ACTA ARITHMETICA
XLVIII (1987)

Sur les symboles des restes quadratiques des discriminants

par

P. Barrucand (Paris) et F. Laubie (Limoges)

Soit K un corps de nombres de degré n et de discriminant Δ. Si Δ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{Z}$, on note d le discriminant du corps quadratique $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\Delta})$, sinon on pose $d = 1$.

Soit p un nombre premier et soit g le nombre d'idéaux premiers distincts de K qui divisent p. Alors $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$ ou $(-1)^{n-g}$, $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ désignant le symbole habituel des restes quadratiques (Legendre–Kronecker); il s'agit d'un théorème bien connu dû à A. Pellet ([5], p. 245), L. Stickelberger et G. Voronoi.

Lorsque p est non ramifié dans K, on a $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right)$. Plus généralement, lorsque p est modérément ramifié dans K, il arrive que la valeur du symbole $\left(\frac{d}{p}\right)$ puisse "se lire" sur la décomposition de p en produit d'idéaux premiers de K. Ainsi, pour $n = 3$, Wahlin [10], puis Hasse [7], ont remarqué que tous les nombres premiers $p \neq 3$ totalement ramifiés dans K vérifient $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$. Pour $n = 4$ et $p \neq 2$, les symboles $\left(\frac{d}{p}\right)$ sont calculés dans [6] et [8]. Pour $n = 5$, Bühler [3] a étudié la ramification des corps K dont le groupe de Galois de leur clôture normale est isomorphe au groupe alterné A_5; on constate que, dans ce cas, tous les nombres premiers $p \neq 5$ totalement ramifiés dans K vérifient $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = 1$. Enfin les auteurs ont montré [1] que, si n est un nombre premier impair, tous les nombres premiers $p \neq n$ totalement ramifiés dans K vérifient $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{p}{n}\right)$; dans le cas particulier où $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt[n]{p})$, on retrouve ainsi la loi de réciprocité quadratique de Gauss.

Tous ces résultats se généralisent de la façon suivante: soit p un nombre premier et soit $(p) = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_i^{e_i}$ sa décomposition en produit d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de K deux à deux distincts; on note $p_i^{f_i}$ la norme de l'idéal $\mathfrak{p}_i$. (On rappelle que les symboles de Kronecker $\left(\frac{a}{b}\right)$ sont définis pour tout a si $2\nmid b$ et pour tout $a \not\equiv 3 \bmod 4$ si $2|b$, par $\left(\frac{a}{b}\right) = \prod_j \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\beta_j}$ où $b = \prod_j p_j^{\beta_j}$ est la décomposition de b en facteurs premiers, où $\left(\frac{a}{p_j}\right)$ est le symbole de Legendre si $p_j \neq 2$ et où $\left(\frac{a}{2}\right) = (-1)^{(a^2-1)/8}$ ou 0 suivant que $2\nmid a$ ou $2|a$).

Théorème 1. *Supposons que p ne soit pas sauvagement ramifié dans K et que tous les indices de ramification e_i soient impairs; on a alors:*

$$\left(\frac{d}{p}\right) = \prod_{i=1}^{g} (-1)^{f_i+1} \left(\frac{p}{e_i}\right)^{f_i} = (-1)^F \left(\frac{p}{E}\right) \quad \textit{avec} \quad F = \sum_{2|f_i} 1 \quad \textit{et} \quad E = \prod_{2\nmid f_i} e_i.$$

Remarquons, en outre, que le symbole $\left(\frac{d}{p}\right)$ est nul si et seulement si le nombre des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de K qui divisent p avec $e_i \equiv 0 \bmod 2$ et $f_i \equiv 1 \bmod 2$ est impair parce que la valuation p-adique du discriminant est égale à $\sum_{i=1}^{g} f_i(e_i-1)$. Dans les autres cas de figure, des exemples montrent que la valeur du symbole $\left(\frac{d}{p}\right)$ n'est pas toujours déterminée par l'ensemble des couples d'entiers (e_i, f_i) (voir [6] et [8]).

Nous nous proposons ici d'énoncer et de démontrer une "version relative" du théorème 1 (voir théorème 2).

Les auteurs tiennent à remercier J. Martinet pour ses conseils.

