ACTA ARITHMETICA
XLVII (1986)

Das wissenschaftliche Werk von Max Deuring

von

MARTIN EICHLER (Basel)

Max Deuring wurde am 9. Dezember 1907 in Göttingen geboren, besuchte dort Schule und Universität bis zur Promotion im Jahre 1930 und verstarb als Professor Emeritus am 20. Dezember 1984 ebenfalls in Göttingen. Er musste seinen Lebensweg in politisch und finanziell schwierigen Zeiten gehen; ich verzichte auf die Aufzählung seiner Stationen. Deuring erschöpfte seine Kraft in stiller wissenschaftlicher Arbeit, die ihm bald Anerkennung brachte und auch heute noch beachtenswert ist.

Um sein Lebenswerk zu verstehen, müssen wir kurz auf den Zustand seines Arbeitsgebiets, der Zahlentheorie und der Algebra, um das Jahr 1930 eingehen. Erstens waren die von Hilbert ausgehenden Anregungen in der Zahlentheorie auf ihrem Höhepunkt angelangt, der etwa durch Hasse's Bericht über die Klassenkörpertheorie gekennzeichnet werden konnte. Zweitens hatten formal algebraische Methoden ältere Bereiche der Forschung umfassend erschlossen und neue angeschnitten. Eine der treibenden Kräfte war Emmy Noether, welche auch Deuring's Dissertation angeregt hatte.

Deuring war schon als Lernender nicht nur rezeptiv. Vielmehr konnte er an mehreren Stellen Vereinfachungen und Verallgemeinerungen bestehender Gedankengänge vorschlagen. Hierzu gehört die Arbeit [1], in welcher er die Hilbertsche Theorie des Verhaltens von Primdivisoren in Galoisschen Erweiterungen auf abstrakte bewertete Körper übertrung. Vereinfachungen der Schlussweisen und stärkere Durchdringung des Sachverhalts mit Kenntnissen aus der Klassenkörpertheorie finden sich in [2], [9], [12]. In [5], [16] studiert er, angeregt durch E. Noether, endlich algebraische Körpererweiterungen als Darstellungsmoduln der Galoisschen Gruppe. Die hier gemachten Ansätze wirken bis in unsere Tage fort, u. a. bei H. Zassenhaus und A. Fröhlich.

An einem von verschiedenen Forschern sehr intensiv bearbeiteten Thema nimmt Deuring vollen Anteil: der algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. Hierher gehört insbesondere die Dissertation [4], in welcher zunächst das Beispiel der algebraischen Zahlentheorie nachgebildet wird. Über die Struktur der Divisorenklassengruppe lässt sich mehr aussagen als über die Idealklassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers, wie Deuring im Anschluss an Hasse in [15] feststellt. Diese Gruppe stimmt „im klassischen Falle" mit der additiven Gruppe der Jacobischen Mannigfaltigkeit überein, hat aber auch bei Körpern von Primzahlcharakteristik vergleichbare Eigenschaften. Dieses führt dazu, dass Deuring das Verhalten algebraischer Funktionenkörper über $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{F}_p$ studiert und speziell den Übergang von den ersteren zu den letzteren durch Restbildung mod p [24].

Weitgehend anregend und oftmals zitiert waren die Arbeiten [18] und [20] über die algebraische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. Ihre allgemeinen Eigenschaften, sowie ihr Verhalten bei Restbildung mod p spielen in späteren Arbeiten eine entscheidende Rolle.

Einen grösseren Umfang in Deuring's Gesamtwerk nimmt die Theorie der assoziativen Algebren ein. Die Hauptresultate waren durch L. E. Dickson einerseits und Artin, Brauer, Hasse, Noether andererseits um 1930 erreicht worden. Zwei kurze Noten [13], [14] zeigen sein Interesse an diesem Gegenstand. Zu einem Lehrbuch für viele jüngere Mathematiker wurde der Bericht [11] über die Algebrentheorie, der 1935 erschien und im Jahre 1968 neu aufgelegt wurde [46].

