$$2^{-\omega'_v(n)} \geqslant \sum_{\delta | n} \varrho(\delta)\, Y(\delta).$$

Theorem II is now a direct consequence of Lemma 5 and Lemma 6, if we choose herein $\xi = x^\varepsilon$.

References

[1] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, *An additive divisor problem*, J. London Math. Soc. (2) 26 (1982), pp. 1–14.

[2] — — *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70 (1982), pp. 219–288.

[3] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions II*, Mc Graw Hill, New York–Toronto–London 1953.

[4] T. Estermann, *An asymptotic formula in the theory of numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) 34 (1932), pp. 280–292.

[5] C. Hooley, *On the intervals between numbers that are sums of two squares III*, J. Reine Angew. Math. 267 (1974), pp. 207–218.

[6] K. H. Indlekofer, *Scharfe untere Abschätzung für die Anzahlfunktion der B-Zwillinge*, Acta Arith. 26 (1974), pp. 207–212.

[7] P. J. Kelly, *The number of B-twins in an interval*, Dissertation, Nottingham 1978.

[8] G. J. Rieger, *Aufeinanderfolgende Zahlen als Summe von 2 Quadraten*, Indag. Math. 27 (1965), pp. 208–220.

UNIVERSITÄT ULM
MATH. III
OBERER ESELSBERG
D-7900 ULM

Received on 3.8.1984
and in revised form on 25.6.1985 (1443)

ACTA ARITHMETICA
XLVII (1986)

Geometrische Reihen in algebraischen Zahlkörpern

von

ULRICH RAUSCH (Marburg)

Einleitung. Unter geometrischen Reihen in einem algebraischen Zahlkörper K verstehen wir Reihen der Form

$$G(z) = \sum_{\mu} \exp\{-\sum_{p=1}^{r+1} |\mu^{(p)}|\, z_p\},$$

wo μ die total positiven ganzen Zahlen von K oder, allgemeiner, die total positiven Zahlen einer gewissen Restklasse durchläuft. Die z_p sind komplexe Variable mit positivem Realteil. (Zu den Bezeichnungen vergleiche man die Zusammenstellung am Schluß dieser Einleitung.)

Diese Reihen wurden zuerst von Hecke [5] für reell-quadratische Zahlkörper eingeführt. Rademacher [9] verallgemeinerte Heckes Ergebnisse weitgehend bei seiner Übertragung des Goldbach-Problems auf beliebige algebraische Zahlkörper. Ausgehend von Rademachers Arbeit, verwandte Friedrich [2] dann geometrische Reihen zur asymptotischen Auswertung gewisser Partitionenfunktionen in Zahlkörpern. Weitere Anwendungen geometrischer Reihen auf die additive Theorie reell-quadratischer Zahlkörper findet man bei Schaal [13], [14].

Immer spielt das Verhalten der geometrischen Reihen in der Umgebung des Nullpunktes eine zentrale Rolle, und es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit([1]), die hierfür bekannten asymptotischen Entwicklungen zu verschärfen. Ein wenig erweitert wird die Problemstellung noch durch die Einführung von Koeffizienten in der Form verallgemeinerter Größencharaktere.

Außerdem untersuche ich unter demselben Gesichtspunkt die „Einheitenreihen" $E(z; U)$, die sich als natürliche Vorstufe zur geometrischen Reihe präsentieren und wie diese definiert sind mit dem Unterschied, daß der Summationsbereich für μ eine torsionsfreie Untergruppe U der

([1]) Diese Arbeit ist eine gekürzte Fassung meiner Dissertation. Herrn Prof. Dr. W. Schaal, der das Thema anregte, bin ich für seine vielfältige Unterstützung aufrichtig dankbar.

Einheitengruppe des Körpers K von endlichem Index ist. Sie bieten bereits alle Schwierigkeiten, sind aber formal einfacher zu handhaben.

Anhand eines Partitionenproblems im total reellen Zahlkörper stelle ich zum Schluß eine zahlentheoretische Konsequenz der gewonnenen Resultate vor.

Im Verlauf der Rechnung wird es sich als vorteilhaft erweisen, Systeme von Grundeinheiten in Abhängigkeit von den Variablen z_p geeignet zu wählen. Deshalb wird zunächst in § 1 die Existenz solcher Systeme gesichert, die gewissen Abschätzungen genügen. Ich baue dabei eine von Siegel [15] angegebene Methode in zweierlei Hinsicht aus: Die Abschätzungen beziehen sich auf alle Konjugierten, und diese werden mit Gewichtsfaktoren versehen. Wesentliches Hilfsmittel hierbei ist ein neueres zahlengeometrisches Resultat von Vaaler [17].

Die Hauptschwierigkeit der Arbeit wird in § 2 behandelt, die Frage nämlich, wieviele der (dort definierten) $r+1$ Zahlen $E_1(m), \ldots, E_{r+1}(m)$ für $m \neq 0$ höchstens zusammenfallen bzw. „nahe" beieinanderliegen können. Eine vollständige Antwort scheint gegenwärtig kaum erreichbar zu sein; sie liefe nämlich hinaus auf die untere Abschätzung von Linearformen in gewissen Unterdeterminanten des Regulators, also eine erhebliche Verallgemeinerung des Gelfond-Baker-Feldmanschen Problemkreises.

Gleichwohl reichen die u.a. mit Hilfe eines Satzes von Baker [1] erzielten quantitativen Resultate aus, um in § 4 Einheitenreihen erstmals in Körpern mit mehr als einer Grundeinheit asymptotisch zu entwickeln. Ich gebe mehrere Relationen an, bei denen unterschiedliches Gewicht auf die Abhängigkeit der Restglieder von den vorkommenden Parametern gelegt wird. Der Beweisgang ist dabei so angelegt, daß etwaige Fortschritte in der Frage der $E_p(m)$ problemlos nachträglich einbezogen werden können.

Zuvor jedoch betrachten wir in § 3 nochmals die Zahlen $E_p(m)$, diesmal unter qualitativen Gesichtspunkten. Unter anderem werden Beispiele von Zahlkörpern angegeben, in denen tatsächlich einige der $E_p(m)$ zusammenfallen. Damit wird zugleich eine von Hecke in [3], § 4, gestellte Frage negativ beantwortet: ob die $r+1$ horizontalen Geraden, auf denen die trivialen Nullstellen der Zetafunktionen mit (speziellen) Größencharakteren liegen, alle voneinander verschieden sein müssen.

§ 5 enthält Funktionalgleichung und Abschätzung gewisser Zetafunktionen, die schon Friedrich verwendet hat und die unseren Zwecken besonders angepaßt sind.

Die asymptotische Entwicklung der geometrischen Reihen wird in § 6 durchgeführt.

Als zahlentheoretische Anwendung unserer Ergebnisse betrachten wir schließlich in § 7 die additiven Zerfällungen total positiver ganzer Zahlen eines total reellen Zahlkörpers in eine gegebene Anzahl $k \geqslant 3$ ebensolcher Summanden. Im einfachsten Fall (ohne Größencharaktere und Kongruenzbedingungen) lautet das Resultat:

$$\sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_k=\nu \\ \nu_j \succ 0}} 1 = \frac{1}{((k-1)!)^n}\left(\frac{N(\nu)}{\sqrt{d}}\right)^{k-1} + O\left(N(\nu)^{k-2}\log^{n-1}N(\nu) + N(\nu)^{k/2}\log^{kn}N(\nu)\right).$$

Friedrich erhielt hier das Restglied $O_\varepsilon\left(N(\nu)^{k-3/2+\varepsilon}\right)$.

Für eine weitere Anwendung der hier erzielten Ergebnisse sei auf die Arbeit [16] hingewiesen.

Ich stelle noch einige Bezeichnungen zusammen, die für die ganze Arbeit Gültigkeit haben.

K sei ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n und befinde sich unter den konjugierten Körpern $K^{(p)}$ $(p = 1, \ldots, n)$. Dabei sei $K^{(p)}$ reell für $p = 1, \ldots, r_1$ und $K^{(p+r_2)}$ konjugiert komplex zu $K^{(p)}$ für $p = r_1+1, \ldots, r_1+r_2$; also $n = r_1 + 2r_2$. Wir setzen $e_p = 1$ für $p = 1, \ldots, r_1$ und $e_p = 2$ für $p = r_1+1, \ldots, n$; ferner $r = r_1 + r_2 - 1$. d sei die Diskriminante und $\mathfrak{d}$ die Differente von K. Zu einer Zahl $\gamma \in K$ bezeichne $\gamma^{(p)}$ ihre Konjugierte in $K^{(p)}$, $N(\gamma)$ ihre Norm und $S(\gamma)$ ihre Spur. $\gamma \succ 0$ bedeute im Falle $r_1 > 0$, daß $\gamma^{(p)} > 0$ ist für $p = 1, \ldots, r_1$; im Falle $r_1 = 0$ bedeute es $\gamma \neq 0$. Für Ideale $\mathfrak{a}$ aus K bezeichnet $N(\mathfrak{a})$ die Norm und $\varphi(\mathfrak{a})$ die Eulersche Funktion. Die durch die Symbole O und $\ll$ implizierten Konstanten sowie die positiven Konstanten $c_1, c_2, \ldots$ hängen, soweit nicht anders vermerkt, nur vom Körper K ab.

1. Abschätzung von Einheiten. Die Gruppe $\mathfrak{E}$ der Einheiten von K ist direktes Produkt einer endlichen Gruppe $\mathfrak{W}$ von Einheitswurzeln und einer freien abelschen Gruppe $\mathfrak{E}^*$ vom Rang r. Wir setzen $r > 0$ voraus und betrachten torsionsfreie Untergruppen U von $\mathfrak{E}$ von endlichem Index $[\mathfrak{E}: U]$. Diese haben ebenfalls den Rang r, besitzen also eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$ aus r Elementen. Damit bilden wir

$$R(U) = \left|\det\left(e_p \log|\eta_1^{(p)}|, \ldots, e_p \log|\eta_r^{(p)}|\right)_{p=1,\ldots,r}\right|.$$

Mit Hilfe gruppentheoretischer Überlegungen erkennt man

$$R(U) = \frac{R}{w}[\mathfrak{E}: U],$$

wo $w = |\mathfrak{W}|$ und $R = R(\mathfrak{E}^*)$ der Regulator von K ist.

Wir betrachten ferner Einheiten modulo einem ganzen Ideal $\mathfrak{f} \neq (0)$:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{f}) := \{\eta \in \mathfrak{E} | \ \eta \succ 0,\ \eta \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{f})\}.$$

Es existiert wieder eine Darstellung als direktes Produkt

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{W}(\mathfrak{f}) \times \mathfrak{E}^*(\mathfrak{f}),$$

wo $\mathfrak{W}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{W} \cap \mathfrak{E}(\mathfrak{f})$ und $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{f})$ torsionsfrei vom Rang r ist, so daß wir speziell $U = \mathfrak{E}^*(\mathfrak{f})$ nehmen können. In diesem Falle schreiben wir

$$R(\mathfrak{f}) := R(\mathfrak{E}^*(\mathfrak{f})), \quad w(\mathfrak{f}) := |\mathfrak{W}(\mathfrak{f})|, \quad e(\mathfrak{f}) := [\mathfrak{E} : \mathfrak{E}(\mathfrak{f})].$$

Da für $\eta \in \mathfrak{E}$ höchstens 2^{r_1} Vorzeichenkombinationen der reellen Konjugierten und höchstens $\varphi(\mathfrak{f})$ Restklassen modulo $\mathfrak{f}$ in Frage kommen, ergibt sich sofort die Abschätzung

$$R(\mathfrak{f}) \ll e(\mathfrak{f}) \ll \varphi(\mathfrak{f}) \ll N(\mathfrak{f}).$$

Mit Θ bezeichnen wir im folgenden stets einen Vektor

$$\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{r+1}) \in \mathbf{R}^{r+1} \quad \text{mit} \quad \Theta_p > 0 \quad (p = 1, \ldots, r+1)$$

und setzen

$$|\Theta| := \Big(\sum_{p=1}^{r+1} \Theta_p^2\Big)^{1/2}, \quad \left|\frac{1}{\Theta}\right| := \Big(\sum_{p=1}^{r+1} \Theta_p^{-2}\Big)^{1/2}$$

sowie

$$L_\Theta(\eta) := \max_{1 \le p \le r+1} \frac{e_p}{\Theta_p} |\log|\eta^{(p)}|| \quad \text{für} \quad \eta \in \mathfrak{E}.$$

Hilfssatz 1.1. *Zu jedem Θ gibt es eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$ von U mit*

$$L_\Theta(\eta_1) \ldots L_\Theta(\eta_r) \ll \frac{|\Theta|}{\Theta_1 \ldots \Theta_{r+1}} R(U).$$

Beweis. $\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_r$ sei irgend eine fest gewählte Basis von U. Die Menge der $X = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbf{R}^r$ mit

$$L(X) := \max_{1 \le p \le r+1} \left| \frac{e_p}{\Theta_p} \sum_{q=1}^{r} x_q \log|\tilde{\eta}_q^{(p)}| \right| \le 1$$

ist dann beschränkt, abgeschlossen, konvex und symmetrisch bezüglich 0. Für ihr Volumen V besagt [17], Theorem 1:

$$V \ge 2^r |\det A^T A|^{-1/2}$$

mit der $(r+1) \times r$-Matrix

$$A = \left(\frac{e_p}{\Theta_p} \log|\tilde{\eta}_1^{(p)}|, \ldots, \frac{e_p}{\Theta_p} \log|\tilde{\eta}_r^{(p)}| \right)_{p=1,\ldots,r+1}.$$