Soient K un corps de nombres, A l'anneau des entiers de K et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A de norme $q = p^f$. Pour tout $\xi \in K^*/K^{*2}$, on note $K(\sqrt{\xi})$ l'extension quadratique ou triviale de K correspondant à ξ par la théorie de Kummer et on définit le symbole des restes quadratiques $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)$ par:

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} +1 & \text{si } \xi = 1 \text{ ou si } \mathfrak{p} \text{ se décompose dans } K(\sqrt{\xi}), \\ -1 & \text{si } \xi \neq 1 \text{ et si } \mathfrak{p} \text{ est inerte dans } K(\sqrt{\xi}), \\ 0 & \text{si } \mathfrak{p} \text{ se ramifie dans } K(\sqrt{\xi}). \end{cases}$$

Soit L une extension de degré fini n du corps K. On désigne par $\mathrm{Tr}_{L/K}$ l'application trace de l'extension L/K. Pour toute base $\beta = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ de L sur K, on note $D_{L/K}(\beta) = \det(\mathrm{Tr}_{L/K}(b_i b_j))$ le discriminant de β sur K; l'image $\delta_{L/K}$ de $D_{L/K}(\beta)$ dans K^*/K^{*2} ne dépend pas du choix de la base β de L sur K.

Soit B la fermeture intégrale de A dans L et soit $\mathfrak{p}B = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_i^{e_i}$ la décomposition de l'idéal $\mathfrak{p}B$ en produit d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de B deux à deux distincts; on note q^{f_i} la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{p}_i$.

Théorème 2. *Supposons que $\mathfrak{p}$ ne soit pas sauvagement ramifié dans L et que tous les indices de ramification e_i soient impairs; on a alors:*

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{i=1}^{g} (-1)^{f_i+1} \left(\frac{q}{e_i}\right)^{f_i} = (-1)^F \left(\frac{q}{E}\right) \quad \textit{avec} \quad F = \sum_{2|f_i} 1 \quad \textit{et} \quad E = \prod_{2\nmid f_i} e_i.$$

Corollaire 1. *On a $\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{n-g}$ dans chacun des trois cas suivants:* (1) *$\mathfrak{p}$ est non ramifié dans L,* (2) *tous les degrés résiduels f_i sont pairs,* (3) *$[A/\mathfrak{p}: \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}]$ est pair.*

Preuve. Dans chacun des cas ci-dessus on a $\left(\frac{q^{f_i}}{e_i}\right) = +1$ pour tout $i = 1, \ldots, g$, donc

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{i=1}^{g} (-1)^{f_i+1} = (-1)^{g+\sum_{i=1}^{g} f_i};$$

mais comme tous les e_i sont impairs $n = \sum_{i=1}^{g} e_i f_i \equiv \sum_{i=1}^{g} f_i \bmod 2$, il s'ensuit que $\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{n-g}$. ∎

Corollaire 2. *Si $\mathfrak{p}$ est totalement et modérément ramifié dans L, on a*

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{q}{n}\right).$$

Preuve. Si $\mathfrak{p}$ est totalement ramifié dans L, on a $g = 1$, $e_1 = n$ et $f_1 = 1$ donc

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{q}{n}\right). \ ∎$$

Corollaire 3. *Si l'extension L/K est galoisienne alors les indices de ramification e_i sont égaux à un même entier e et on a:*

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} (-1)^g & \textit{si} \quad n \textit{ est pair}, \\ \left(\frac{q}{e}\right) & \textit{si} \quad n \textit{ est impair}. \end{cases}$$

Preuve. Si L/K est galoisienne, on a $n = efg$ avec $f = f_i$ et $e = e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, g$ et, comme e est impair, $n \equiv fg \bmod 2$; il s'ensuit que

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = (-1)^{n-g}\left(\frac{q}{e}\right)^n. \quad \blacksquare$$

Le théorème 1 est un cas particulier du théorème 2. En effet dans le cas où $K = \boldsymbol{Q}$, on a $A = \boldsymbol{Z}$, $\mathfrak{p} = p\boldsymbol{Z}$ et $\delta_{L/K}$ est l'image du discriminant absolu Δ de L dans $\boldsymbol{Q}^*/\boldsymbol{Q}^{*2}$; c'est aussi l'image du discriminant d de $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\Delta})$ dans $\boldsymbol{Q}^*/\boldsymbol{Q}^{*2}$ parce qu'en écrivant $\Delta = d'a^2$ où a désigne le plus grand entier tel que a^2 divise Δ, on a $d = d'$ si $d' \equiv 1 \bmod 4$ et $d = 4d'$ si $d \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$. On en déduit aussitôt que

$$\left(\frac{\delta_{L/\boldsymbol{Q}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{d'}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right) \quad \text{si} \quad p \neq 2.$$

Dans le cas où $p = 2$, 2 est modérément ramifié dans L donc aussi dans la clôture normale N de L; or $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\Delta}) \subset N$, donc 2 est modérément ramifié dans $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\Delta})$ ce qui n'est possible que si 2 est non ramifié dans $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\Delta})$; il s'ensuit que $d = d'$ et donc que

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{d}{2}\right) = (-1)^{(d^2-1)/8}. \quad \blacksquare$$

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le théorème 2. Pour cela on utilise certains résultats "locaux".

