Conspectus materiae tomi XLVII, fasciculi 2




La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange
Address of the Editorial Board and of the exchange
Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches
Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux examplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах





ISBN 83-01-06965-1 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA



ACTA ARITHMETICA
XLVII (1986)


# Valeurs algébriques de fonctions analytiques


par

FRANÇOIS GRAMAIN (Paris), MAURICE MIGNOTTE (Strasbourg)
et MICHEL WALDSCHMIDT (Paris)


**0. Introduction.** Nous démontrons deux théorèmes généraux concernant les fonctions analytiques d'une variable complexe prenant des valeurs algébriques, le premier par la méthode de Schneider (aussi bien globale que locale), le second par la méthode de Mahler.

En ce qui concerne la méthode de Schneider (§2) nous montrons que des fonctions analytiques prenant "souvent" simultanément des valeurs algébriques sont algébriquement dépendantes. Notre énoncé implique la plupart des théorèmes obtenus antérieurement par cette méthode. De plus, nous n'imposons pas que les valeurs algébriques prises par les fonctions soient dans un corps de nombres fixé, mais seulement que leur degré et leur hauteur ne soient pas trop grands.

La méthode de Mahler n'a été utilisée jusqu'à présent que pour des fonctions satisfaisant des équations fonctionnelles. Nous montrons que, dans la démonstration transcendante, le seul rôle joué par ces équations fonctionnelles est d'assurer l'existence d'une suite de nombres algébriques où la fonction considérée prend des valeurs algébriques avec des majorations des hauteurs. Nous donnons un résultat explicite qui généralise la partie transcendante de l'article de 1929 de Mahler [3] dans le cas des fonctions d'une seule variable. Il s'applique aux fonctions analytiques vérifiant une équation fonctionnelle "à la Mahler" et on retrouve en particulier les résultats de K. Mahler et un théorème de K. Nishioka [5].

Enfin nous étudions l'équation fonctionnelle $f(z^k) = af(z)^k + bz^h$, $(a, b \in \boldsymbol{C}$, $h$, $k$ entiers) où $f$ est analytique à l'origine, et nous donnons un énoncé de transcendance sur les valeurs de $f$ (pour $a$ et $b$ algébriques).

Le § 1 contient les notations et les résultats techniques nécessaires.

**1. Préliminaires.** Si $f$ est une fonction d'une variable complexe et $R$ un réel positif, on note $|f|_R$ la borne supérieure de $|f(z)|$ pour $|z| \leqslant R$.

Soit $\alpha$ un nombre algébrique dont le polynôme minimal sur $\boldsymbol{Z}$ est

$$a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \ldots + a_d,$$

la mesure de Mahler de $\alpha$ est la quantité

$$M(\alpha) = |a_0| \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \max\{1, |\alpha_i|\}$$

où $\alpha_1 = \alpha, \ldots, \alpha_d$ sont les conjugués de $\alpha$, et la maison de $\alpha$ est $\lceil\overline{\alpha}\rceil = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |\alpha_i|$.

Si $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sont des nombres algébriques contenus dans un corps de nombres $K$, on pose

$$h(1, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \frac{1}{[K:\boldsymbol{Q}]} \sum_v \log \max\{1, |\beta_1|_v, \ldots, |\beta_m|_v\}$$

où $v$ parcourt l'ensemble des places de $K$ normalisées de façon usuelle (i.e. de sorte que, pour tout $x$ de $K^\times$ on ait $\prod_v |x|_v = 1$).

Pour $m = 1$, on note plus simplement

$$h(\alpha) = h(1, \alpha);$$

on a alors

$$h(\alpha) = \frac{1}{[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]} \log M(\alpha).$$

Avec ces notations, l'inégalité de la taille s'écrit

$$\log|\alpha| \geqslant -[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]\, h(\alpha)$$

pour tout nombre complexe algébrique $\alpha$ non nul.

Nous utiliserons le résultat suivant, dont la preuve est immédiate.

LEMME 1.0. *Soit $P$ un polynôme de $\boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n]$, homogène de degré $D$ relativement aux $X$, et de degré $D_j$ suivant chacun des $Y_j$. Soient $\alpha_i, \beta_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ des nombres algébriques. Alors on a la majoration*

$$h\big(P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n)\big) \leqslant \log L(P) + Dh(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} D_j h(\beta_j),$$

*où $L(P)$ désigne la somme des modules des coefficients de $P$.*

Enfin, nous avons besoin de la variante suivante du lemme de Siegel, qu'on rapprochera de celles de [1] et de [4].

