq v} d^{-i-1}\Big) + (1+Y_i)\sum_{r=3}^{i-1}\sum_{y\leq d\leq v} d^{-r}.$$

Des majorations élémentaires nous donnent

(11) $$\Sigma^*(2, y, v) \leq (1+\tfrac{3}{2}Y_2)y^{-2},$$

(12) $$\Sigma^*(i, y, v) \leq 2(1+Y_i)y^{-2} \quad \text{si} \quad i > 2.$$

Avec (9), (11) et (12) il vient

$$|q^{-n} a(n, [y) - y^{-1}\omega(n/y)| \leqslant B_{i+1}^* y^{-2}$$

avec

$$B_3^* = C(q) + \tfrac{3}{2} Y_2 \leqslant Y_3,$$
$$B_{i+1}^* = C(q) + 2Y_i = Y_{i+1} \quad \text{si} \quad i > 2,$$

ce qui établit (III.25) pour $j = i+1$.

THÉORÈME 2. *Pour tout nombre réel $T > 1$, pour tout entier $n > T$, on a*

$$\left|a\left(n, \left\{\frac{n}{T}\right)\right) - \frac{T}{n}\omega(T)\right| \leqslant K(q) q^n n^{-2} \quad si \quad T \leqslant 2, \tag{III.26}$$

$$\left|a\left(n, \left\{\frac{n}{T}\right)\right) - \frac{T}{n}\omega(T)\right| \tag{III.27}$$
$$\leqslant T^2\left(2^T B(q) + (2^{T-1}-1)C(q) + 2(2^{T-2}-1)\right) q^n n^{-2} \quad si \quad T > 2,$$

où

$$K(q) = 8\sup(1 + 2q^{-2}, 4q^{-1} + 2q^{-3}). \tag{III.28}$$

Démonstration. Soit j l'entier déterminé par les conditions

$$j - 1 < T \leqslant j.$$

Si n/T n'est pas entier, on applique l'une où l'autre des propositions précédentes. Si n/T est entier, on applique la proposition III.4 aux nombres $a(n,]n/T)$ et la proposition III.5 aux nombres $a(n, [n/T)$. Dans tous les cas, on a

$$\left|a(n, \{n/T) - \frac{T}{n} q^n \omega(T)\right| \leqslant Z_j q^n n^{-2} T^2,$$

où

$$Z_j = \begin{cases} 2\sup(1+2q^{-2}, 4q^{-1}+2q^{-3}) & \text{si} \quad j = 2, \\ 2^{j-1}B(q) + (2^{j-2}-1)C(q) + 2(2^{j-3}-1) & \text{si} \quad j > 2, \end{cases}$$

d'où, (III.26) et (III.27).

IV. Compléments. Dans ce chapitre nous indiquons sans démonstration les résultats que l'on peut obtenir par des méthodes élémentaires analogues aux méthodes développées aux chapitres II et III.

IV.1. Les nombres $a(n, \{u, v\})$. L'estimation des nombres $a(n, \{u, v\})$ s'exprime à l'aide d'une fonction σ qui est une extension de la fonction σ introduite dans [8].

La *fonction* σ est une fonction à valeurs réelles définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par les relations

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = 0 & \text{si} \quad x \geqslant y \text{ ou si } x < y < 1, \\ \sigma(x, y) = \omega(y) & \text{si} \quad x < 1 \leqslant y, \\ \sigma(x, y) = \omega(y) - 1/y & \text{si} \quad 1 < x \leqslant y/(y-1) \text{ et } y > x, \end{cases} \tag{IV.1}$$

$$\sigma(z, y) - \sigma(x, y) = \int_x^z \sigma\left(t-1, y(1-1/t)\right) t^{-1}\, dt \quad \text{si} \quad 1 \leqslant x, z < y. \tag{IV.2}$$