Tous les corps locaux que l'on considère ont un corps résiduel fini de caractéristique p. Pour tout corps local E, on note $\mathfrak{p}_E$ son idéal de valuation et q_E le cardinal de son corps résiduel.

Soit E un corps local et soit F une extension séparable finie de E de degré m. Soit x un élément primitif de F sur E, soient $x_1 = x, x_2, \ldots, x_m$ les conjugués de x sur E dans une clôture séparable de F et soit

$$X = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} (x_i - x_j);$$

X^2 est le discriminant de la base $(1, x, \ldots, x^{m-1})$ de F sur E et $\delta_{F/E}$ est l'image de X^2 dans E^*/E^{*2}.

Lemme 1. *Si l'extension F/E est non ramifiée, alors on a*

$$\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) = (-1)^{m+1}.$$

Preuve. Si l'extension F/E est non ramifiée alors elle cyclique et on a $\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) \neq 0$. Soit σ un générateur de son groupe de Galois. Il est clair que

$\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) = +1$ si et seulement si X^2 est un carré dans E ou encore si et seulement si σ est une permutation paire de l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_m\}$; donc $\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right)$ n'est autre que la signature de cette permutation; or σ permute circulairement les conjugués de x; donc

$$\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) = (-1)^{m+1}. \quad \blacksquare$$

Lemme 2. *On suppose que m est impair et que l'extension F/E est totalement et modérément ramifiée; on a alors*

$$\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) = \left(\frac{q_E}{m}\right).$$

Preuve. Si l'extension F/E est totalement et modérément ramifiée alors on peut choisir $x = \pi^{1/m}$ comme élément primitif de F sur E où π désigne une uniformisante de E ([11], prop. 3.4.3). Il en résulte que la clôture normale N de F sur E s'obtient en adjoignant à F une racine primitive m-ième de l'unité ζ. Comme $p \nmid m$, l'extension $E(\zeta)/E$ est non ramifiée, le corps d'inertie de N/E est $E(\zeta)$ et N est l'extension composée des deux extensions linéairement disjointes F et $E(\zeta)$ sur E ([9], ch.IV, § 4). De plus le groupe de Galois de N sur E possède deux générateurs σ qui engendre son sous-groupe d'inertie et τ dont le corps des invariants est F et qui vérifie $\tau(\zeta) = \zeta^{q_E}$ ([9], loc.cit.).

On a tout d'abord $\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) \neq 0$ parce que, l'indice de ramification $[N:E(\zeta)] = m$ de N/E étant impair, il n'existe pas de sous-extension quadratique ramifiée de N/E. En outre $X = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} (x_i - x_j)$ est un élément de $E(\zeta)$. On en déduit, comme dans la démonstration du lemme 1, que $\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right)$ n'est autre que la signature de τ considéré comme une permutation de l'ensemble des conjugués de x sur E. Or les conjugués de x sur E sont les $\zeta^k x$ pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Donc si on identifie le groupe des racines m-ièmes de l'unité de $E(\zeta)$ à $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$, τ devient la multiplication par q_E qui est une permutation de $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ de signature $\left(\frac{q_E}{m}\right)$ [4]. Il en résulte que

$$\left(\frac{\delta_{E/F}}{\mathfrak{p}_E}\right) = \left(\frac{q_E}{m}\right). \quad \blacksquare$$

Lemme 3. *Supposons que l'extension F/E soit non ramifiée et désignons par $N_{F/E}$ l'application norme de l'extension F/E. Soit $\xi \in F^*/F^{*2}$; on a* $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right) = \left(\frac{N_{F/E}(\xi)}{\mathfrak{p}_E}\right)$ *dans les deux cas suivants:*

1° *si* $\xi = 1$,

2° *si* $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right) \neq 0$ *et si m est impair.*