$\det A^T A$ ist die Gramsche Determinante der Spaltenvektoren von A, also gleich dem Quadrat des Volumens des von diesen aufgespannten r-dimensionalen Parallelotops. Da der Vektor Θ orthogonal zu allen Spalten von A ist und die Länge $|\Theta|$ besitzt, erhält man:

$$|\det A^T A|^{1/2} = \frac{1}{|\Theta|} \left| \det \left(\frac{e_p}{\Theta_p} \log|\tilde{\eta}_1^{(p)}|, \ldots, \frac{e_p}{\Theta_p} \log|\tilde{\eta}_r^{(p)}|, \Theta_p \right)_{p=1,\ldots,r+1} \right|$$

$$= \frac{|\Theta|}{\Theta_1 \ldots \Theta_{r+1}} R(U).$$

Nach dem Minkowskischen Satz über die sukzessiven Minima einer konvexen Menge gibt es nun r linear unabhängige Vektoren

$$X_k = (x_{1k}, \ldots, x_{rk}) \in \mathbf{Z}^r \quad (k = 1, \ldots, r)$$

derart, daß

$$V \cdot L(X_1) \ldots L(X_r) \le 2^r.$$

Damit sind durch

$$\eta_k' := \tilde{\eta}_1^{x_{1k}} \ldots \tilde{\eta}_r^{x_{rk}} \quad (k = 1, \ldots, r)$$

r unabhängige Einheiten aus U gegeben mit $L_\Theta(\eta_k') = L(X_k)$, also

$$L_\Theta(\eta_1') \ldots L_\Theta(\eta_r') \le \frac{|\Theta|}{\Theta_1 \ldots \Theta_{r+1}} R(U).$$

Der Übergang zu einer Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$ von U mit $L_\Theta(\eta_q) \ll L_\Theta(\eta_q')$ geht nun genauso vonstatten wie bei Siegel [15], § 4. ∎

Hilfssatz 1.2. *Für $\eta \in \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{W}$ gilt:*

(1.1) $$|\Theta| \, L_\Theta(\eta) \gg 1;$$

(1.2) $$|\Theta| \, L_\Theta(\eta) \gg \log 2N(\mathfrak{f}), \quad \textit{falls} \quad \eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Beweis. Mit passender Konstante $c_1 > 0$ gilt bekanntlich

$$1 + c_1 \le \max_{1 \le p \le n} |\eta^{(p)}| \le \exp\{|\Theta| \, L_\Theta(\eta)\};$$

es folgt (1.1). Zum Beweis von (1.2) wählen wir $|\arg \eta^{(p)}| \le \pi$ $(p = 1, \ldots, n)$ und folgern aus $N(\mathfrak{f}) | N(\eta - 1)$:

$$N(\mathfrak{f}) \le |N(\eta - 1)| \le \exp \sum_{p=1}^{r+1} e_p |\log \eta^{(p)}|$$

$$\le \exp\{(r+1)|\Theta| \, L_\Theta(\eta) + n\pi\},$$

also wegen (1.1):

$$\log 2N(\mathfrak{f}) \le (r+1)|\Theta| \, L_\Theta(\eta) + n\pi + \log 2 \ll |\Theta| \, L_\Theta(\eta). \quad ∎$$

Hilfssatz 1.3. *Es sei $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ für alle $\eta \in U$ (z.B. $\mathfrak{f} = (1)$). Für eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$ von U gemäß Hilfssatz 1.1 gilt dann:*

$$L_\Theta(\eta_q) \ll \left|\frac{1}{\Theta}\right| \frac{R(U)}{(\log 2N(\mathfrak{f}))^{r-1}} \quad (q = 1, \ldots, r).$$

Beweis. Im Falle $r = 1$ ist wegen $|1/\Theta| = |\Theta|/(\Theta_1 \Theta_2)$ nichts zu zeigen. Wir setzen also $r \ge 2$ voraus und nehmen o.B.d.A. an:

(1.3) $$L_\Theta(\eta_r) = \max_{1 \le q \le r} L_\Theta(\eta_q); \quad \Theta_{r+1} = \max_{1 \le p \le r+1} \Theta_p \gg |\Theta|.$$

Bezeichnen wir mit V das Volumen der durch

$$\left|e_p \sum_{q=1}^{r-1} x_q \log|\eta_q^{(p)}|\right| \leqslant 1 \qquad (p = 1, \ldots, r)$$

bestimmten Teilmenge des $\boldsymbol{R}^{r-1}$, so gibt es nach dem Minkowskischen Gitterpunktsatz einen Vektor $(x_1, \ldots, x_{r-1}) \in \boldsymbol{Z}^{r-1} \setminus \{0\}$ derart, daß für

$$\eta := \eta_1^{x_1} \ldots \eta_{r-1}^{x_{r-1}} \in U \setminus \{1\}$$

gilt:

$$e_p \left|\log|\eta^{(p)}|\right| \leqslant 2V^{-1/(r-1)} \qquad (p = 1, \ldots, r),$$

also:

$$\max_{1 \leqslant p \leqslant r+1} e_p \left|\log|\eta^{(p)}|\right| \leqslant 2r\, V^{-1/(r-1)}.$$

Nach (1.2) (mit $\Theta_1 = \ldots = \Theta_{r+1} = 1$) ist hier die linke Seite $\gg \log 2N(\mathfrak{f})$, während für die rechte Seite wieder mit [17], Theorem 1, folgt:

$$2^{r-1} V^{-1} \leqslant |\det B^T B|^{1/2}$$

mit der $r \times (r-1)$-Matrix

$$B = (e_p \log|\eta_1^{(p)}|, \ldots, e_p \log|\eta_{r-1}^{(p)}|)_{p=1,\ldots,r}.$$

Wir wählen nun einen Vektor $(v_1, \ldots, v_r) \in \boldsymbol{R}^r$ der Länge 1, der zu allen Spalten von B orthogonal ist, und ergänzen B damit zu einer quadratischen Matrix. Mit derselben Argumentation wie bei Hilfssatz 1.1 folgt dann:

$$|\det B^T B|^{1/2} = \left|\det(e_p \log|\eta_1^{(p)}|, \ldots, e_p \log|\eta_{r-1}^{(p)}|, v_p)_{p=1,\ldots,r}\right|.$$

Hier ziehen wir aus der p-ten Zeile den Faktor Θ_p heraus ($p = 1, \ldots, r$) und schätzen sodann mit Hadamard ab. Das ergibt insgesamt:

$$(\log 2N(\mathfrak{f}))^{r-1} \ll \Theta_1 \ldots \Theta_r L_\Theta(\eta_1) \ldots L_\Theta(\eta_{r-1}) \left|\frac{1}{\Theta}\right| \ll \frac{|\Theta|}{\Theta_{r+1}} \left|\frac{1}{\Theta}\right| \frac{R(U)}{L_\Theta(\eta_r)}$$

nach Hilfssatz 1.1. Wegen (1.3) folgt die Behauptung.

Eine bestimmte Klasse von Körpern läßt eine Verschärfung von Hilfssatz 1.3 zu für den Fall, daß eine der Zahlen Θ_p klein im Vergleich zu den übrigen ist. Es sind dies die Körper mit der Eigenschaft

(1.4) $\quad r \geqslant 2$ *und* $|\eta^{(p)}| \neq 1$ *für alle* $\eta \in \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{W}$, $\quad p = 1, \ldots, n$.

Hierunter fallen offensichtlich die total reellen Körper (mit $n \geqslant 3$), aber auch die Körper ungeraden Grades (mit $r \geqslant 2$): Ist nämlich $\eta \neq \pm 1$ eine ganze Körperzahl mit $|\eta^{(p)}| = 1$ für ein $p \in \{1, \ldots, r+1\}$, so ist $p > r_1$ und $\eta^{(p+r_2)} = (\eta^{(p)})^{-1}$, d.h. η und η^{-1} sind konjugiert, η ist eine reziproke Zahl (und damit von selbst Einheit). Folglich treten sämtliche Konjugierten von η in Paaren $\eta^{(p)}$, $(\eta^{(p)})^{-1}$ auf, und n ist daher gerade.

Wir benötigen die folgende abgeschwächte Version eines Satzes von Baker [1].

Hilfssatz 1.4. *$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ seien von Null verschiedene algebraische Zahlen. Unter $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_k$ seien die Hauptwerte verstanden. Dann gibt es eine Konstante $B = B(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0$ derart, daß die Ungleichungen*

$$0 < |x_1 \log\alpha_1 + \ldots + x_k \log\alpha_k| < (2 \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j|)^{-B}$$

nicht durch $x_1, \ldots, x_k \in \boldsymbol{Z}$ lösbar sind.

Hilfssatz 1.5. *K besitze die Eigenschaft (1.4). Dann gibt es eine (kleine) Konstante $c_2 > 0$, so daß für jede nach Hilfssatz 1.1 bestimmte Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$ von U gilt:*

$$L_\Theta(\eta_q) \ll \frac{|\Theta|^r}{\Theta_1 \ldots \Theta_{r+1}} \left(|\Theta| \left|\frac{1}{\Theta}\right|\right)^{-c_2} R(U) \qquad (q = 1, \ldots, r).$$

Beweis. Wir wählen eine feste Basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ von $\mathfrak{E}^*$ (Körperkonstanten!) und bestimmen gemäß Hilfssatz 1.4

$$c_3 := \max_{1 \leqslant p \leqslant n} B(|\varepsilon_1^{(p)}|, \ldots, |\varepsilon_r^{(p)}|).$$

Es sei nun $\eta \in \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{W}$ beliebig, $\eta = \xi \cdot \varepsilon_1^{x_1} \ldots \varepsilon_r^{x_r}$ mit $\xi \in \mathfrak{W}$ und $x_1, \ldots, x_r \in \boldsymbol{Z}$. Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man

$$|x_q| \ll \max_{1 \leqslant p \leqslant r} \left|\log|\eta^{(p)}|\right| \leqslant |\Theta|\, L_\Theta(\eta) \qquad (q = 1, \ldots, r).$$

Nun gilt wegen (1.4) für $p = 1, \ldots, r+1$:

$$\log|\eta^{(p)}| = x_1 \log|\varepsilon_1^{(p)}| + \ldots + x_r \log|\varepsilon_r^{(p)}| \neq 0,$$

also nach Hilfssatz 1.4 (man beachte (1.1)):

$$\left|\log|\eta^{(p)}|\right| \gg (|\Theta|\, L_\Theta(\eta))^{-c_3}.$$

Andererseits hat man für denjenigen Index p, für den Θ_p minimal ist:

$$\left|\log|\eta^{(p)}|\right| \leqslant \Theta_p L_\Theta(\eta) \ll \left|\frac{1}{\Theta}\right|^{-1} L_\Theta(\eta),$$

so daß sich insgesamt ergibt:

$$L_\Theta(\eta) \gg \frac{1}{|\Theta|} \left(|\Theta| \left|\frac{1}{\Theta}\right|\right)^{c_4} \qquad \left(c_4 = \frac{1}{1 + c_3}\right).$$

Aus Hilfssatz 1.1 folgt nun die Behauptung mit $c_2 = (r-1)c_4$.

Bemerkung. Für total reelle Körper vom Grade $n \geqslant 3$ kann man auf elementarem Wege (durch Abschätzung von $|N(\eta^2 - 1)|$) die schwächere Ungleichung

$$L_\Theta(\eta_q) \ll \frac{|\Theta|^r}{\Theta_1 \dots \Theta_{r+1}} \left(\log\left(|\Theta| \left|\frac{1}{\Theta}\right|\right)\right)^{-(r-1)} R(U) \quad (q = 1, \dots, r)$$

herleiten.

2. Die Zahlen $E_p(m)$ (quantitativ). Ist eine unserer Einheitengruppen U samt einer Basis $\eta_1, \dots, \eta_r$ gegeben, so definieren wir zu $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \boldsymbol{R}^r$ die Zahlen

$$E_1(\tau), \dots, E_{r+1}(\tau)$$

durch

$$(2.1) \qquad \sum_{p=1}^{r+1} e_p E_p(\tau) = 0, \qquad \sum_{p=1}^{r+1} e_p E_p(\tau) \log|\eta_q^{(p)}| = 2\pi\tau_q \quad (q = 1, \dots, r).$$

Besonderes Augenmerk richten wir dabei auf den Fall $\tau = m \in \boldsymbol{Z}^r$.

HILFSSATZ 2.1. *Für beliebiges $s \in \boldsymbol{C}$ gilt:*

$$\sum_{p=1}^{r+1} \Theta_p |s - iE_p(\tau)| \gg \sum_{q=1}^{r} \frac{|\tau_q|}{L_\Theta(\eta_q)} =: H(\tau).$$

Beweis.

$$2\pi|\tau_q| = \left|\sum_{p=1}^{r+1} \Theta_p\big(s - iE_p(\tau)\big) \cdot \frac{e_p}{\Theta_p} \log|\eta_q^{(p)}|\right| \ll L_\Theta(\eta_q) \sum_{p=1}^{r+1} \Theta_p |s - iE_p(\tau)|.$$

HILFSSATZ 2.2. *Die Basis $\eta_1, \dots, \eta_r$ von U sei nach Hilfssatz 1.1 bestimmt, und es sei $\eta \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{f})$ für alle $\eta \in U$. Mit zwei Körperkonstanten $c_5, c_6 > 0$ sei ferner $|\Theta| \leqslant c_5$ und*

$$S_x := \sum_{m \neq 0} e^{-c_6 H(m)} \cdot \{H(m)\}^{-x},$$

wobei summiert wird über alle $m = (m_1, \dots, m_r) \in \boldsymbol{Z}^r \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$(2.2) \qquad S_x \ll \frac{|\Theta|}{\Theta_1 \dots \Theta_{r+1}} R(U) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1/2),$$

$$(2.3) \qquad S_1 \ll \left(\frac{|\Theta|}{\Theta_1 \dots \Theta_{r+1}} + \left|\frac{1}{\Theta}\right| \frac{\log\left(1 + \left|\frac{1}{\Theta}\right| R(U)\right)}{(\log 2N(\mathfrak{f}))^{r-1}}\right) R(U).$$

Beweis. Wir fassen unter den r-Tupeln m jeweils diejenigen zusammen, bei denen dieselben Komponenten m_q verschwinden, und wenden dann die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf $\{H(m)\}^{-x}$ an. Das ergibt:

$$S_x = \sum_{l=1}^{r} 2^l \sum_{1 \leqslant q_1 < q_2 < \dots < q_l \leqslant r} \sum_{m_{q_1}, \dots, m_{q_l} = 1}^{\infty} \exp\left(-c_6 \sum_{j=1}^{l} \frac{m_{q_j}}{L_\Theta(\eta_{q_j})}\right) \times \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{m_{q_j}}{L_\Theta(\eta_{q_j})}\right)^{-x}$$

$$\ll \sum_{l=1}^{r} \sum_{1 \leqslant q_1 < \dots < q_l \leqslant r} \prod_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-c_6 \frac{k}{L_\Theta(\eta_{q_j})}\right) \cdot \left(\frac{k}{L_\Theta(\eta_{q_j})}\right)^{-x/l}.$$

Hier ist die innere Summe $\ll L_\Theta(\eta_{q_j})$, falls $0 \leqslant x/l \leqslant 1/2$; im Falle $x/l = 1$ ist sie

$$\ll L_\Theta(\eta_{q_j}) \log(1 + L_\Theta(\eta_{q_j})) \ll \left|\frac{1}{\Theta}\right| \frac{\log\left(1 + \left|\frac{1}{\Theta}\right| R(U)\right)}{(\log 2N(\mathfrak{f}))^{r-1}} R(U)$$

wegen (1.1), $|\Theta| \leqslant c_5$ und Hilfssatz 1.3. Mit Hilfssatz 1.1 folgt, wiederum wegen (1.1) und $|\Theta| \leqslant c_5$, die Behauptung.