LEMME 1.1. *Soient $N_1, \ldots, N_k$ des entiers positifs. On considère un système linéaire homogène de la forme*

$$\sum_{\nu_1=0}^{N_1-1} \ldots \sum_{\nu_k=0}^{N_k-1} \alpha_{h,1}^{\nu_1} \ldots \alpha_{h,k}^{\nu_k} x_{\nu_1,\ldots,\nu_k} = 0 \quad (1 \leqslant h \leqslant \mu)$$

*où les $\alpha_{h,r}$ sont des nombres algébriques. On pose*

$$K_h = \boldsymbol{Q}(\alpha_{h,1}, \ldots, \alpha_{h,k}), \quad d_{h,r} = [\boldsymbol{Q}(\alpha_{h,r}):\boldsymbol{Q}] \quad (1 \leqslant h \leqslant \mu,\ 1 \leqslant r \leqslant k),$$

$$d_h = [K_h:\boldsymbol{Q}], \quad D = \sum_{1 \leqslant h \leqslant \mu} d_h, \quad L = \prod_{1 \leqslant r \leqslant k} N_r.$$

*Pour $L > D$, ce système possède une solution*

$$x_\nu = x_{\nu_1,\ldots,\nu_k} \quad (0 \leqslant \nu_r < N_r,\ 1 \leqslant r \leqslant k),$$

*où les $x_\nu$ sont des entiers rationnels non tous nuls qui vérifient, pour tout $\nu$,*

$$|x_\nu| \leqslant \Big[\big(2^{\mu'} \prod_{1 \leqslant h \leqslant \mu} M_h\big)^{1/(L-D)}\Big],$$

*avec*

$$M_h = L^{d_h} \prod_{1 \leqslant r \leqslant k} M(\alpha_{h,r})^{(N_r-1)d_h/d_{h,r}}$$

*et $\mu'$ $(\leqslant \mu)$ désignant le nombre des corps $K_h$ qui n'admettent aucun plongement réel.*

Démonstration. Soit $G_h$ l'ensemble des plongements de $K_h$ dans le corps des complexes. Quitte à changer les indices $h$, on peut supposer que les $K_h$ $(1+\mu' \leqslant h \leqslant \mu)$ ont un plongement réel $\sigma_h$. Pour $1 \leqslant h \leqslant \mu'$, soit $\sigma_h$ un élément fixé de $G_h$, et posons

$$\eta_h = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_h(K_h) \subset \boldsymbol{R} \quad \text{(i.e. si } 1+\mu' \leqslant h \leqslant \mu),\\ 2 & \text{sinon} \quad \text{(i.e. si } 1 \leqslant h \leqslant \mu').\end{cases}$$

Soit $l_h$ l'entier défini par les inégalités

$$l_h \leqslant \big(\eta_h M_h (X+1)^{d_h}\big)^{1/\eta_h} < l_h + 1, \quad \text{où} \quad X = \Big[\big(2^{\mu'} \prod_{1 \leqslant h \leqslant \mu} M_h\big)^{1/(L-D)}\Big],$$

alors

$$l_h^{\eta_h} > \eta_h M_h X^{d_h}.$$

En effet, c'est évident si $\eta_h = 1$, et lorsque $\eta_h$ vaut 2, on a $M_h \geqslant 2$ et $d_h \geqslant 2$, donc

$$\begin{aligned} l_h^2 &\geqslant \eta_h M_h (X+1)^{d_h} - 2\big(\eta_h M_h (X+1)^{d_h}\big)^{1/2} + 1\\ &> \eta_h M_h\big((X+1)^{d_h} - (X+1)^{d_h/2}\big) \geqslant \eta_h M_h (X+1)^{d_h/2} X^{d_h/2}. \end{aligned}$$

Remarquons aussi l'inégalité

$$\prod_{1 \leqslant h \leqslant \mu} l_h^{\eta_h} < (X+1)^L,$$

qui résulte de la majoration évidente

$$\prod_{1\leqslant h\leqslant \mu} l_h^{\eta_h} \leqslant 2^{\mu'}\Big(\prod_{1\leqslant h\leqslant \mu} M_h\Big)(X+1)^D < (X+1)^{L-D}(X+1)^D.$$

Si $\eta_h = 2$, soit $\tau_h = \operatorname{Re}\sigma_h$, $\tau_{h+\mu} = \operatorname{Im}\sigma_h$, $\alpha_{h+\mu,r} = \alpha_{h,r}$ et $l_{h+\mu} = l_h$. Si $\eta_h = 1$, posons $\tau_h = \sigma_h$.