Damals hatte man gehofft, das Studium der arithmetischen Eigenschaften der einfachen zentralen Algebren werde neue Einsichten in die Zahlentheorie der algebraischen Zahlkörper ermöglichen. Diese Hoffnung wurde aber durch die Erkenntnis zerstört, dass die Idealklassen der einfachen Algebren im Prinzip mit den Idealklassen des Zentrums übereinstimmen. Die einzige Ausnahme liefern die definiten Quaternionen.

Hasse hatte gezeigt, dass Ordnungen solcher Algebren als Multiplikatorenringe von elliptischen Funktionenkörpern über endlichen Körpern $\boldsymbol{F}_p$ auftreten. Deuring griff diese Möglichkeit in [22] auf und studierte sie in voller Breite. Diese Arbeit lieferte in ihrer Ausführlichkeit und Vollständigkeit Ergebnisse, die bis heute zum klassischen Bestand der Theorie der elliptischen Körper oder Kurven gehören, und die in letzter Zeit durch B. Gross (1) aufgegriffen wurden.

Die Arbeit [28] erörtert einige Einzelfragen, die in [22] offen geblieben waren. Eine Anwendung der Ergebnisse enthalten die Anzahlformeln für die Typen von maximalen Ordnungen von Quaternionen-Algebren [25], [34], die übrigens von Eichler auf ganz anderem Wege berechnet wurden. In diesem Zusammenhang darf die kleinere Arbeit [21] erwähnt werden.

(1) B. Gross, *Heights and special values of L-series*, Erscheint in Sém. Math. Sup. Presses Universitaires, Montreal.

Die nunmehr voll entwickelte Theorie der elliptischen Funktionenkörper erlaubte eine neue, und zwar rein algebraische Begründung der komplexen Multiplikation [31]. Wie Deuring bemerkt, ermöglichen diese Hilfsmittel eine elegantere Herleitung der Hauptsätze als die älteren funktionentheoretischen Methoden. Er benutzt in [31] die Klassenkörpertheorie, zeigt aber in [36], wie diese noch eliminiert werden kann. Die Arbeiten [31], [36] bilden somit eine Einheit und sind auch heute noch lesenswert. Endlich fasst Deuring in dem Artikel [44] der Neuauflage der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften die zur Zeit bekannten Erkenntnisse über die komplexe Multiplikation zusammen. Er beschränkt sich allerdings auf den eindimensionalen Fall, berichtet also nicht mehr über die Arbeiten von Shimura, Taniyama, Weil über die komplexe Multiplikation der Abelschen Mannigfaltigkeiten, die im Prinzip dieselben Schlüsse und Methoden benutzen wie die klassische eindimensionale Theorie.

Die Arbeiten [26], [29] enthalten interessante Beobachtungen über gewisse Teilbarkeitseigenschaften von Differenzen $j(\alpha_1)-j(\alpha_2)$ singulärer Moduln. Erst viel später griffen B. Gross und D. Zagier den Gegenstand wieder auf (2).

Ein letztes grösseres Arbeitsgebiet findet man in den Abhandlungen [37], [39]–[43]. Hier wird die Hasse–Weilsche Zetafunktion eines elliptischen Funktionenkörpers mit komplexer Multiplikation studiert. Weil vermutete, dass sich diese Zetafunktion mittels einer L-Reihe zu einem Heckeschen Grössencharakter schreiben lasse. Deuring bestätigte dieses und gelangte so zu einer meromorphen Fortsetzung und einer Funktionalgleichung der Zetafunktion. Während [37] das Problem im Prinzip löste, brachten die folgenden Abhandlungen Abrundungen und Glättungen.

Das Lebenswerk Deuring's zeichnet sich durch Tiefe und thematische Geschlossenheit aus. Die wichtigsten Abhandlungen, nämlich [22], [28], [31], [36], [37], [39]–[43] können einem heutigen Leser noch wertvolle Anregungen vermitteln. Einige hier nicht besprochene Arbeiten, wie [6], [7], [8], [17], [47] bezeugen seine Teilnahme an weiteren Themen seiner Zeit, besonders an dem Gausschen Problem der Idealklassenzahl imaginärer quadratischer Zahlkörper, zu welchem Heilbronn, Heegner, Stark und neuerdings Gross und Zagier (3) entscheidende Beiträge lieferten.