HILFSSATZ 2.3. *Ist die Basis $\eta_1, \dots, \eta_r$ von U nach Hilfssatz 1.1 gewählt, so gilt:*

$$\Theta_p E_p(\tau) \ll |\Theta| \left|\frac{1}{\Theta}\right| H(\tau) \quad (p = 1, \dots, r+1).$$

Beweis. Bestimmt man $E_p(\tau)$ aus (2.1) nach der Cramerschen Regel, so ergibt eine einfache Rechnung

$$\Theta_p E_p(\tau) \ll \frac{\Theta_1 \dots \Theta_{r+1}}{R(U)} \sum_{q=1}^{r} |\tau_q| \cdot |D_{pq}|,$$

wo D_{pq} die Determinante bezeichnet, die aus

$$\left|\frac{e_l}{\Theta_l} \log|\eta_1^{(l)}|, \dots, \frac{e_l}{\Theta_l} \log|\eta_r^{(l)}|, \frac{e_l}{\Theta_l}\right|_{l=1,\dots,r+1}$$

durch Streichung der p-ten Zeile und der q-ten Spalte hervorgeht. Nach Hadamard hat man

$$|D_{pq}| \ll L_\Theta(\eta_1) \dots L_\Theta(\eta_{q-1}) L_\Theta(\eta_{q+1}) \dots L_\Theta(\eta_r) \left|\frac{1}{\Theta}\right|,$$

und durch Einsetzen folgt mit Hilfssatz 1.1:

$$\Theta_p E_p(\tau) \ll \frac{\Theta_1 \dots \Theta_{r+1}}{R(U)} L_\Theta(\eta_1) \dots L_\Theta(\eta_r) \left|\frac{1}{\Theta}\right| H(\tau) \ll |\Theta| \left|\frac{1}{\Theta}\right| H(\tau). \quad \blacksquare$$

Hilfssatz 2.4. *K besitze die Eigenschaft* (1.4), *und es seien* $w_1, \ldots, w_{r+1} \in \boldsymbol{C}$ *mit*

$$f(\eta) := \sum_{p=1}^{r+1} e_p w_p \log|\eta^{(p)}| \in \boldsymbol{Z} \quad \text{für alle } \eta \in U, \tag{2.4}$$

$$f(\eta) \neq 0 \quad \text{für mindestens ein } \eta \in U,$$

$$|w_1|, \ldots, |w_{r+1}| \leqslant H, \quad \text{wo} \quad H \geqslant 1.$$

Für mindestens zwei Indizes $p \in \{1, \ldots, r+1\}$ *gilt dann*:

$$|w_p| \gg (HR(U))^{-c_7}.$$

Bemerkung. Das ist eine Aussage über die $E_p(m)$: Die Zahlen $w_p := (2\pi)^{-1}(E_p(m) - s)$ erfüllen offenbar (2.4) für jedes $s \in \boldsymbol{C}$. Insbesondere folgt, daß für $m \neq 0$ von den $r+1$ Zahlen $E_p(m)$ höchstens $r-1$ zusammenfallen können.

Beweis. Zu einem Θ, über das wir noch verfügen werden, wählen wir eine Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$ von U gemäß Hilfssatz 1.1 (die natürlich nichts zu tun hat mit der Basis, bezüglich der die $E_p(m)$ gebildet sind). Für mindestens ein $q \in \{1, \ldots, r\}$ ist dann $f(\eta_q) \neq 0$, also

$$1 \leqslant |f(\eta_q)| \leqslant L_\Theta(\eta_q) \sum_{p=1}^{r+1} |w_p| \Theta_p$$

$$\ll \frac{|\Theta|^r}{\Theta_1 \ldots \Theta_{r+1}} \left(|\Theta| \left|\frac{1}{\Theta}\right|\right)^{-c_2} R(U) \sum_{p=1}^{r+1} |w_p| \Theta_p$$

nach Hilfssatz 1.5. Wir nehmen nun etwa an:

$$|w_2|, \ldots, |w_{r+1}| \leqslant x < 1.$$

Wählen wir dann $\Theta_1 = x$, $\Theta_2 = \ldots = \Theta_{r+1} = 1$, so ergibt sich

$$1 \ll H R(U) x^{c_2}, \quad \text{also} \quad x \gg \{H R(U)\}^{-c_7}. \ \blacksquare$$

3. Die Zahlen $E_p(m)$ (qualitativ). Wir setzen $r \geqslant 2$ voraus. Gegeben sei eine unserer Gruppen U mit einer Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$, bezüglich der die $E_p(m)$ gebildet seien.

Satz 3.1. *Es sei* $\{p_1, \ldots, p_k\}$, $\{p_{k+1}, \ldots, p_{r+1}\}$ *eine Einteilung der Zahlen* $1, \ldots, r+1$ *in zwei Klassen, wobei* $2 \leqslant k \leqslant r$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(3.1) *Für* $m \in \boldsymbol{Z}^r$, $m \neq 0$, *ist niemals* $E_{p_1}(m) = E_{p_2}(m) = \ldots = E_{p_k}(m)$;

(3.2) *Durchläuft η die Elemente von U, so liegen die Punkte*

$$(\log|\eta^{(p_{k+1})}|, \ldots, \log|\eta^{(p_{r+1})}|) \quad \text{dicht im } \boldsymbol{R}^{r-k+1}.$$

Das Erfülltsein dieser Bedingungen ist nicht nur von der Wahl der Basis

unabhängig, sondern auch von der speziell betrachteten Gruppe U. In (3.1), (3.2) *kommt somit (bei gegebener Klasseneinteilung von* $\{1, \ldots, r+1\}$) *eine Eigenschaft des Körpers zum Ausdruck. Insbesondere ist die für $m \neq 0$ maximal mögliche Anzahl gleicher unter den Zahlen $E_1(m), \ldots, E_{r+1}(m)$ eine Körperkonstante; wir bezeichnen sie mit $J(K)$.*

Beweis. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Einteilung

$$\{p_1, \ldots, p_k\} = \{i+1, \ldots, r+1\}, \qquad \{p_{k+1}, \ldots, p_{r+1}\} = \{1, \ldots, i\},$$

wobei also $1 \leqslant i = r-k+1 \leqslant r-1$ ist, und setzen

$$w_p = w_p(m) := \frac{1}{2\pi}(E_p(m) - E_{r+1}(m)) \quad (p = 1, \ldots, r),$$

also:

$$\sum_{p=1}^{r} e_p w_p \log|\eta_q^{(p)}| = m_q \quad (q = 1, \ldots, r), \tag{3.3}$$

so daß wir die Äquivalenz der beiden Aussagen

(3.1′) Für $m \neq 0$ ist nie $w_{i+1} = \ldots = w_r = 0$;

(3.2′) $A(U) := \{(\log|\eta^{(1)}|, \ldots, \log|\eta^{(i)}|) \mid \eta \in U\}$ liegt dicht im $\boldsymbol{R}^i$

nachzuweisen haben.

Es gelte (3.1′). Zu zeigen ist dann, daß das lineare Formensystem

$$F_p(x) := x_1 \log|\eta_1^{(p)}| + \ldots + x_r \log|\eta_r^{(p)}| \quad (p = 1, \ldots, i) \tag{3.4}$$

jeden Punkt des $\boldsymbol{R}^i$ beliebig genau approximiert, wenn $x = (x_1, \ldots, x_r)$ durch $\boldsymbol{Z}^r$ läuft. Nach dem Approximationssatz von Kronecker (in seiner allgemeinen Form; siehe etwa [8], § 42) ist dies gewährleistet, wenn Rang und Rationalitätsrang des Systems (3.4) beide $= i$ sind. Wegen $R(U) \neq 0$ ist der Rang sicher $= i$; zur Bestimmung des Rationalitätsranges hat man festzustellen, wie viele linear unabhängige Formen mit ganzrationalen Koeffizienten man aus den F_p linear kombinieren kann:

$$F(x) = \sum_{p=1}^{i} u_p F_p(x) \equiv k_1 x_1 + \ldots + k_r x_r \quad \text{mit} \quad u_p \in \boldsymbol{R},\ k_q \in \boldsymbol{Z}.$$

Wegen (3.1′) ist aber $F(x) \equiv 0$ die einzige solche Form, so daß sich auch der Rationalitätsrang des Systems (3.4) zu i ergibt und (3.2′) folgt.

Die Umkehrung kann man ebenfalls aus dem Kroneckerschen Satze folgern; sie ist aber auch direkt leicht einzusehen: Es sei $m \in \boldsymbol{Z}^r$ derart, daß in (3.3) $w_{i+1} = \ldots = w_r = 0$ ist.

Durch die Bildung ganzzahliger Linearkombinationen der Gleichungen (3.3) erkennt man dann, daß

$$\Psi(y) := \sum_{p=1}^{i} e_p w_p y_p \in \mathbf{Z} \quad \text{für} \quad y = (y_1, \dots, y_i) \in A(U).$$

Gilt nun (3.2'), so muß Ψ als stetige Funktion notwendig konstant, also identisch Null sein, woraus $m = 0$ folgt.

Offensichtlich ist (3.2') basisunabhängig; zum Nachweis der Unabhängigkeit von U betrachten wir eine zweite Gruppe U'. Der Index $j := [U : (U \cap U')]$ ist dann endlich, und es gilt:

$$\eta^j \in U \cap U' \subseteq U' \quad \text{für} \quad \eta \in U.$$

Ist nun (3.2') für U erfüllt, so liegt mit $A(U)$ auch

$$j \cdot A(U) = \{(j \log|\eta^{(1)}|, \dots, j \log|\eta^{(i)}|) \mid \eta \in U\} \subseteq A(U')$$

dicht in $\mathbf{R}^i$, d.h. (3.2') gilt auch für U'. ∎

Hilfssatz 2.1 zufolge hat man für beliebige Körper K

$$1 \leqslant J(K) \leqslant r, \tag{3.5}$$

während nach Hilfssatz 2.4 für Körper mit der Eigenschaft (1.4) die schärfere Abschätzung $J(K) \leqslant r-1$ gilt. Ich vermute, daß für diese Körper sogar $J(K) = 1$ ist, die Zahlen $E_1(m), \dots, E_{r+1}(m)$ also stets paarweise verschieden sind, wenn $m \neq 0$.

Beispiele für $J(K) \geqslant 2$ liefern die zuerst von Salem [12], §§ 6–7, untersuchten reellen ganz-algebraischen Zahlen $\alpha > 1$, die dadurch charakterisiert sind, daß all ihre Konjugierten (abgesehen von α selbst) dem Betrage nach $\leqslant 1$ sind, wobei der Wert 1 des Betrages mindestens einmal wirklich angenommen wird. Wie in den Ausführungen zu (1.4) sieht man leicht, daß α reziprok (also eine Einheit) ist und die reellen Konjugierten $\alpha^{(1)} = \alpha$ und $\alpha^{(2)} = \alpha^{-1}$ besitzt, während alle übrigen Konjugierten komplex vom Betrage 1 sind. α verletzt (1.4) also so stark, wie das bei einer Nicht-Einheitswurzel nur möglich ist. Nach [12] gibt es Salem-Zahlen α von beliebig hohem Grade $n = 2 + 2r_2 = 2r \geqslant 4$.

In $K := \mathbf{Q}(\alpha)$ ergänzen wir nun $\eta_1 := \alpha$ irgendwie zu einem System $\eta_1, \dots, \eta_r$ unabhängiger Einheiten und bilden damit die $E_p(m)$. Aus

$$m_1 = \sum_{p=1}^{r+1} e_p E_p(m) \log|\eta_1^{(p)}| = (E_1(m) - E_2(m)) \log \alpha$$

folgt dann, daß $E_1(m) = E_2(m)$ ist, sobald $m_1 = 0$.

Mit den Salem-Zahlen vom Grade 4 (nach Lehmer [6], S. 477, ist die kleinste unter ihnen Wurzel von $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0$) verfügen wir insbesondere über ein Beispiel dafür, daß in (3.5) die obere Schranke

angenommen werden kann. Ob – wie man vermuten wird – letzteres auch bei beliebig großen Werten von r vorkommt, ist schwieriger zu entscheiden. Man überzeugt sich leicht, daß $J(K) = r$ gleichbedeutend ist mit der Existenz unabhängiger Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_{r-1}$ in K derart, daß für ein $p \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$|\eta_1^{(p)}| = \dots = |\eta_{r-1}^{(p)}| = 1.$$

4. Die Einheitenreihen. Es sei T die Menge der $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ mit

$$\operatorname{Re} z_p > 0 \quad (p = 1, \dots, n) \quad \text{und} \quad z_{p+r_2} = z_p \quad (p = r_1 + 1, \dots, r+1).$$

Für $z \in T$ und $s = \sigma + it \in \mathbf{C}$ sei $z_p^s := \exp(s \log z_p)$, wo der Wert des Logarithmus durch die Bedingung $|\arg z_p| < \pi/2$ festgelegt ist. Wir definieren ferner

$$N(z) := z_1 \dots z_n, \qquad \log \frac{1}{N(z)} := -\sum_{p=1}^{n} \log z_p$$

und setzen von jetzt an stets

$$\Theta_p := \pi/2 - |\arg z_p| > 0 \quad (p = 1, \dots, r+1). \tag{4.1}$$

Zu beliebigen reellen Zahlen $b_1, \dots, b_{r+1}$ sei der verallgemeinerte Größencharakter Λ erklärt durch

$$\Lambda(\mu) := \prod_{p=1}^{r+1} |\mu^{(p)}|^{-ie_p b_p} \quad (\mu \in K,\ \mu \neq 0). \tag{4.2}$$

Schließlich sei eine unserer Einheitengruppen U gegeben. Damit bilden wir die Einheitenreihe

$$E(z; \Lambda, U) := \sum_{\eta \in U} \Lambda(\eta) \exp\Big\{-\sum_{p=1}^{r+1} |\eta^{(p)}| z_p\Big\}.$$

Sie konvergiert gleichmäßig-absolut auf jeder kompakten Teilmenge von T und stellt daher dort eine holomorphe Funktion von z dar.