Considérons l'application de l'ensemble

$$A = \{(\xi_1, \ldots, \xi_L)\in \mathbf{Z}^L ; 0 \leqslant \xi_i \leqslant X,\ 1 \leqslant i \leqslant L\}$$

dans $\mathbf{R}^{\mu+\mu'}$ qui à $(\xi_1, \ldots, \xi_L)$ associe

$$\Big(\sum_{\nu} \tau_h(\alpha_h^\nu)\,\xi_\nu\Big)_{1\leqslant h\leqslant \mu+\mu'}, \qquad \text{où} \qquad \alpha_h^\nu = \prod_{1\leqslant r\leqslant k} \alpha_{h,r}^{\nu_r}$$

avec un abus de notation évident pour les $\xi_\nu$. En tenant compte des signes des $\tau_h(\alpha_h^\nu)$, on voit que l'image de $A$ est contenue dans un parallélépipède de dimensions

$$\Big(X\sum_{\nu}|\tau_h(\alpha_h^\nu)|\Big)_{1\leqslant h\leqslant \mu+\mu'}.$$

Comme

$$\operatorname{card} A = (X+1)^L > \prod_{1\leqslant h\leqslant \mu} l_h^{\eta_h},$$

le principe des tiroirs montre qu'il existe deux éléments de $A$ dont les images sont dans un même parallélépipède de dimensions

$$\frac{X}{l_h}\sum_{\nu}|\tau_h(\alpha_h^\nu)|, \qquad \text{pour} \qquad 1\leqslant h\leqslant \mu+\mu'.$$

La différence de ces deux éléments est un vecteur $(x_\nu)$ dont les composantes sont des entiers rationnels non tous nuls, de modules majorés par $X$, et qui vérifient

$$\Big|\sum_{\nu}\sigma_h(\alpha_h^\nu)\,x_\nu\Big| \leqslant \frac{\sqrt{\eta_h}}{l_h}X\Big(\sum_{\nu}|\sigma_h(\alpha_h^\nu)|\Big), \qquad 1\leqslant h\leqslant \mu.$$

Pour $1\leqslant h\leqslant \mu$, $1\leqslant r\leqslant k$, notons $a_{h,r}$ le coefficient dominant du polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$ de $\alpha_{h,r}$. Considérons alors les nombres

$$E_h = \Big(\prod_{1\leqslant r\leqslant k} a_{h,r}^{(N_r-1)d_h/d_{h,r}}\Big)\prod_{\tau\in G_h}\tau\Big(\sum_{\nu}\alpha_h^\nu x_\nu\Big), \qquad 1\leqslant h\leqslant \mu;$$

ce sont des nombres entiers rationnels qui vérifient

$$|E_h| \leqslant L^{d_h} X^{d_h}\frac{\eta_h}{l_h^{\eta_h}}\prod_{1\leqslant r\leqslant k} M(\alpha_{h,r})^{(N_r-1)d_h/d_{h,r}}, \qquad 1\leqslant h\leqslant \mu.$$



Les inégalités vérifiées au début de la démonstration

$$l_h^{\eta_h} > \eta_h M_h X^{d_h}$$

montrent que l'on a $|E_h| < 1$, donc $E_h = 0$ $(1\leqslant h\leqslant \mu)$, ce qui est le résultat annoncé. ∎

**2. La méthode de Schneider.** Soit $k\geqslant 2$ un entier. On considère des fonctions $d$, $\mu$, $\psi_1, \ldots, \psi_k$, $r$ et $R$ de variable entière à valeurs réelles positives, et des fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_k$ de variable réelle à valeurs positives. Pour tout entier positif $N$, on pose

$$\varphi(N) = \log\big\{\big(R(N)^2 + r(N)r(N+1)\big)R(N)^{-1}\big(r(N)+r(N+1)\big)^{-1}\big\}.$$

On suppose qu'il existe un entier $N_0 > 0$ tel que, pour $N\geqslant N_0$, on ait les propriétés suivantes:

(1) $r(N+1) < R(N)$ et la fonction $R$ est croissante (au sens large). On pose $R_0 = \limsup_{N\to+\infty} R(N)$, avec $0 < R_0 \leqslant +\infty$;

(2) la fonction $\mu\varphi/d$ est croissante (au sens large), et tend vers l'infini avec $N$;

(3) pour $1\leqslant j\leqslant k$, les fonctions $\mu\varphi/\theta_j\circ R$ et $\mu\varphi/d\psi_j$ sont croissantes (au sens large). De plus, on a $\mu\geqslant 1$ et $\psi_j\geqslant 1$ $(1\leqslant j\leqslant k)$;

(4) la fonction $N\mapsto \mu(N+1)\varphi(N+1)\mu(N)^{-1}\varphi(N)^{-1}$ est bornée supérieurement.