Preuve. Le premier cas étant évident, traitons le second. Posons $\eta = N_{F/E}(\xi) \in E^*/E^{*2}$. Rappelons que le choix d'une uniformisante de E (resp. de F) permet d'identifier le groupe E^* (resp. F^*) à $\mathbf{Z} \times U_E$ (resp. $\mathbf{Z} \times U_F$) où U_E (resp. U_F) désigne le groupe des unités de E (resp. de F). On a donc des isomorphismes $E^*/E^{*2} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times U_E/U_E^2$, $F^*/F^{*2} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times U_F/U_F^2$ et l'hypothèse $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right) \neq 0$ signifie alors que $\xi \in U_F/U_F^2$. Maintenant, tout E-automorphisme σ de F induit un automorphisme du groupe U_E/U_E^2 et on a $\left(\frac{\sigma(\xi)}{\mathfrak{p}_F}\right) = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right)$ donc

$$\left(\frac{N_{F/E}(\xi)}{\mathfrak{p}_F}\right) = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right)^m.$$

Enfin, si m est impair on a $U_F^2 \cap U_E = U_E^2$ et donc

$$\left(\frac{N_{F/E}(\xi)}{\mathfrak{p}_E}\right) = \left(\frac{N_{F/E}(\xi)}{\mathfrak{p}_F}\right) = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right)^m = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right). \blacksquare$$

Remarque. Dans le cas où $p \neq 2$ on a un résultat plus complet: si F/E est non ramifiée, pour tout $\xi \in U_F/U_F^2$ on a

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}_F}\right) = \left(\frac{N_{F/E}(\xi)}{\mathfrak{p}_E}\right).$$

Cela résulte d'un élégant théorème de P. Cartier (voir [4], formule 20).

Lemme 4. *On suppose maintenant que l'indice de ramification e de F/E est impair. Soit f le degré résiduel de F/E; alors on a*

$$\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) = (-1)^{f+1}\left(\frac{q_E}{e}\right)^f.$$

Preuve. Soit E' le corps d'inertie de F/E; on a $[F:E'] = e$ et $[E':E] = f$. Soit $\beta' = (b_i')_{1 \leqslant i \leqslant f}$ une base de E' sur E et soit $\beta'' = (b_j'')_{i \leqslant j \leqslant e}$ une base de F sur E'; alors $(b_i' b_j'')_{\substack{1 \leqslant i \leqslant f \\ 1 \leqslant j \leqslant e}}$ est une base β de F sur E et on connaît la formule de transitivité des discriminants ([2], ch. IX, § 2, prop. 6)

$$D_{F/E}(\beta) = D_{E'/E}(\beta')^{[F:E']} N_{E'/E}(D_{F/E'}(\beta'')).$$

On a donc $\delta_{F/E} = \delta_{E'/E}^e N_{E'/E}(\delta_{F/E'}) \in U_E/U_E^2$, et les égalités suivantes résultent immédiatement des lemmes 1, 2 et 3:

$$\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) = \left(\frac{\delta_{E'/E}}{\mathfrak{p}_E}\right)^e \left(\frac{N_{E'/E}(\delta_{F/E'})}{\mathfrak{p}_E}\right) = \left(\frac{\delta_{E'/E}}{\mathfrak{p}_E}\right)\left(\frac{\delta_{F/E'}}{\mathfrak{p}_{E'}}\right)$$
$$= (-1)^{f+1}\left(\frac{q_{E'}}{e}\right) = (-1)^{f+1}\left(\frac{q_E}{e}\right)^f. \blacksquare$$

Remarque. Dans les hypothèses du lemme 4, on a:

$$\left(\frac{\delta_{F/E}}{\mathfrak{p}_E}\right) = \begin{cases} -1 & \text{si } [F:E] \text{ est pair,} \\ \left(\frac{q_E}{e}\right) & \text{si } [F:E] \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 2. Nous reprenons les hypothèses et les notations de son énoncé.

Soit $\hat{K}$ le complété du corps K à la place $\mathfrak{p}$, soit $\hat{\mathfrak{p}}$ l'idéal de valuation de $\hat{K}$ et, pour tout $i = 1, \ldots, g$, soit $\hat{L}_i$ le complété du corps L à la place $\mathfrak{P}_i$; $\hat{L}_i$ est une extension de $\hat{K}$ de degré $e_i f_i$; on pose $\delta_i = \delta_{\hat{L}_i/\hat{K}}$.