Hilfssatz 4.1. *Für $z \in T$ und $\sigma > 0$ gilt:*

$$E(z; \Lambda, U) = \frac{2^{r_2}}{2\pi i R(U)} \sum_m \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F_m(s)\, ds$$

mit

$$F_m(s) := \prod_{p=1}^{r+1} \frac{\Gamma\big(e_p(s - ib_p - iE_p(m))\big)}{z_p^{e_p(s - ib_p - iE_p(m))}},$$

wobei die Summation über alle $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbf{Z}^r$ läuft und die Zahlen $E_p(m)$ gemäß (2.1) bezüglich einer beliebigen, festen Basis $\eta_1, \dots, \eta_r$ von U gebildet sind.

Vorbemerkung. Mit $\Lambda \equiv 1$ stammt diese Gleichung von Hecke [5], § 4, und Rademacher [9], § 3. Die Einführung von Λ bietet neben dem Gewinn an Allgemeinheit vor allem den Vorteil einer kürzeren Beweisführung.

Beweis. Beide Seiten der behaupteten Gleichung bleiben offenbar unverändert, wenn man zu allen b_p dieselbe reelle Zahl b addiert; wir können also o.B.d.A.

$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p b_p = 0 \tag{4.3}$$

annehmen und demzufolge die b_p nach (2.1) in der Form

$$b_p = E_p(\tau) \quad (p = 1, \ldots, r+1) \tag{4.4}$$

mit passendem $\tau \in \boldsymbol{R}^r$ darstellen. Die Behauptung nimmt damit folgende Gestalt an:

$$\sum_l e^{-2\pi i(l_1\tau_1+\ldots+l_r\tau_r)} \cdot \exp\Bigl(-\sum_{p=1}^{r+1} |(\eta_1^{l_1} \ldots \eta_r^{l_r})^{(p)}| z_p\Bigr) = \frac{2^{r_2}}{2\pi i R(U)} \sum_m \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \prod_{p=1}^{r+1} \frac{\Gamma(e_p(s-iE_p(m+\tau)))}{z_p^{e_p(s-iE_p(m+\tau))}} ds, \tag{4.5}$$

wo $l = (l_1, \ldots, l_r)$ durch $\boldsymbol{Z}^r$ läuft.

Wir halten nun z und σ fest und betrachten τ als Variable. Links in (4.5) steht eine absolut konvergente Fourierreihe in τ, während rechts eine Funktion $\Psi(\tau)$ steht, die jedenfalls in allen τ_q die Periode 1 hat. Mit Hilfe von Abschätzungen, wie wir sie in der Folge noch mehrfach (und genauer als hier nötig) durchführen werden, erkennt man zudem, daß Summe und Integral absolut und gleichmäßig bezüglich τ konvergieren, so daß $\Psi(\tau)$ insbesondere stetig ist. Wir haben somit nur zu zeigen, daß

$$\exp\Bigl\{-\sum_{p=1}^{r+1} |\eta^{(p)}| z_p\Bigr\}$$

der l-te Fourierkoeffizient von $\Psi(\tau)$ ist, wenn $\eta = \eta_1^{l_1} \ldots \eta_r^{l_r}$; dann folgt (4.5) in bekannter Weise aus der Vollständigkeitsrelation.

Wir gehen aus von der Identität

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds \quad (\sigma > 0,\ |\arg z| < \pi/2). \tag{4.6}$$

Multiplikation der hieraus folgenden Gleichungen

$$e^{-|\eta^{(p)}|z_p} = \frac{e_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(e_p(\sigma+it))}{(|\eta^{(p)}| z_p)^{e_p(\sigma+it)}} dt$$

für $p = 1, \ldots, r+1$ ergibt:

$$\exp\Bigl\{-\sum_{p=1}^{r+1} |\eta^{(p)}| z_p\Bigr\} = \frac{2^{r_2}}{(2\pi)^{r+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{p=1}^{r+1} \frac{\Gamma(e_p(\sigma+it_p))}{z_p^{e_p(\sigma+it_p)}} \exp\Bigl(-i \sum_{p=1}^{r+1} e_p t_p \log|\eta^{(p)}|\Bigr) dt_1 \ldots dt_{r+1}.$$

In diesem Integral führen wir die neuen Variablen t, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$ ein durch

$$t = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{r+1} e_p t_p, \quad t - t_p = E_p(\tau) \quad (p = 1, \ldots, r+1).$$

Die Funktionaldeterminante hat nach (2.1) den Wert $(2\pi)^r \cdot R(U)^{-1}$, so daß das Integral übergeht in

$$\frac{2^{r_2}}{2\pi i R(U)} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \Bigl(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \prod_{p=1}^{r+1} \frac{\Gamma(e_p(s-iE_p(\tau)))}{z_p^{e_p(s-iE_p(\tau))}} ds \Bigr) e^{2\pi i(l_1\tau_1+\ldots+l_r\tau_r)} d\tau_1 \ldots d\tau_r,$$

wo noch $s = \sigma + it$ und $\eta = \eta_1^{l_1} \ldots \eta_r^{l_r}$ gesetzt ist.

Zerlegen wir jetzt den Integrationsbereich $\boldsymbol{R}^r$ von τ in die Würfel

$$m_q \leqslant \tau_q < m_q + 1 \quad (q = 1, \ldots, r)$$

mit $m \in \boldsymbol{Z}^r$ und führen in den entsprechenden Teilintegralen die Substitution $\tau \to m + \tau$ durch, so erscheint die absolut konvergente Reihe

$$\frac{2^{r_2}}{2\pi i R(U)} \sum_m \int_0^1 \cdots \int \Bigl(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \prod_{p=1}^{r+1} \frac{\Gamma(e_p(s-iE_p(m+\tau)))}{z_p^{e_p(s-iE_p(m+\tau))}} ds \Bigr) \times e^{2\pi i(l_1\tau_1+\ldots+l_r\tau_r)} d\tau_1 \ldots d\tau_r.$$

Vertauschen von Summation und Integration ergibt die Behauptung.

Bekannten Eigenschaften der Gammafunktion entnimmt man

Hilfssatz 4.2. *Im Streifen* $-1/4 \leqslant \sigma \leqslant 2$ $(s = \sigma + it)$ *gilt für* $u_1, \ldots, u_{r+1} \in \boldsymbol{R}$:

$$\prod_{p=1}^{r+1} \frac{\Gamma(e_p(s-iu_p))}{z_p^{e_p(s-iu_p)}} \ll \exp\Bigl(-\sum_{p=1}^{r+1} \Theta_p |t-u_p|\Bigr) \cdot |N(z)|^{-\sigma} \cdot \prod_{p=1}^{r+1} \frac{|1+s-iu_p|^{e_p\sigma+1/2}}{|s-iu_p|}.$$

Hilfssatz 4.3.

$$2^{r_2} \operatorname*{Res}_{s=0} \prod_{p=1}^{r+1} \frac{\Gamma(e_p s)}{z_p^{e_p s}} = P\Bigl(\log \frac{1}{N(z)}\Bigr).$$

Dabei ist $P(x)$ ein nur von K abhängiges Polynom r-ten Grades:

$$P(x) = \frac{1}{r!}x^r - \frac{nC}{(r-1)!}x^{r-1} + \ldots,$$

wo C die Eulersche Konstante bezeichnet.

Satz 4.1. *Für $z \in T$ mit $|N(z)| \leqslant 1/2$ gilt:*

$$E(z;\, \Lambda,\, U) \ll \frac{|\Theta|}{\Theta_1 \ldots \Theta_{r+1}} \log^r \frac{1}{|N(z)|}.$$

Vorbemerkungen. 1. Obwohl im allgemeinen Falle optimal (vgl. Satz 4.2), ist diese Abschätzung doch für die meisten Λ weit von der Realität entfernt. Man kann nämlich zeigen, daß für fast alle Λ die Funktion $E(z;\, \Lambda,\, U)$ in jedem Winkelbereich

$$\pi/2 - |\arg z_p| > \delta > 0 \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

beschränkt bleibt; dabei ist „fast alle" im Lebesgueschen Sinne zu verstehen, bezogen auf die b_p.

2. Der Beweis von Satz 4.1 bildet den Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen dieses Paragraphen: Die nachfolgenden Sätze werden sich durch Spezialisierung und Weiterführung seiner Resultate ergeben.

Beweis. Wir wählen die Basis $\eta_1, \ldots, \eta_r$ von U in Abhängigkeit von z, und zwar gemäß Hilfssatz 1.1 mit den Θ_p aus (4.1). Ferner setzen wir (4.3), (4.4) voraus, wobei wir wegen (4.5) noch annehmen können:

$$0 \leqslant \tau_q < 1 \qquad (q = 1, \ldots, r). \tag{4.7}$$

Wir betrachten nun die Darstellung aus Hilfssatz 4.1. Zunächst erkennt man ohne Schwierigkeiten, daß man dort den Integrationsweg nach links auf die Gerade $\sigma = -1/4$ verschieben darf, wenn man die Residuensumme von $F_m(s)$ auf der imaginären Achse berücksichtigt; diese bezeichnen wir mit $\sum_0 \operatorname{Res} F_m(s)$.

Nach Hilfssatz 2.1, (1.1) und (4.7) hat man

$$\exp\Big(-\sum_{p=1}^{r+1} \Theta_p |t - E_p(m+\tau)|\Big) \leqslant e^{-c_8 H(m+\tau)} \ll e^{-c_8 H(m)},$$

so daß mit Hilfssatz 4.2 die im Streifen $-1/4 \leqslant \sigma \leqslant 2$ gültige Abschätzung

$$F_m(s) \ll e^{-c_8 H(m)} \cdot |N(z)|^{-\sigma} \cdot \prod_{p=1}^{r+1} \frac{|1+s-ib_p-iE_p(m)|^{e_p\sigma+1/2}}{|s-ib_p-iE_p(m)|} \tag{4.8}$$

folgt. Speziell erhält man für $\sigma = -1/4$:

$$F_m(-1/4+it) \ll e^{-c_8 H(m)} |N(z)|^{1/4} \big(1+|t-b_1-E_1(m)|\big)^{-3/4} \big(1+|t-b_2-E_2(m)|\big)^{-3/4}$$

und hieraus mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_m(-1/4+it)\,dt \ll e^{-c_8 H(m)} |N(z)|^{1/4}.$$

Summiert man noch über m, so ergibt sich mit (2.2) insgesamt:

$$E(z;\, \Lambda,\, U) = \frac{2^{r_2}}{R(U)} \sum_m \sum_0 \operatorname{Res} F_m(s) + O\Big(\frac{|\Theta|}{\Theta_1 \ldots \Theta_{r+1}} |N(z)|^{1/4}\Big). \tag{4.9}$$

Bei der Auswertung der Residuensumme gehen wir nun so vor: Wir legen um jeden der Punkte $ib_p + iE_p(m)$ $(p = 1, \ldots, r+1)$ eine Kreisscheibe vom positiven Radius $\varrho \leqslant 1/4$. Der Rand W der Vereinigung dieser Kreisscheiben ist durch die Bedingungen

$$|s - ib_p - iE_p(m)| \geqslant \varrho \quad \text{für} \quad s \in W,\ p = 1, \ldots, r+1; \tag{4.10}$$

$$|s - ib_p - iE_p(m)| = \varrho \quad \text{für mindestens ein } p = p(s) \quad (s \in W) \tag{4.11}$$

charakterisiert und besteht aus höchstens $r+1$ einfach geschlossenen Kurven mit einer Gesamtlänge $\ll \varrho$. Integrieren wir längs dieser Kurven im positiven Sinne, so ergibt sich:

$$\sum_0 \operatorname{Res} F_m(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_W F_m(s)\,ds.$$

Wir wählen jetzt

$$\varrho := (16Z)^{-1} < 1/8 \quad \text{mit} \quad Z := \log(1/|N(z)|) \geqslant \log 2; \tag{4.12}$$

dann folgt mit (4.8):

$$\sum_0 \operatorname{Res} F_m(s) \ll e^{-c_8 H(m)} \cdot \varrho \cdot \max_{s \in W} \prod_{p=1}^{r+1} \frac{1+|s-ib_p-iE_p(m)|^{1/2+2\varrho}}{|s-ib_p-iE_p(m)|} \tag{4.13}$$

und weiter wegen (4.10):

$$\sum_0 \operatorname{Res} F_m(s) \ll e^{-c_8 H(m)} \varrho^{-r}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus (2.2), (4.12) und (4.9).

Im Rest des Paragraphen beschränken wir uns auf den Fall $b_1 = \ldots \ldots = b_{r+1} = 0$, d.h. $\Lambda \equiv 1$, und setzen

$$E(z;\, 1,\, U) =: E(z;\, U).$$

Satz 4.2. *Es sei $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ für alle $\eta \in U$. Dann gilt für $z \in T$, $|N(z)| \leqslant 1/2$:*

$$E(z;U)=\frac{1}{r!\,R(U)}\log^r\frac{1}{N(z)}+O\left(\frac{|\Theta|}{\Theta_1\ldots\Theta_{r+1}}|N(z)|^{1/4}\right)$$

$$+O\left(\left(\frac{|\Theta|^{1/2}}{\Theta_1\ldots\Theta_{r+1}}+\left|\frac{1}{\Theta}\right|\frac{\log\left(1+\left|\frac{1}{\Theta}\right|R(U)\right)}{(\log 2N(\mathfrak{f}))^{r-1}}\right)|\Theta|\log^{r-1}\frac{1}{|N(z)|}\right).$$

Bemerkung. Im Falle $U=\mathfrak{E}^*(\mathfrak{f})$, $r>1$ erhält man hieraus offenbar eine von $\mathfrak{f}$ unabhängige Restgliedabschätzung.