On a alors le

THÉORÈME 3. *Soit un nombre réel $y > 0$. Alors, il existe une constante $L(y)$ telle que pour tout entier $n > 0$, pour tout nombre réel x vérifiant les conditions*

$$x \leqslant y, \quad (x, y) \neq (1, 1), \quad (x, y) \neq (n, n), \tag{IV.3}$$

on ait

$$\left|a\left(n, \left\{\frac{n}{y}, \frac{n}{x}\right\}\right) - \frac{y}{n}\sigma(x, y) q^n\right| \leqslant L(y) q^n n^{-2}, \tag{IV.4}$$

avec

$$L(y) \leqslant y^2 2^y. \tag{IV.5}$$

IV.2. Les nombres $b(n, \{u, v\})$. L'estimation des nombres $b(n, \{u, v\})$ s'exprime à l'aide d'une fonction θ qui est la restriction de la fonction f_0 introduite dans [10].

La *fonction* θ est une fonction à valeurs réelles définie sur $]0, 1]\times[0, +\infty[$ par les relations

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \varrho(y/x) & \text{si} \quad y < 1, \\ 1 - \int_x^1 \theta(u, y-u) u^{-1}\, du & \text{si} \quad y \geqslant 1. \end{cases} \tag{IV.6}$$

On a alors le

THÉORÈME 4. *Soient $x \in]0, 1]$ et $y \in]0, +\infty[$. Alors, il existe une constante $M(x, y)$ telle que pour tout entier $n > 0$, on ait*

$$\left|b\left(n, \left\{x\frac{n}{y}, \frac{n}{y}\right\}\right) - q^n \theta(x, y)\right| \leqslant M(x, y) q^n n^{-1}, \tag{IV.7}$$

avec

$$M(x, y) \leqslant \frac{y}{x} 2^{y/x}. \tag{IV.8}$$

IV.3. Les nombres $f_k(n, I)$ **et** $g_k(n, I)$. Pour tout polynôme H, notons

$$H = \prod_P{}' P^{v_P(H)}$$

la factorisation de H en produits de facteurs irréductibles. Soit I un ensemble de polynômes irréductibles. On pose

$$\Omega_I(H) = \sum_{P \in I} v_P(H),$$

$$\omega_I(H) = \sum_{\substack{P \in I \\ v_P(H) > 0}} 1.$$

Soit un entier $k \geqslant 0$. On désigne par $F_k(n, I)$, resp. $G_k(n, I)$ l'ensemble des polynômes H de $\mathscr{U}_n$ tels que

$$\Omega_I(H) = k, \quad \text{resp.} \quad \omega_I(H) = \Omega_I(H) = k,$$

et par $f_k(n, I)$, resp. $g_k(n, I)$ le nombre d'éléments de ces ensembles. On pose

$$f_k(n, [x) = f_k(n, I_x), \quad f_k(n, [x, y]) = f_k(n, I_{[x,y]})$$

où I_x désigne l'ensemble des polynômes irréductibles P tels que $d^\circ P \geqslant x$, où $I_{[x,y]}$ désigne l'ensemble des polynômes irréductibles de degré $d^\circ P \in [x, y]$.

On définit de la même façon les nombres $f_k(n,]x)$, $f_k(n,]x, y])$, $g_k(n,]x)$, $g_k(n,]x, y])$.

Par récurrence sur l'entier k, on obtient une estimation asymptotique de ces nombres. Ces estimations s'expriment à l'aide des fonctions ϱ_k et θ_k.