Compte-tenu du lemme 4, il nous suffit de prouver que

$$\left(\frac{\delta_{L/K}}{\hat{\mathfrak{p}}}\right) = \prod_{i=1}^{g}\left(\frac{\delta_i}{\hat{\mathfrak{p}}}\right).$$

Pour tout $i = 1, \ldots, g$, désignons par Tr_i l'application trace de l'extension $\hat{L}_i/\hat{K}$. On sait ([9], ch. II, § 3) que les $\hat{K}$-algèbres $L \otimes_K \hat{K}$ et $\prod_{i=1}^{g} \hat{L}_i$ sont canoniquement isomorphes et que, pour tout $x \in L$, on a $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{i=1}^{g} \mathrm{Tr}_i(x)$. Soit $\mathrm{Tr}(xy)$ la forme bilinéaire non dégénérée sur $L \otimes_K \hat{K}$ déduite de la forme $\mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$ sur L par extension des scalaires; $\mathrm{Tr}(xy)$ est somme directe des formes bilinéaires $\mathrm{Tr}_i(xy)$ sur les $\hat{L}_i$. Par suite, si, pour tout $i = 1, \ldots, g$, on se donne une base β_i de $\hat{L}_i$ sur $\hat{K}$, $\beta = \bigcup_{i=1}^{g} \beta_i$ est alors une base de $L \otimes_K \hat{K}$ sur $\hat{K}$ dont le discriminant par rapport à $\mathrm{Tr}(xy)$ est $\prod_{i=1}^{g} D_{\hat{L}_i/\hat{K}}(\beta_i)$. On en déduit aussitôt que $\delta_{L/K} = \prod_{i=1}^{g} \delta_i$, ce qui achève la démonstration. $\blacksquare$

Bibliographie

[1] P. Barrucand et F. Laubie, *Ramification modérée dans les corps de nombres de degré premier*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, année 1981–82, exposé 13.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre 9, Hermann, Paris 1959.

[3] J. P. Bühler, *Icosahedral Galois Representations*, Lecture Notes in Math. 654, Springer Verlag, 1978.
[4] P. Cartier, *Sur une généralisation des symboles de Legendre–Jacobi*, L'enseignement mathématique, IIe série, tome XVI, fasc. 1 (1970), p. 31–48.
[5] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. I, reprinted by Chelsea, 1952.
[6] D. M. Dribin, *Quartic fields with the symetric groups*, Ann. of Math. 38 (3) (1937), p. 739–749.
[7] H. Hasse, *Arithmetische Theorie der Kubischen Zahlkörper auf Zahlkorpertheoretischer Grundlage*, Math. Z. 31 (1930), p. 565–582.
[8] G. Kientega, *Sur les corps algébriques du quatrième degré*, Thèse de 3ème cycle, Publications de l'Université de Paris VI, 1980.
[9] J. P. Serre, *Corps locaux*, 2ème édition, Hermann, Paris 1968.
[10] G. E. Wahlin, *The factorisation of the rational primes in a cubic domain*, Amer. J. Math. 44 (1922), p. 191–203.
[11] E. Weiss, *Algebraic Number Theory*, Mc Graw-Hill Book Company Inc., New-York, San Francisco, Toronto, London 1963.

Reçu le 28. 6. 1985
et dans la forme modifiée le 30. 9. 1985 (1526)

ACTA ARITHMETICA
XLVIII (1987)

An integral involving the remainder term in the Piltz divisor problem

by

R. SITARAMACHANDRARAO* (Toledo, Ohio)

1. Introduction. Let $\tau_k(n)$ denote the number of ordered k-tuples $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ of positive integers such that $x_1 x_2 \ldots x_k = n$ and

(1.1) $$\sum_{n \leqslant x} \tau_k(n) = xP_k(\log x) + \Delta_k(x)$$

where $xP_k(\log x)$ is the residue of $\zeta^k(s)x^s/s$ at $s = 1$. Further let

$$P_k(\log x) = a_{k-1}^{(k)}(\log x)^{k-1} + \ldots + a_1^{(k)}(\log x) + a_0^{(k)},$$

$$I_k = \int_1^{\infty} \frac{\Delta_k(u)}{u^2}\, du,$$

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{M \to \infty} \left[\sum_{1 \leqslant m \leqslant M} \frac{(\log m)^n}{m} - \frac{(\log M)^{n+1}}{n+1} \right]$$

and

$$\beta_n^{(k)} = (-1)^n \left[1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{s=1}^{r} \binom{k}{s} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_s \geqslant 0 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_s = r-s}} \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \ldots \gamma_{i_s} \right].$$

Recently, A. F. Lavrik, M. I. Israilov and Ž. Edgorov [4] proved that for $k \geqslant 1$

(1.2) $$I_k = a_0^{(k+1)} - \sum_{m=0}^{k-1} m!\, \gamma_m a_m^{(k)}$$

and also expressed I_k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, explicitly in terms of γ_n's, $0 \leqslant n \leqslant 4$ using Lavrik's [3] representation (in a slightly different notation)

(1.3) $$a_j^{(k)} = \frac{\beta_{k-1-j}^{(k)}}{j!}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1.$$

---

* On leave from Andhra University, Waltair, India.