Beweis. Wir legen die Ergebnisse des Beweises von Satz 4.1 (mit $b_1=\ldots=b_{r+1}=0$) zugrunde und wählen insbesondere ϱ wieder nach (4.12). Es sei $s\in W$; dann gilt nach Hilfssatz 2.1 stets

$$|s-iE_p(m)|\gg\frac{H(m)}{\Theta_p}\geqslant\frac{H(m)}{|\Theta|}\quad\text{für mindestens ein } p=p(s,m).$$

Auf die restlichen r Indizes p wenden wir (4.10) an und erhalten mit (4.12), (4.13):

$$\sum_0\operatorname{Res}F_m(s)\ll e^{-c_8H(m)}\left(\frac{|\Theta|}{H(m)}+\left(\frac{|\Theta|}{H(m)}\right)^{1/2-2\varrho}\right)Z^{r-1}\qquad(m\neq 0),$$

also nach Hilfssatz 2.2:

$$\frac{2^{r^2}}{R(U)}\sum_{m\neq 0}\sum_0\operatorname{Res}F_m(s)\ll\left(|\Theta|S_1+|\Theta|^{1/2-2\varrho}S_{1/2-2\varrho}\right)\frac{Z^{r-1}}{R(U)}$$

$$\ll\left(\frac{|\Theta|^{1/2-2\varrho}}{\Theta_1\ldots\Theta_{r+1}}+\left|\frac{1}{\Theta}\right|\frac{\log\left(1+\left|\frac{1}{\Theta}\right|R(U)\right)}{(\log 2N(\mathfrak{f}))^{r-1}}\right)|\Theta|Z^{r-1}.$$

Im Falle $|\Theta|>|N(z)|^2$ ist nun

$$|\Theta|^{-2\varrho}\ll 1;$$

ist dagegen $|\Theta|\leqslant|N(z)|^2$, dann gilt:

$$|\Theta|^{1/2-2\varrho}Z^{r-1}\leqslant|N(z)|^{2\cdot(1/4)}Z^{r-1}\ll|N(z)|^{1/4},$$

so daß in diesem Fall der entsprechende Term schon im O-Glied von (4.9) aufgeht. Mit Hilfssatz 4.3 folgt die Behauptung.

Satz 4.3. *K besitze die Eigenschaft* (1.4). *Dann gilt für* $z\in T$, $|N(z)|\leqslant 1/2$:

$$E(z;U)=\frac{1}{r!\,R(U)}\log^r\frac{1}{N(z)}-\frac{nC}{(r-1)!\,R(U)}\log^{r-1}\frac{1}{N(z)}$$

$$+O\left(\left(\left|\frac{1}{\Theta}\right|R(U)\right)^{c_9}\log^{r-2}\frac{1}{|N(z)|}\right),$$

wo C die Eulersche Konstante bezeichnet.

Beweis. Wir knüpfen wieder an den Beweis von Satz 2.1 an. Zu $s\in W$ sei p_0 das $p(s)$ gemäß (4.11). Nach Hilfssatz 2.3 gilt dann für $p=1,\ldots,r+1$:

$$|s-iE_p(m)|\leqslant|s-iE_{p_0}(m)|+|E_{p_0}(m)|+|E_p(m)|\ll 1+\left|\frac{1}{\Theta}\right|^2H(m).$$

Hilfssatz 2.4, angewandt auf die Zahlen

$$w_p:=\frac{1}{2\pi i}(s-iE_p(m)),$$

ergibt also im Fall $m\neq 0$, daß für mindestens zwei Indizes p gilt:

$$|s-iE_p(m)|\gg\left(\left(1+\left|\frac{1}{\Theta}\right|^2H(m)\right)R(U)\right)^{-c_7}.$$

Wendet man auf die restlichen $r-1$ Indizes p wieder (4.10) an, so folgt mit (4.12), (4.13):

$$\sum_0\operatorname{Res}F_m(s)\ll e^{-c_8H(m)}\left(\left(1+\left|\frac{1}{\Theta}\right|^2H(m)\right)R(U)\right)^{2c_7}Z^{r-2}\qquad(m\neq 0)$$

$$\ll e^{-c_8H(m)/2}\left(\left|\frac{1}{\Theta}\right|R(U)\right)^{4c_7}Z^{r-2}.$$

(2.2) und Hilfssatz 4.3 ergeben die Behauptung.

Bemerkung. Ist K total reell und $n\geqslant 4$, so kann man diese Asymptotik auch ohne Benutzung des Bakerschen Hilfssatzes 1.4 erhalten (nämlich aufgrund der Bemerkung am Ende von § 1), allerdings mit dem schwächeren Restglied

$$O\left(\exp\left(c_{10}|\Theta|\left|\frac{1}{\Theta}\right|^2R(U)\right)^{1/(r-2)}\log^{r-2}\frac{1}{|N(z)|}\right).$$

5. Heckesche Zetafunktionen. Wir ordnen dem Körper K in der von Hecke [4], § 2, beschriebenen Weise einen Bereich $\mathfrak{Z}=\{\hat\alpha,\hat\beta,\ldots\}$ idealer Zahlen nebst einer Schar Konjugierter $\mathfrak{Z}^{(p)}=\{\hat\alpha^{(p)},\hat\beta^{(p)},\ldots\}$ zu, so daß also jedes Ideal von K in der Form

$$(\hat\alpha):=\{\hat\alpha\gamma|\ \gamma\text{ ganz algebraisch}\}\cap K$$

mit passendem $\hat\alpha\in\mathfrak{Z}$ dargestellt werden kann. $\mathfrak{Z}$ zerfällt, den Idealklassen entsprechend, in h Klassen der Gestalt

$$\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\hat\alpha)=\{\hat\alpha\varrho|\ \varrho\in K\}\qquad(\hat\alpha\neq 0),$$

wobei die Zahl 0 insofern eine Sonderstellung einnimmt, als sie jeder Klasse angehört.

Es sei nun $\mathfrak{f}=(\hat\varphi)\neq(0)$ ein ganzes Ideal aus K. Für ganze Zahlen

$\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathfrak{Z}$ schreiben wir $\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} (\operatorname{mod} \mathfrak{f})$ oder kurz $\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta}(\mathfrak{f})$, wenn $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ in derselben Klasse $\mathfrak{K}$ liegen und $(\hat{\alpha}-\hat{\beta})\hat{\varphi}^{-1}$ ganz ist. $\hat{\alpha} \neq 0$ und $\hat{\beta} \neq 0$ heißen assoziiert mod $\mathfrak{f}$, wenn $\hat{\alpha}\hat{\beta}^{-1} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{f})$. Der Größencharakter λ für Zahlen mod $\mathfrak{f}$ und der Vorzeichencharakter v seien für $\hat{\mu} \in \mathfrak{Z}$, $\hat{\mu} \neq 0$ definiert durch

$$\lambda(\hat{\mu}) = \prod_{p=1}^{r+1} |\hat{\mu}^{(p)}|^{-ie_p g_p} \cdot \prod_{p=r_1+1}^{r+1} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}; \tag{5.1}$$

$$v(\hat{\mu}) = \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(p)}|}\right)^{a_p}. \tag{5.2}$$

Dabei soll gelten:

$$g_1, \ldots, g_{r+1} \in \boldsymbol{R}, \qquad \sum_{p=1}^{r+1} e_p g_p = 0;$$

$$a_1, \ldots, a_{r_1} \in \{0, 1\}, \qquad a_{r_1+1}, \ldots, a_{r+1} \in \boldsymbol{Z};$$

$$\lambda(\eta) = 1 \quad \text{für alle } \eta \in \mathfrak{E}(\mathfrak{f}). \tag{5.3}$$

Damit erklären wir

$$\zeta(s;\, \hat{\varrho},\, \lambda v,\, \mathfrak{f}) := \sum_{\substack{\hat{\mu} \equiv \hat{\varrho}(\mathfrak{f}) \\ (\hat{\mu})_{\mathfrak{f}}}}{}' \frac{\lambda v(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} \qquad (\sigma > 1).$$

Hierin ist $\hat{\varrho} \in \mathfrak{Z}$ ganz, und $\hat{\mu}$ durchläuft ein volles System mod $\mathfrak{f}$ nicht-assoziierter ganzer Zahlen aus der Klasse $\mathfrak{K}$ von $\hat{\varrho}$, die $\equiv \hat{\varrho} (\operatorname{mod} \mathfrak{f})$ sind, wobei $\hat{\mu} = 0$ ausgeschlossen ist (was durch den Strich am Summenzeichen angedeutet wird). Im Falle $\hat{\varrho} = 0$ ist hier noch zusätzlich festzulegen, welches die Klasse $\mathfrak{K}$ sein soll; dies wird im folgenden stets aus dem Zusammenhang hervorgehen. Im übrigen ist die Definition sinnvoll wegen (5.3). Analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung dieser Zetafunktionen ergeben sich ohne Schwierigkeiten aus [4], §§ 5–6, wie von Friedrich [2], § 3, skizziert. (Ein Versehen Friedrichs bezüglich des Faktors $M(\mathfrak{f}, \lambda v)$ wurde schon von Rademacher [10] berichtigt.) Das Ergebnis lautet:

Hilfssatz 5.1. *Die $\zeta(s;\, \hat{\varrho},\, \lambda v,\, \mathfrak{f})$ sind ganze Funktionen, wenn $\lambda v \not\equiv 1$. Im Falle $\lambda v \equiv 1$ (d.h. alle g_p und $a_p = 0$) besitzt ζ als einzige Singularität im Endlichen einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit dem Residuum*

$$\frac{2^{r+1} \pi^{r_2} R(\mathfrak{f})}{|\sqrt{d}|\, w(\mathfrak{f})\, N(\mathfrak{f})}.$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$\zeta(s;\, \hat{\varkappa},\, \lambda v,\, \mathfrak{f}) = \frac{i^{\Sigma a_p} v^2(\hat{\varkappa})}{\bar{\lambda} v(\hat{\varphi}\hat{\delta})} \cdot \frac{\gamma(\bar{\lambda})}{\gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(1-s;\, \bar{\lambda} v)}{\Gamma(s;\, \lambda v)} \cdot \frac{A^{1-2s}}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}}$$
$$\times \sum_{\substack{\hat{\varrho} \bmod \mathfrak{f} \\ \hat{\varrho} \in \mathfrak{K}}} e^{-2\pi i S\left(\frac{\hat{\varkappa}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)} \zeta(1-s;\, \hat{\varrho},\, \bar{\lambda} v,\, \mathfrak{f})$$

mit

$$\gamma(\lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} e_p^{-ie_p g_p/2}, \qquad \Gamma(s;\, \lambda v) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{e_p}{2}(s + ig_p) + \frac{1}{2}|a_p|\right),$$

$$A = \left(\frac{N(\mathfrak{f})\,|d|}{4^{r_2} \pi^n}\right)^{1/2}, \qquad (\hat{\delta}) = \mathfrak{d} \text{ die Differente von } K,$$

$$\mathfrak{K}\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}(\hat{\varphi}\hat{\delta}), \qquad \text{wenn } \mathfrak{K}' \text{ die Klasse von } \hat{\varkappa} \text{ ist}.$$

Im Falle $\hat{\varkappa} = 0$ ist außerdem $v^2(\hat{\varkappa}) := v^2(\mathfrak{K}')$ zu setzen (v^2 hängt nämlich nur von der Klasse ab; vgl. [4], § 2).

Da die Friedrichsche Abschätzung für unsere Zwecke nicht ganz ausreicht und zudem einen Fehler enthält (auf den noch hingewiesen wird), beweisen wir

Hilfssatz 5.2. *Mit der Dedekindschen Zetafunktion ζ_K gilt:*

$$|\zeta(s;\, \hat{\varrho},\, \lambda v,\, \mathfrak{f})| \ll \zeta_K(\sigma) \qquad (\sigma > 1).$$

Beweis. Offenbar ist

$$|\zeta(s;\, \hat{\varrho},\, \lambda v,\, \mathfrak{f})| \leqslant \sum_{\substack{\hat{\mu} \equiv \hat{\varrho}(\mathfrak{f}) \\ (\hat{\mu})_{\mathfrak{f}}}}{}' |N(\hat{\mu})|^{-\sigma}. \tag{5.4}$$

Zunächst sei $(\hat{\varrho}, \mathfrak{f}) = 1$. Ist dann $\hat{\mu} \equiv \hat{\mu}' \equiv \hat{\varrho} (\operatorname{mod} \mathfrak{f})$ und $(\hat{\mu}) = (\hat{\mu}')$, so folgt:

$$\hat{\mu} = \eta \hat{\mu}' \quad \text{mit einer Einheit } \eta \equiv 1 (\operatorname{mod} \mathfrak{f}).$$

Von den Scharen $(\hat{\mu})_{\mathfrak{f}}$ mod $\mathfrak{f}$ assoziierter Zahlen, über die in (5.4) summiert wird, bestimmen also – entsprechend den möglichen Vorzeichenverteilungen – jeweils höchstens 2^{r_1} dasselbe Ideal $(\hat{\mu})$. Die rechte Seite von (5.4) ist daher

$$\leqslant 2^{r_1} \sum_{(\hat{\mu}) \in \mathfrak{K}(\hat{\varrho})}{}' |N(\hat{\mu})|^{-\sigma} \ll \zeta_K(\sigma).$$

Nun sei $(\hat{\varrho}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{t} = (\hat{\tau})$. Mit $\hat{\mu} = \hat{\nu}\hat{\tau}$, $\hat{\varrho} = \hat{\sigma}\hat{\tau}$ ist dann $(\hat{\sigma}, \mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}) = 1$ und

$$\sum_{\substack{\hat{\mu} \equiv \hat{\varrho}(\mathfrak{f}) \\ (\hat{\mu})_{\mathfrak{f}}}}{}' |N(\hat{\mu})|^{-\sigma} = |N(\hat{\tau})|^{-\sigma} \sum_{\substack{\hat{\nu} \equiv \hat{\sigma}(\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}) \\ (\hat{\nu})_{\mathfrak{f}}}}{}' |N(\hat{\nu})|^{-\sigma}.$$