Les fonctions ϱ_k sont des fonctions réelles définies sur $[0, +\infty[$ par les relations

$$\text{(IV.9)} \quad \begin{cases} \varrho_0(x) = \varrho(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ \varrho_1(x) = 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1, \\ \varrho_1(x) = \int_1^x \varrho(x-t)\, t^{-1}\, dt & \text{si} \quad x > 1, \\ (k+1)\, \varrho_{k+1}(x) = \int_1^x \varrho_k(x-t)\, t^{-1}\, dt & \text{si} \quad k \geqslant 1. \end{cases}$$

On a le

THÉORÈME 5. *Pour tout entier $k \geqslant 0$, pour tout nombre réel $T > 0$, il existe une constante $H(k, T)$ telle que pour tout entier $n > 0$, on ait*

$$\text{(IV.10)} \quad |f_k(n,]n/T) - q^n \varrho_k(T)| \leqslant H(k, T)\, q^n n^{-1},$$

$$\text{(IV.11)} \quad |g_k(n,]n/T) - q^n \varrho_k(T)| \leqslant H(k, T)\, q^n n^{-1},$$

avec

$$\text{(IV.12)} \quad H(k, T) \ll T \frac{2^{T-k}}{k!} (\log T)^k \quad si \quad T > k,$$

$$\text{(IV.13)} \quad H(k, T) = 0 \quad si \quad T \leqslant k.$$

Les fonctions θ_k sont définies sur $]0, 1] \times \boldsymbol{R}$ par les relations

$$\text{(IV.14)} \quad \begin{cases} \theta_k(x, y) = 0 & \text{si} \quad y < 0, \\ \theta_0(x, y) = \theta(x, y) & \text{si} \quad y \geqslant 0, \\ (k+1)\, \theta_{k+1}(x, y) = \int_x^1 \theta_k(x, y-t)\, t^{-1}\, dt & \text{pour} \quad k \geqslant 0. \end{cases}$$

A l'aide de ces fonctions on peut écrire le

THÉORÈME 6. *Pour tout entier $k \geqslant 0$, pour tout couple (x, y) de nombres réels tels que $x \in]0, 1]$, $y > 0$, il existe une constante $J(k, x, y)$ telle que pour tout entier $n > 0$, on ait*

$$\text{(IV.15)} \quad \left| f_k\left(n, \left\{x\frac{n}{y}, \frac{n}{y}\right\}\right) - q^n \theta_k(x, y) \right| \leqslant J(k, x, y)\, q^n n^{-1},$$

$$\text{(IV.16)} \quad \left| g_k\left(n, \left\{x\frac{n}{y}, \frac{n}{y}\right\}\right) - q^n \theta_k(x, y) \right| \leqslant J(k, x, y)\, q^n n^{-1},$$

avec

$$\text{(IV.17)} \quad J(k, x, y) \ll \frac{2^{y/x-k}}{k!} \left(\log\left(x^{-1} \sup(1, y)\right)\right)^k.$$

Références

[1] N. G. de Bruijn, *The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) 15(1951), p. 25–32.

[2] — *On the number of uncancelled elements in the sieve of Erathosthènes*, Indag. Math. 12 (1950), p. 247–256.

[3] — *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$*, ibid. 13 (1951), p. 2–12.

[4] — *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, II*, ibid. 28 (1966), p. 239–247.

[5] A. A. Buchstab, *Asymptotic estimates of a general number theoretic function*, Mat. Sbornik N. S. 2 (44) (1937), p. 1239–1246.

[6] M. Car, *Ensembles de polynômes irréductibles et théorèmes de densité*, Acta Arith. 44 (1984), p. 323–342.

[7] K. Dickman, *On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude*, Ark. Mat. Astr. Fys. 22 (1930), p. 1–14.

[8] J. B. Friedlander, *Integers free from large and small primes*, Proc. London Math. Soc. (3), (33) (1976), p. 565–576.

[9] M. Mignotte, *Statistiques sur $F_q[X]$*, Comptes rendus des Journées de Théorie analytique et élémentaire des nombres, Limoges (10–11 mars 1980).

[10] G. Tenenbaum, *Lois de répartition des diviseurs*, Acta. Arith. 38 (1980), p. 1–36.

Reçu le 29. 10. 1984
et dans la forme modifiée le 22. 5. 1985 (1468)