Andere Arbeiten sind Berichte an Sammelbände gelehrter Gesellschaften. Eine Monographie [33] beschäftigt sich mit dem Sinn und der Bedeutung

(2) B. Gross and D. Zagier, *On singular moduli*, J. Reine Angew. Math. 355 (1985), S. 191–220.

(3) B. Gross and D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, in Vorbereitung.

der Mathematischen Erkenntnis. Ausarbeitungen seiner Vorlesungen sind im Göttinger Mathematischen Institut vorhanden, eine von diesen erschien im Druck [48].

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT BASEL
RHEINSPRUNG 21, Ch 4051, BASEL

Eingegangen am 28.6.1985 (1527)

ACTA ARITHMETICA
XLVII (1986)

Liste der Publikationen von Max Deuring

1. *Verzweigungstheorie bewerteter Körper*, Math. Ann. 105 (1931), S. 277–307.
2. *Zur Theorie der Normen Relativzyklischer Körper*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. I, 24 (1931), S. 199–200.
3. *Zur Theorie der Idealklassen in algebraischen Funktionenkörpern*, Math. Ann. 106 (1932), S. 103–106.
4. *Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen*, ibid. 106 (1932), S. 77–102.
5. *Galoissche Theorie und Darstellungstheorie*, ibid. 107 (1932), S. 140–144.
6. *Imaginäre quadratische Zahlkörper und die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion*. Verh. Int. Math. Kongr. Zürich 1932, Bd. II, S. 4–5.
7. *On the zeros of certain zeta functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), S. 350.
8. *Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl* 1, Math. Z. 37 (1933), S. 405–415.
9. *Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz*, Math. Ann. 110 (1934), S. 414–415.
10. *Zetafunktionen quadratischer Formen*, J. Reine Angew. Math. 172 (1935), S. 226–252.
11. *Algebren* (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 4, H. 1), Julius Springer, Berlin 1935.
12. *Neuer Beweis des Baureschen Satzes*, J. Reine Angew. Math. 173 (1935), S. 1–4.
13. *Über den Hauptsatz der Algebrentheorie*, ibid. 175 (1936), S. 63–64.
14. *Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum*, ibid. 175 (1936), S. 124–128.
15. *Automorphismen und Divisorenklassen der Ordnung* 1 *in algebraischen Funktionenkörpern*, Math. Ann. 113 (1936), S. 208–215.
16. *Anwendung der Darstellungen von Gruppen durch lineare Substitutionen auf die Galoissche Theorie*, ibid. 113 (1936), S. 40–47.
17. *On Epsteins Zetafunction*, Ann. of Math. 38 (1937), S. 585–593.
18. *Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper, 1*, J. Reine Angew. Math. 177 (1937), S. 161–191.
19. *Zur Theorie der Moduln algebraischer Funktionenkörper*, Math. Z. 47 (1940), S. 34–46.
20. *Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper, 2*, J. Reine Angew. Math. 183 (1940), S. 25–36.
21. *Invarianten und Normalformen elliptischer Funktionenkörper*, Math. Z. 47 (1940), S. 47–56.
22. *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper*, Abh. Math. Semin. Hansische Univ. 14 (1941), S. 197–272.
23. *La teoria aritmetica delle funzioni algebriche di una variabile*, Univ. Roma e Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. e Appl. (5) 2 (1941), S. 361–412.
24. *Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers*, Math. Z. 47 (1942), S. 643–654.
25. *Die Anzahl der Typen von Maximalordnungen in einer Quaternionenalgebra von primer Grundzahl*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt., 1945, S. 48–50.
26. *Teilbarkeitseigenschaften der singulären Moduln der elliptischen Funktionen und die Diskriminante der Klassengleichung*, Comment. Math. Helv. 19 (1946), S. 74–82.