Hier vereinigen wir jeweils $[\mathfrak{E}(\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}) : \mathfrak{E}(\mathfrak{f})]$ Scharen $(\hat{\nu})_{\mathfrak{f}}$ zu einer Schar $(\hat{\nu})_{\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}}$; es entsteht

$$[\mathfrak{E}(\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}) : \mathfrak{E}(\mathfrak{f})]\, N(\mathfrak{t})^{-\sigma} \sum_{\substack{\hat{\nu} \equiv \hat{\sigma}(\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}) \\ (\hat{\nu})_{\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}}}}{}' |N(\hat{\nu})|^{-\sigma},$$

und mit dem zuvor Bewiesenen folgt die Behauptung, wenn man noch beachtet:

$$[\mathfrak{E}(\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1}) : \mathfrak{E}(\mathfrak{f})] \leqslant \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{f} \\ \varrho \equiv 1 (\mathfrak{f}\mathfrak{t}^{-1})}} 1 = N(\mathfrak{t}) \leqslant N(\mathfrak{t})^{\sigma}. \tag{5.5}$$

Es sei jetzt $\gamma\in K$, $\mathfrak{a}=(1,\gamma\mathfrak{d})^{-1}$ der Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$, $\alpha\in K$ ganz, $\mathfrak{A}\neq(0)$ ein ganzes Ideal und $\mathfrak{f}:=[\mathfrak{a},\mathfrak{A}]=\mathfrak{a}\mathfrak{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{A})^{-1}$. Dann wird definiert:

$$\Xi(s;\alpha,\gamma,\lambda v,\mathfrak{A}):=\sum_{\substack{\varkappa \bmod \mathfrak{f}\\ \varkappa\equiv\alpha(\mathfrak{A})}} e^{-2\pi i S(\gamma\varkappa)}\zeta(s;\varkappa,\lambda v,\mathfrak{f}). \tag{5.6}$$

Hilfssatz 5.3. *Es sei* $0<\varepsilon\leqslant 1/2$. *Dann gilt für* $-\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant 1+\varepsilon$, $|s-1|\geqslant 1/4$:

$$\Xi(s;\alpha,\gamma,\lambda v,\mathfrak{A})\ll\frac{1}{\varepsilon}N(\mathfrak{f})^{1+\varepsilon}\prod_{p=1}^{r+1}|1+|a_p|+s+ig_p|^{e_p(1+\varepsilon-\sigma)/2}.$$

Beweis. Wir betrachten die für $\sigma>-1$ holomorphe Funktion

$$\Psi(s):=\frac{s-1}{s+1}\,\Xi(s;\alpha,\gamma,\lambda v,\mathfrak{A}).$$

Auf $\sigma=1+\varepsilon$ hat man nach Hilfssatz 5.2:

$$\Psi(s)\ll\sum_{\substack{\varkappa \bmod \mathfrak{f}\\ \varkappa\equiv\alpha(\mathfrak{A})}}\zeta(1+\varepsilon;\varkappa,1,\mathfrak{f})=\sum_{\substack{\mu\equiv\alpha(\mathfrak{A})\\ (\mu)_{\mathfrak{f}}}}{}' |N(\mu)|^{-(1+\varepsilon)}$$

$$=[\mathfrak{E}(\mathfrak{A}):\mathfrak{E}(\mathfrak{f})]\,\zeta(1+\varepsilon;\alpha,1,\mathfrak{A})\ll N(\mathfrak{f})\zeta_K(1+\varepsilon).$$

Zur Abschätzung auf $\sigma=-\varepsilon$ setzen wir in (5.6) die Funktionalgleichung ein; das ergibt:

$$\Psi(s)\ll\left|\frac{\Gamma(1-s;\bar\lambda v)}{\Gamma(s;\lambda v)}\right|N(\mathfrak{f})^{\varepsilon}|Y|$$

mit

$$Y:=\sum_{\substack{\hat\varrho \bmod \mathfrak{f}\\ \hat\varrho\in\mathfrak{K}}}\zeta(1-s;\hat\varrho,\bar\lambda v,\mathfrak{f})\sum_{\substack{\varkappa \bmod \mathfrak{f}\\ \varkappa\equiv\alpha(\mathfrak{A})}}\exp\left(-2\pi i S\left(\varkappa\left(\gamma+\frac{\hat\varrho}{\hat\varphi\hat\delta}\right)\right)\right),$$

$(\hat\varphi)=\mathfrak{f}$, $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\hat\varphi\hat\delta)$. Hier verschwindet die innere Summe, es sei denn $\left(\gamma+\frac{\hat\varrho}{\hat\varphi\hat\delta}\right)\mathfrak{d}\mathfrak{A}$ ist ganz, d.h. $\hat\varrho\equiv-\gamma\hat\varphi\hat\delta(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})$; in diesem Falle hat sie den Wert

$$N(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})\exp\left(-2\pi i S\left(\alpha\left(\gamma+\frac{\hat\varrho}{\hat\varphi\hat\delta}\right)\right)\right).$$

Damit folgt wie oben (man vergleiche auch (5.5)):

$$Y=N(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})\sum_{\substack{\hat\varrho \bmod \mathfrak{f}\\ \hat\varrho\equiv-\gamma\hat\varphi\hat\delta(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})}}\zeta(1-s;\hat\varrho,\bar\lambda v,\mathfrak{f})\exp\left(-2\pi i S\left(\alpha\left(\gamma+\frac{\hat\varrho}{\hat\varphi\hat\delta}\right)\right)\right)$$

$$\ll N(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})\sum_{\substack{\hat\mu\equiv-\gamma\hat\varphi\hat\delta(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})\\ (\hat\mu)_{\mathfrak{f}}}}{}'|N(\hat\mu)|^{-(1+\varepsilon)}$$

$$=N(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})[\mathfrak{E}(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1}):\mathfrak{E}(\mathfrak{f})]\,\zeta(1+\varepsilon;-\gamma\hat\varphi\hat\delta,1,\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})$$

$$\ll N(\mathfrak{f})\zeta_K(1+\varepsilon).$$

Die Behauptung ergibt sich nun genauso, wie dies von Rademacher in [11], § 8, für die Heckeschen $\zeta(s;\lambda)$ ausgeführt worden ist, wenn man noch berücksichtigt, daß wegen des einfachen Pols von ζ_K gilt:

$$\zeta_K(1+\varepsilon)\ll 1/\varepsilon.$$

Bemerkung. Friedrichs Behauptung ([2], S. 38), auf $\sigma=-\varepsilon$ sei $|Y|\leqslant Be(\mathfrak{f})$ mit einem von γ, $\mathfrak{f}$ unabhängigen $B>0$, ist falsch. Setzt man nämlich

$$\mathfrak{A}=(1),\quad \lambda v\equiv 1,\quad s=-\varepsilon\quad\text{und}\quad \gamma=-(\hat\varphi\hat\delta)^{-1}\quad\text{mit ganzem }\hat\varphi\in\mathfrak{K}(\hat\delta^{-1}),$$

so reduziert sich Y auf

$$N(\mathfrak{f})\zeta(1+\varepsilon;1,1,\mathfrak{f})\geqslant N(\mathfrak{f}),$$

und es folgt:

$$B^{-1}\leqslant\frac{e(\mathfrak{f})}{N(\mathfrak{f})}\ll\frac{\varphi(\mathfrak{f})}{N(\mathfrak{f})}=\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\left(1-\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right),$$

wo der Buchstabe $\mathfrak{p}$ Primideale bezeichnet. Wählt man hier

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}_0\cdot\prod_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathfrak{K}_0\\ N(\mathfrak{p})\leqslant x}}\mathfrak{p},$$

mit einem festen ganzen Ideal $\mathfrak{f}_0\neq(0)$ aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{d}^{-1})$ ($\mathfrak{K}_0$ die Hauptklasse), so ergibt sich für $x\to\infty$ ein Widerspruch zur Divergenz der Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{K}_0}\frac{1}{N(\mathfrak{p})}.$$

6. Die geometrischen Reihen. Es werden die Bezeichnungen aus § 4 zugrundegelegt. Zu einem Λ gemäß (4.2), einem ganzen Ideal $\mathfrak{A}\neq(0)$ und einer ganzen Zahl $\alpha\in K$ definieren wir die geometrische Reihe

$$G(z;\alpha,\Lambda,\mathfrak{A}):=\sum_{\substack{\mu\equiv\alpha(\mathfrak{A})\\ \mu\succ 0}}\Lambda(\mu)\exp\Big\{-\sum_{p=1}^{r+1}|\mu^{(p)}|z_p\Big\}.$$

Sie stellt eine holomorphe Funktion von $z\in T$ dar.

Mit einem Vorzeichencharakter v nach (5.2) bilden wir ferner

$$\Phi(z;\alpha,\Lambda v,\mathfrak{A}):=\sum_{\mu\equiv\alpha(\mathfrak{A})}{}'\Lambda v(\mu)\exp\Big\{-\sum_{p=1}^{r+1}|\mu^{(p)}|z_p\Big\},$$

wo der Strich am Summenzeichen wieder bedeuten soll, daß $\mu = 0$ auszulassen ist. Offenbar gilt:

$$G(z;\alpha,\Lambda,\mathfrak{A}) = 2^{-r_1}\sum_{v}\Phi(z;\alpha,\Lambda v,\mathfrak{A}). \tag{6.1}$$

Hilfssatz 6.1. *Für $z \in T$ und $\sigma > 1$ gilt:*

$$\Phi(z;\alpha,\Lambda v,\mathfrak{A})$$
$$= \frac{2^{r_2} w(\mathfrak{A})}{2\pi i R(\mathfrak{A})}\sum_{m}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\prod_{p=1}^{r+1}\frac{\Gamma\big(e_p(s-ib_p-iE_p(m))\big)}{z_p^{e_p(s-ib_p-iE_p(m))}}\zeta(s;\alpha,\lambda_m v,\mathfrak{A})\,ds,$$

wo die Summation über alle $m=(m_1,\ldots,m_r)\in \mathbf{Z}^r$ läuft und die Zahlen $E_p(m)$ gemäß (2.1) *bezüglich einer beliebigen, festen Basis $\eta_1,\ldots,\eta_r$ von $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{A})$ gebildet sind. Ferner ist gesetzt*

$$\lambda_m(\mu) := \prod_{p=1}^{r+1}|\mu^{(p)}|^{ie_pE_p(m)}.$$

Beweis. In der absolut konvergenten Φ-Reihe fassen wir jeweils die mod $\mathfrak{A}$ assoziierten μ zusammen und erhalten

$$\Phi(z;\alpha,\Lambda v,\mathfrak{A}) = w(\mathfrak{A})\sum_{\substack{\mu\equiv\alpha(\mathfrak{A})\\(\mu)_{\mathfrak{A}}}}{}' \Lambda v(\mu)\,E\big(|\mu|z;\Lambda,\mathfrak{E}^*(\mathfrak{A})\big).$$

Hier tragen wir die Formel aus Hilfssatz 4.1 ein; das ergibt

$$\Phi = \frac{2^{r_2} w(\mathfrak{A})}{2\pi i R(\mathfrak{A})}\sum_{\substack{\mu\equiv\alpha(\mathfrak{A})\\(\mu)_{\mathfrak{A}}}}{}'\sum_{m}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\prod_{p=1}^{r+1}\frac{\Gamma\big(e_p(s-ib_p-iE_p(m))\big)}{z_p^{e_p(s-ib_p-iE_p(m))}}\cdot\frac{\lambda_m v(\mu)}{|N(\mu)|^s}\,ds.$$

Da dieser Ausdruck endlich bleibt, wenn man die Integranden durch ihre Absolutbeträge ersetzt, darf man die Summation über μ bis unter das Integral ziehen. ∎

In Hilfssatz 6.1 geht die Voraussetzung $r > 0$ ein. Die dortige Formel gilt jedoch bei geeigneter Interpretation auch im Falle $r = 0$, d.h. für den rationalen und die imaginär-quadratischen Zahlkörper. Man hat dann nur $R(\mathfrak{A}) = 1$ zu setzen und die Summation über m wegzulassen; mit anderen Worten:

Hilfssatz 6.2. *Ist $r = 0$, so gilt für $z \in T$ und $\sigma > 1$:*

$$\Phi(z;\alpha,\Lambda v,\mathfrak{A}) = \frac{2^{r_2} w(\mathfrak{A})}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma\big(e_1(s-ib_1)\big)}{z_1^{e_1(s-ib_1)}}\zeta(s;\alpha,v,\mathfrak{A})\,ds.$$

Der Beweis ergibt sich leicht durch direkte Anwendung von (4.6).

In diesem Sinne schließen alle folgenden Rechnungen den Fall $r = 0$ mit ein, ohne daß dies noch besonders erwähnt wird.

Um bei der asymptotischen Auswertung alle betrachteten Fälle möglichst lange gemeinsam behandeln zu können, formulieren wir

Hilfssatz 6.3. *Zu $\gamma \in K$ sei $\mathfrak{f} = \mathfrak{a}\mathfrak{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{A})^{-1}$, wo $\mathfrak{a}$ der Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$ ist, und*

$$\tilde G(z;\alpha,\gamma,\Lambda,\mathfrak{A}) := \sum_{\substack{\varkappa \bmod \mathfrak{f}\\ \varkappa\equiv\alpha(\mathfrak{A})}}{}' e^{-2\pi i S(\gamma\varkappa)}G(z;\varkappa,\Lambda,\mathfrak{f}).$$

Dann gilt für $z\in T$ mit $|N(z)|\leqslant 1/2$:

$$\tilde G(z;\alpha,\gamma,\Lambda,\mathfrak{A}) = \Delta(\gamma,\mathfrak{A})\frac{(4\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|\,N(\mathfrak{A})}e^{-2\pi i S(\gamma\alpha)}\prod_{p=1}^{r+1}\frac{\Gamma\big(e_p(1-ib_p)\big)}{z_p^{e_p(1-ib_p)}}$$
$$+O_\Lambda\Big(\prod_{p=1}^{r+1}\Theta_p^{-(e_p+1)/2}\cdot N(\mathfrak{f})^{5/4}|N(z)|^{1/4}\Big)$$
$$+O_\Lambda\left(|\Theta|\prod_{p=1}^{r+1}\Theta_p^{-(e_p+1)/2}\cdot N(\mathfrak{f})\log\left(2\left|\frac{1}{\Theta}\right|N(\mathfrak{f})\right)\log^r\left(\left|\frac{1}{\Theta}\right|\frac{N(\mathfrak{f})}{|N(z)|}\right)\right).$$

Dabei ist gesetzt:

$$\Delta(\gamma,\mathfrak{A}) := \begin{cases}1 & \textit{wenn } \mathfrak{a}\mid\mathfrak{A},\\ 0 & \textit{sonst},\end{cases}$$

die Θ_p sind durch (4.1) definiert, und „O_Λ" bringt zum Ausdruck, daß die O-Konstante von Λ abhängen darf.

Beweis. Nach (5.6), (6.1) und Hilfssatz 6.1 hat man

$$\tilde G(z;\alpha,\gamma,\Lambda,\mathfrak{A}) = \frac{2^{r_2-r_1}w(\mathfrak{f})}{2\pi i R(\mathfrak{f})}\sum_{m}\sum_{v}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F_{m,v}(s)\,ds \qquad (\sigma>1) \tag{6.2}$$

mit

$$F_{m,v}(s) := \prod_{p=1}^{r+1}\frac{\Gamma\big(e_p(s-ib_p-iE_p(m))\big)}{z_p^{e_p(s-ib_p-iE_p(m))}}\,\Xi(s;\alpha,\gamma,\lambda_m v,\mathfrak{A}). \tag{6.3}$$

Die hier den $E_p(m)$ zugrundeliegende Basis $\eta_1,\ldots,\eta_r$ von $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{f})$ sei nach Hilfssatz 1.1 mit obigen Θ_p gewählt. Den Hilfssätzen 4.2 und 5.3 entnehmen wir für $0<\varepsilon\leqslant 1/4$ die in $-\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant 1+\varepsilon$, $|s-1|\geqslant 1/4$ gültige Abschätzung (man beachte, daß jetzt in (5.1), (5.2) alle $a_p\in\{0,1\}$ sind):

$$F_{m,v}(s) \ll \frac{1}{\varepsilon}N(\mathfrak{f})^{1+\varepsilon}|N(z)|^{-\sigma}\exp\Big(-\sum_{p=1}^{r+1}\Theta_p|t-b_p-E_p(m)|\Big)$$
$$\times\prod_{p=1}^{r+1}\left(\frac{|1+s-ib_p-iE_p(m)|^{e_p\sigma+1/2}}{|s-ib_p-iE_p(m)|}|1+s-iE_p(m)|^{e_p(1+\varepsilon-\sigma)/2}\right).$$

Hier gilt:

$$e^{-\Theta_p|t-b_p-E_p(m)|/4}\,|1+s-ib_p-iE_p(m)|^{e_p\sigma-1/2}\,|1+s-iE_p(m)|^{e_p(1+\varepsilon-\sigma)/2}$$
$$\ll_\Lambda e^{-\Theta_p|1+s-ib_p-iE_p(m)|/4}\,|1+s-ib_p-iE_p(m)|^{e_p(1+\varepsilon+\sigma)/2-1/2}$$
$$\ll \Theta_p^{-e_p(1+\varepsilon+\sigma)/2+1/2},$$

letzteres wegen $e^{-\Theta x}x^u \ll \Theta^{-u}$ für $\Theta>0$, $x\geqslant 0$, $0\leqslant u\leqslant 1$. Damit und mit Hilfssatz 2.1 folgt:

$$(6.4)\qquad F_{m,v}(s) \ll_\Lambda \frac{1}{\varepsilon}N(\mathfrak{f})^{1+\varepsilon}|N(z)|^{-\sigma}e^{-c_{11}H(m)}\prod_{p=1}^{r+1}\Theta_p^{-e_p(1+\varepsilon+\sigma)/2+1/2}$$
$$\times\prod_{p=1}^{r+1}\left|\frac{1+s-ib_p-iE_p(m)}{s-ib_p-iE_p(m)}\right|\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{r+1}\Theta_p|t-E_p(m)|\right).$$

Man sieht nun ohne weiteres, daß man in (6.2) den Integrationsweg nach links auf die Gerade $\sigma=-1/4$ verschieben darf, wenn man die Residuen der Integranden in $s=1$ und auf der imaginären Achse berücksichtigt. Mit Hilfe der Substitution $t-E_{p_0}(m)\to t$, wo $\Theta_{p_0}=\max\Theta_p \gg |\Theta|$, erkennt man, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{r+1}\Theta_p|t-E_p(m)|\right)dt \ll \int_{-\infty}^{\infty}e^{-c_{12}|\Theta||t|}\,dt \ll |\Theta|^{-1}.$$

Also folgt mit (6.4), $\varepsilon=-\sigma=1/4$, und (2.2), daß der Gesamtbeitrag, den die Integrale längs $\sigma=-1/4$ zu $\tilde{G}$ liefern,

$$O_\Lambda\Big(\prod_{p=1}^{r+1}\Theta_p^{-(e_p+1)/2}\cdot N(\mathfrak{f})^{5/4}|N(z)|^{1/4}\Big)$$

ist. Im Punkt $s=1$ treten Singularitäten nur auf, wenn $m=0$ und $v\equiv 1$. Da das in Hilfssatz 5.1 angegebene Residuum von der Restklasse unabhängig und

$$\sum_{\substack{x \bmod \mathfrak{f}\\ x\equiv\alpha(\mathfrak{A})}} e^{-2\pi i S(\gamma x)} = \Delta(\gamma,\mathfrak{A})\,N(\mathfrak{f}\mathfrak{A}^{-1})\,e^{-2\pi i S(\gamma\alpha)}$$

ist, erhalten wir aus (6.2) als Zwischenergebnis

$$(6.5)\qquad \tilde{G}(z;\alpha,\gamma,\Lambda,\mathfrak{A}) = \Delta(\gamma,\mathfrak{A})\frac{(4\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|\,N(\mathfrak{A})}e^{-2\pi i S(\gamma\alpha)}\prod_{p=1}^{r+1}\frac{\Gamma(e_p(1-ib_p))}{z_p^{e_p(1-ib_p)}}$$
$$+\frac{2^{r_2-r_1}w(\mathfrak{f})}{R(\mathfrak{f})}\sum_m\sum_v\sum_0 \operatorname{Res}F_{m,v}(s)$$
$$+O_\Lambda\Big(\prod_{p=1}^{r+1}\Theta_p^{-(e_p+1)/2}\cdot N(\mathfrak{f})^{5/4}|N(z)|^{1/4}\Big),$$

wo $\sum_0 \operatorname{Res}F_{m,v}(s)$ die Residuensumme von $F_{m,v}(s)$ auf der imaginären Achse

bezeichnet; diese gilt es nun auszuwerten. Dazu setzen wir mit $c_{13}:=4(\log(4/\pi))^{-1}$

$$\varepsilon := \left(c_{13}\log\left(2\left|\frac{1}{\Theta}\right|N(\mathfrak{f})\right)\right)^{-1},\qquad \varrho := \left(c_{13}\log\left(\left|\frac{1}{\Theta}\right|\frac{N(\mathfrak{f})}{|N(z)|}\right)\right)^{-1},$$

also $0<\varrho\leqslant\varepsilon\leqslant 1/4$, und betrachten zu diesem ϱ den um die Punkte $ib_p+iE_p(m)$ herum gelegten Weg W aus § 4, der ganz im Streifen $-\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant\varepsilon$ enthalten ist. Für $s\in W$ gilt:

$$\Theta_p^{-e_p(1+\varepsilon+\sigma)/2+1/2} \ll \Theta_p^{-(e_p-1)/2}\left|\frac{1}{\Theta}\right|^{2\varepsilon} \ll \Theta_p^{-(e_p-1)/2},$$
$$|N(z)|^{-\sigma} \ll |N(z)|^{-\varrho} \ll 1,\qquad N(\mathfrak{f})^{\varepsilon} \ll 1;$$

schätzen wir also in

$$\sum_0 \operatorname{Res}F_{m,v}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_W F_{m,v}(s)\,ds$$

die rechte Seite mit Hilfe von (6.4) ab, so folgt:

$$\sum_0 \operatorname{Res}F_{m,v}(s) \ll_\Lambda e^{-c_{11}H(m)}\prod_{p=1}^{r+1}\Theta_p^{-(e_p-1)/2}N(\mathfrak{f})\frac{\varrho}{\varepsilon}P$$

mit

$$P := \max_{s\in W}\prod_{p=1}^{r+1}\left(1+\frac{1}{|s-ib_p-iE_p(m)|}\right).$$

Wegen (4.10) ist $P\ll\varrho^{-(r+1)}$, und die Behauptung folgt mit (2.2) und (6.5).

Bei beliebigem Körper K lohnt nur die Betrachtung des Falles $\gamma=0$; hier ist $\mathfrak{a}=(1)$, $\mathfrak{f}=\mathfrak{A}$, $\Delta(0,\mathfrak{A})=1$ und

$$\tilde{G}(z;\alpha,0,\Lambda,\mathfrak{A}) = G(z;\alpha,\Lambda,\mathfrak{A}),$$

so daß sich aus Hilfssatz 6.3 sofort eine Asymptotik für die geometrische Reihe ergibt.

Wir wenden uns nun dem interessanteren Fall des total reellen Körpers zu. Dort gilt nämlich

$$\tilde{G}(z;\alpha,\gamma,\Lambda,\mathfrak{A}) = G(z+2\pi i\gamma;\alpha,\Lambda,\mathfrak{A})$$

mit $z+2\pi i\gamma := (z_1+2\pi i\gamma^{(1)},\ldots,z_n+2\pi i\gamma^{(n)})$; Hilfssatz 6.3 beschreibt also das Verhalten der geometrischen Reihe bei der Annäherung an das $2\pi i$-fache beliebiger Körperzahlen:

Satz 6.1. *K sei total reell. Dann gilt unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 6.3:*

$$G(z+2\pi i\gamma;\,\alpha,\,\Lambda,\,\mathfrak{A})$$

$$= \Delta(\gamma,\,\mathfrak{A})\frac{e^{-2\pi i S(\gamma\alpha)}}{\sqrt{d}\,N(\mathfrak{A})}\prod_{p=1}^{n}\frac{\Gamma(1-ib_p)}{z_p^{1-ib_p}}+O_\Lambda\left(\frac{N(\mathfrak{f})^{5/4}\,|N(z)|^{1/4}}{\Theta_1\ldots\Theta_n}\right)$$

$$+O_\Lambda\left(\frac{|\Theta|}{\Theta_1\ldots\Theta_n}N(\mathfrak{f})\log\left(2\left|\frac{1}{\Theta}\right|N(\mathfrak{f})\right)\log^r\left(\left|\frac{1}{\Theta}\right|\frac{N(\mathfrak{f})}{|N(z)|}\right)\right).$$

Im Falle $\Lambda\equiv 1$ kann man hier nach dem Muster von § 4 noch weitere Terme von logarithmischer Größenordnung isolieren; ich gehe darauf nicht näher ein.

7. Zerfällung total positiver Zahlen in Summanden. K sei jetzt total reell. $\mathfrak{A}\neq(0)$ sei ein ganzes Ideal, und für $j=1,\ldots,k$ sei $\alpha_j\in K$ ganz und

$$\Lambda_j(\mu)=\prod_{p=1}^{n}|\mu^{(p)}|^{-ib_{jp}}\qquad(\mu\neq 0)$$

mit reellen b_{jp}. Ziel der folgenden Untersuchungen ist die asymptotische Auswertung des Ausdrucks

$$A_k(\nu):=\sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_k)\\ 0\prec\nu_j\equiv\alpha_j(\mathfrak{A})\\ \nu_1+\ldots+\nu_k=\nu}}\ \prod_{j=1}^{k}\Lambda_j(\nu_j)\qquad(\nu\succ 0\text{ ganz})$$

für $N(\nu)\to\infty$. Alle O- und $\ll$-Konstanten dürfen dabei von jetzt an außer von K auch von k, $\mathfrak{A}$ und den Λ_j abhängen, ohne daß dies noch besonders hervorgehoben wird.

Offenbar ist $A_k(\nu)=0$, wenn nicht

$$\nu\equiv\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(\operatorname{mod}\mathfrak{A}). \tag{7.1}$$

Satz 7.1. *Es sei $k\geqslant 3$. Unter der Voraussetzung* (7.1) *gilt dann für $N(\nu)\geqslant 2$:*

$$A_k(\nu)=\left(\frac{N(\nu)}{\sqrt{d}\,N(\mathfrak{A})}\right)^{k-1}\cdot\prod_{j=1}^{k}\Lambda_j(\nu)\cdot\prod_{p=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(1-ib_{jp})}{\Gamma(k-ib_p^*)}$$
$$+O\left(N(\nu)^{k-2}\log^{n-1}N(\nu)+N(\nu)^{k/2}\log^{kn}N(\nu)\right) \tag{7.2}$$

mit $b_p^*:=\sum_{j=1}^{k}b_{jp}$.

(Für $3\leqslant k\leqslant 4$ kann im Restglied natürlich der erste, für $k\geqslant 5$ der zweite Summand weggelassen werden.)

Beweis. In jeder Schar mod $\mathfrak{A}$ assoziierter Zahlen $\nu\succ 0$ gibt es ein Exemplar mit

$$N(\nu)^{1/n}\ll\nu^{(p)}\ll N(\nu)^{1/n}\qquad(p=1,\ldots,n). \tag{7.3}$$

Andererseits bewirkt der Übergang von ν zu $\eta\nu$ $(\eta\in\mathfrak{E}(\mathfrak{A}))$ nur die Multiplikation beider Seiten von (7.2) mit dem Faktor

$$\prod_{j=1}^{k}\Lambda_j(\eta)$$

vom Betrage 1, so daß wir unsere Betrachtung auf solche ν beschränken können, die (7.3) erfüllen.

$A_k(\nu)$ besitzt die Darstellung (vgl. [9], § 6.1)

$$A_k(\nu)=\int_0^1\!\!\ldots\!\int\prod_{j=1}^{k}G(z;\,\alpha_j,\,\Lambda_j,\,\mathfrak{A})\cdot e^{S(\nu z)}\,du_1\ldots du_n, \tag{7.4}$$

wo mit einer Basis $\omega_1,\ldots,\omega_n$ des Ideals $\mathfrak{d}^{-1}$ gesetzt ist:

$$z_p=\frac{1}{\nu^{(p)}}+2\pi i y_p,\qquad y_p=\sum_{q=1}^{n}\omega_q^{(p)}u_q,\qquad S(\nu z)=\sum_{p=1}^{n}\nu^{(p)}z_p. \tag{7.5}$$

Zur weiteren Behandlung von (7.4) benötigen wir Rademachers Version der Siegelschen Farey-Zerschneidung. Wir formulieren sie als

Hilfssatz 7.1. *Es sei $M>N(\mathfrak{d})$. Zu jeder Zahl γ aus K, für die die Norm des Nenners $\mathfrak{a}$ von $\gamma\mathfrak{d}$ höchstens gleich M ist, sei $\mathfrak{G}_\gamma$ bzw. $\mathfrak{H}_\gamma$ die Menge aller $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$ mit*

$$\prod_{p=1}^{n}\left(1+M^{2/n}|y_p-\gamma^{(p)}|\right)\leqslant\frac{2^n M}{N(\mathfrak{a})}\qquad\text{bzw.}\qquad\leqslant\frac{M}{\sqrt{N(\mathfrak{d})\,N(\mathfrak{a})}}.$$

Der $\boldsymbol{R}^n$ läßt sich so in Jordan-meßbare Bereiche $\mathfrak{F}_\gamma$ zerschneiden, die zu obigen Zahlen γ gehören, daß erstens $\mathfrak{H}_\gamma\subseteq\mathfrak{F}_\gamma\subseteq\mathfrak{G}_\gamma$ und zweitens die zu einem vollen System mod $\mathfrak{d}^{-1}$ *inkongruenter solcher γ gehörenden $\mathfrak{F}_\gamma$ zusammen einen Bereich bilden, der zu jedem Punkt $y\in\boldsymbol{R}^n$ genau einen ihm* mod $\mathfrak{d}^{-1}$ *kongruenten enthält.*

Beweis. Siehe [9], Hilfssätze 2–4.

Wir führen diese Farey-Zerschneidung ein mit

$$M=N(\nu)^{1/2}. \tag{7.6}$$

Da der Integrand in (7.4) für mod $\mathfrak{d}^{-1}$ kongruente y jeweils denselben Wert hat, dürfen wir dort das von y gemäß (7.5) durchlaufene Fundamental-Parallelotop mod $\mathfrak{d}^{-1}$ ersetzen durch die Vereinigung der $\mathfrak{F}_\gamma$, die zu irgendeinem vollen System mod $\mathfrak{d}^{-1}$ inkongruenter $\gamma\in K$ mit $N(\mathfrak{a})\leqslant M$ gehören ($\mathfrak{a}$ bezeichne immer den Nenner von $\gamma\mathfrak{d}$). Wir erhalten so

$$A_k(\nu)=\sum_{\substack{\gamma\bmod\mathfrak{d}^{-1}\\ N(\mathfrak{a})\leqslant M}}\ \int\!\!\ldots\!\int_{y\in\mathfrak{F}_\gamma}\prod_{j=1}^{k}G(z;\,\alpha_j,\,\Lambda_j,\,\mathfrak{A})\cdot e^{S(\nu z)}\,du_1\ldots du_n.$$

Als dann ergibt die Substitution $y \to y+\gamma$:

$$A_k(v) = e^n \sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ N(\mathfrak{a}) \leqslant M}} e^{2\pi i S(\gamma v)}$$

$$\times \int_{y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma} \cdots \int \prod_{j=1}^{k} G(z+2\pi i\gamma;\, \alpha_j,\, \Lambda_j,\, \mathfrak{A}) \cdot e^{2\pi i S(vy)}\, du_1 \ldots du_n.$$

Nach (7.3), (7.6) und Hilfssatz 7.1 gilt nun wegen $\mathfrak{F}_\gamma \subseteq \mathfrak{G}_\gamma$:

$$Q := \prod_{p=1}^{n} |1+2\pi i v^{(p)} y_p| \ll N(v)^{1/2}/N(\mathfrak{a}) \qquad (y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma). \tag{7.7}$$

Weiter hat man

$$|N(z)| = Q/N(v), \tag{7.8}$$

und nach (7.7) ist dies $\leqslant 1/2$ für $y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma$, wenn $N(v)$ genügend groß ist (was wir offenbar voraussetzen dürfen), so daß Satz 6.1 angewandt werden kann. Mit dessen Bezeichnungen gilt:

$$\Theta_p \geqslant \sin \Theta_p = |1+2\pi i v^{(p)} y_p|^{-1},$$

also

$$\frac{|\Theta|}{\Theta_1 \ldots \Theta_n} \ll \frac{1}{\Theta_1 \ldots \Theta_n} \leqslant Q; \qquad \left|\frac{1}{\Theta}\right| \ll \sum_{p=1}^{n} |1+2\pi i v^{(p)} y_p| \ll Q,$$

sowie $N(\mathfrak{f}) \ll N(\mathfrak{a})$. Schreiben wir also

$$G(z+2\pi i\gamma;\, \alpha_j,\, \Lambda_j,\, \mathfrak{A}) =: g_j(z;\gamma) + h_j(z;\gamma) \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

mit

$$g_j(z;\gamma) := \Delta(\gamma;\, \mathfrak{A}) \frac{e^{-2\pi i S(\gamma\alpha_j)}}{\sqrt{d}\, N(\mathfrak{A})} \prod_{p=1}^{n} \frac{\Gamma(1-ib_{jp})}{z_p^{1-ib_{jp}}}, \tag{7.9}$$

dann ist $g_j(z;\gamma) \ll \Delta(\gamma;\, \mathfrak{A})\, N(v)\, Q^{-1}$ wegen (7.8), und nach Satz 6.1 gilt:

$$h_j(z;\gamma) \ll h \qquad (y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma),$$

wo

$$h := N(\mathfrak{a})\, Q \log(2N(\mathfrak{a})\, Q) \log^r N(v) \ll N(v)^{1/2} \log^n N(v). \tag{7.10}$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$A_k(v) = e^n \sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ N(\mathfrak{a}) \leqslant M}} e^{2\pi i S(\gamma v)} \int_{y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma} \cdots \int \prod_{j=1}^{k} g_j(z;\gamma) \cdot e^{2\pi i S(vy)}\, du_1 \ldots du_n$$

$$+ O\Big(\sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ N(\mathfrak{a}) \leqslant M}} \int_{y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma} \cdots \int \big(\Delta(\gamma;\, \mathfrak{A}) \sum_{l=1}^{k-1} N(v)^l Q^{-l} h^{k-l} + h^k\big)\, du_1 \ldots du_n\Big).$$

Hier schätzen wir h^k nach (7.10) ab und erhalten, indem wir die Stücke der Farey-Zerschneidung wieder zusammenfügen:

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ N(\mathfrak{a}) \leqslant M}} \int_{y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma} \cdots \int h^k\, du_1 \ldots du_n \ll \int_0^1 \cdots \int N(v)^{k/2} \log^{kn} N(v)\, du_1 \ldots du_n$$

$$= N(v)^{k/2} \log^{kn} N(v).$$

Wegen des Faktors $\Delta(\gamma;\, \mathfrak{A})$ treten die übrigen Terme in obigem Restglied nur für $\mathfrak{a} | \mathfrak{A}$ auf. In diesem Falle ist $N(\mathfrak{a}) \ll 1$, und die Gesamtanzahl der zugehörigen $\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1}$ beträgt

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathfrak{a} | \mathfrak{A}}} 1 = \sum_{\mathfrak{a} | \mathfrak{A}} \varphi(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{A}) \ll 1, \tag{7.11}$$

so daß wir hier die Abhängigkeit von $\mathfrak{a}$ vernachlässigen können. In diesem Sinne: Nach (7.7), (7.10) ist für $y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma$

$$\sum_{l=1}^{k-1} N(v)^l Q^{-l} h^{k-l} \ll \frac{\log^k 2Q}{Q^2} \sum_{l=1}^{k-1} N(v)^l Q^{k+2-2l} \log^{r(k-l)} N(v)$$

$$\ll Q^{-3/2} \Big(\sum_{1 \leqslant l < k/2+1} N(v)^l N(v)^{k/2+1-l} \log^{r(k-l)} N(v)$$

$$+ \sum_{k/2+1 \leqslant l < k} N(v)^l \log^{r(k-l)} N(v)\Big)$$

$$\ll Q^{-3/2} \big(N(v)^{k/2+1} \log^{kn} N(v) + N(v)^{k-1} \log^r N(v)\big),$$

und wegen (7.5) gilt:

$$\int_{y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma} \cdots \int Q^{-3/2}\, du_1 \ldots du_n \ll \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{p=1}^{n} |1+2\pi i v^{(p)} y_p|^{-3/2}\, dy_1 \ldots dy_n \ll N(v)^{-1}.$$

Damit erhalten wir, wenn wir noch die g_j nach (7.9) einsetzen:

$$A_k(v) = \left(\frac{N(v)}{\sqrt{d}\, N(\mathfrak{A})}\right)^k \prod_{j=1}^{k} \Lambda_j(v) \cdot \prod_{p=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \Gamma(1-ib_{jp}) \cdot e^n \tag{7.12}$$

$$\times \sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathfrak{a} | \mathfrak{A}}} \exp\Big(2\pi i S\big(\gamma(v - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j)\big)\Big) \int_{y+\gamma \in \mathfrak{F}_\gamma} \cdots \int \prod_{p=1}^{n} \frac{e^{2\pi i v^{(p)} y_p}}{(1+2\pi i v^{(p)} y_p)^{k-ib_p^*}}\, du_1 \ldots du_n$$

$$+ O\big(N(v)^{k-2} \log^r N(v) + N(v)^{k/2} \log^{kn} N(v)\big).$$

Als nächstes schätzen wir den Fehler ab, den wir begehen, wenn wir die Integrale in (7.12) über den ganzen $\boldsymbol{R}^n$ erstrecken. Der Integrand ist offenbar $\ll Q^{-k}$, und nach Hilfssatz 7.1, (7.3) und (7.6) hat man für $y+\gamma \notin \mathfrak{F}_\gamma \supseteq \mathfrak{H}_\gamma$:

$$Q \gg \prod_{p=1}^{n} (1+M^{2/n}|y_p|) \gg M = N(\nu)^{1/2};$$

es folgt:

$$\int_{y+\gamma\notin\mathfrak{F}_\gamma} \cdots \int Q^{-k}\, du_1 \ldots du_n \ll N(\nu)^{-(k-2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int Q^{-2}\, dy_1 \ldots dy_n \ll N(\nu)^{-k/2}.$$

Wegen (7.11) und dem Faktor $N(\nu)^k$ in (7.12) ergibt sich der Gesamtfehler also zu $O(N(\nu)^{k/2})$, und dies geht schon im Restglied von (7.12) auf.

Die über den $\boldsymbol{R}^n$ erstreckten Integrale aus (7.12) haben nach (7.5) und [7], § 63 (8), den von γ unabhängigen Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \prod_{p=1}^{n} \frac{e^{2\pi i \nu^{(p)} y_p}}{(1+2\pi i \nu^{(p)} y_p)^{k-ib_p^*}}\, du_1 \ldots du_n = \frac{\sqrt{d}}{N(\nu)} \prod_{p=1}^{n} \frac{e^{-1}}{\Gamma(k-ib_p^*)},$$

und wegen (7.1), (7.11) ist schließlich

$$\sum_{\substack{\gamma \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathfrak{a}|\mathfrak{A}}} \exp\Big(2\pi i S\big(\gamma(\nu - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j)\big)\Big) = N(\mathfrak{A}).$$

Es folgt (7.2). ■

Literaturverzeichnis

[1] A. Baker, *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms*, Acta Arith. 21 (1972), S. 117–129.

[2] R. Friedrich, *Über die Zerfällung einer Zahl in Summanden in beliebigen algebraischen Zahlkörpern*, Mitt. math. Ges. Hamburg 7 (1931), S. 31–58.

[3] E. Hecke, *Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehung zur Verteilung der Primzahlen*, Erste Mitteilung, Math. Z. 1 (1918), S. 357–376.

[4] –, –, Zweite Mitteilung, ibid., 6 (1920), S. 11–51.

[5] – *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen*, Erster Teil, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1 (1921), S. 102–126.

[6] D. H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. Math. (2) 34 (1933), S. 461–479.

[7] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Nachdruck, New York 1965.

[8] O. Perron, *Irrationalzahlen*, Berlin und Leipzig 1921.

[9] H. Rademacher, *Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. III. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper*, Math. Z. 27 (1927), S. 321–426.

[10] – *Besprechung von* [2], Fortschritte der Math. 57. II (1931), S. 1368–1369.

[11] – *On the Phragmén–Lindelöf theorem and some applications*, Math. Z. 72 (1959), S. 192–204.

[12] R. Salem, *Power series with integral coefficients*, Duke Math. J. 12 (1945), S. 153–172.

[13] W. Schaal, *Übertragung des Kreisproblems auf reell-quadratische Zahlkörper*, Math. Ann. 145 (1962), S. 273–284.

[14] – *Der Satz von Erdös und Fuchs in reell-quadratischen Zahlkörpern*, Acta Arith. 32 (1977), S. 147–156.

[15] C. L. Siegel, *Abschätzung von Einheiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. (1969), S. 71–86.

[16] H. Sitter und U. Rausch, *Der Satz von Erdös–Fuchs in total reellen Zahlkörpern* (erscheint demnächst).

[17] J. D. Vaaler, *A geometric inequality with applications to linear forms*, Pacific J. Math. 83 (1979), S. 543–553.

FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT MARBURG, LAHNBERGE
D-3550 MARBURG

Eingegangen am 21.12.1984
und in revidierter Form am 21.8.1985 (1484)