Enfin, l'hypothèse qui, dans la pratique, est la plus contraignante est la suivante:

(5) il existe une constante $c_0 > 0$, indépendante de $N$, telle que

$$d(N)\prod_{1\leqslant j\leqslant k}\max\{d(N)\psi_j(N);\ \theta_j(R(N))\} \leqslant c_0\,\mu(N)^{k-1}\varphi(N)^k.$$

Théorème 2.1. *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, on a: il existe une constante $c > 0$ ayant la propriété suivante. Soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions analytiques dans le disque $\{|z| < R_0\}$ du plan complexe, vérifiant*

(6) $$\log|f_j|_{R(N)} \leqslant c\theta_j(R(N)) \quad \textit{pour} \quad N\geqslant N_0 \ \textit{et}\ 1\leqslant j\leqslant k.$$

*Pour chaque $N\geqslant N_0$, soit $\Gamma_N$ un sous-ensemble fini du disque $\{|z|\leqslant r(N)\}$, ayant $\mu(N)$ éléments et tel que la réunion des $\Gamma_N$ soit infinie. On suppose que pour tout $N\geqslant N_0$ et tout $\gamma\in\Gamma_N$, on a*

(7) $$[\mathbf{Q}(f_1(\gamma), \ldots, f_k(\gamma)):\mathbf{Q}] \leqslant d(N)$$

*et*

(8) $$h(f_j(\gamma)) \leqslant c\psi_j(N) \quad (1\leqslant j\leqslant k).$$

*Alors les fonctions $f_1, \ldots, f_k$ sont algébriquement dépendantes sur* $\boldsymbol{Q}$.

Cet énoncé contient la plupart des résultats connus obtenus par la méthode de Schneider, tant dans le cas local (théorème A 11 de [6]) que dans le cas des fonctions entières (théorème 2.2.1 de [6] ou proposition A 3 de [1], par exemple).

Remarquons qu'il est possible de donner un énoncé analogue pour des fonctions $f_j$ méromorphes. On peut aussi raffiner ce résultat dans le cas où les fonctions $f_j$ possèdent une période (additive ou multiplicative) commune. On pourrait donner des variantes de ce théorème en faisant intervenir des dérivées, par exemple en supposant que les coefficients de Taylor des $f_j$ à l'origine sont algébriques, ou bien que les développements de Taylor des $f_j$ en tous les points des $\Gamma_N$ ont des coefficients algébriques (méthode de Gel'fond).

L'énoncé du théorème 2.1 admet en particulier le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2.2. *Soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions analytiques dans le disque $\{|z|<1\}$, $l$ et $\varrho$ des réels positifs vérifiant $lk > l+k(2+\varrho)$. Pour tout entier $N$ suffisamment grand, soit $\Gamma_N$ une partie finie du disque $\{|z| \leqslant 1-2/N\}$, de cardinal au moins égal à $N^l$. Soit enfin $K$ un corps de nombres. Si les fonctions $f_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ prennent des valeurs dans $K$ en tous les points des $\Gamma_N$ et vérifient*

$$h\big(f_j(\gamma)\big) \leqslant N^{\varrho} \quad (1 \leqslant j \leqslant k,\ \gamma \in \Gamma_N)$$

*et*

$$|f_j(z)| \leqslant N^{\varrho} \quad \textit{pour} \quad |z| \leqslant 1-1/N \ \textit{et}\ 1 \leqslant j \leqslant k,$$

*alors elles sont algébriquement dépendantes sur* $\boldsymbol{Q}$.

Démonstration du théorème 2.1. Elle se décompose en quatre pas; seul le dernier (obtention d'une contradiction) n'est pas le même dans le cas local ($\limsup_{N\to+\infty} r(N) = 0$) et le cas global.

Premier pas: *construction d'une fonction auxiliaire.* Cette construction dépend de deux paramètres: le premier, $A$, est un nombre réel suffisamment grand, le second, $N$, est un entier beaucoup plus grand que $A$.

Soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions analytiques dans le disque $\{|z| < R_0\}$, qui vérifient les hypothèses du théorème 2.1 avec $c \leqslant A^{-2}$. On veut montrer qu'elles sont algébriquement dépendantes, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme non nul

$$P(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{0 \leqslant \lambda_1 \leqslant L_1} \ldots \sum_{0 \leqslant \lambda_k \leqslant L_k} p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} X_j^{\lambda_j},$$

à coefficients $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ dans $\boldsymbol{Z}$, tel que la fonction $F = P(f_1, \ldots, f_k)$ soit identiquement nulle.



Dans ce premier pas, on construit $P$ de telle sorte que la fonction

$$F(z) = \sum_{0 \leqslant \lambda_1 \leqslant L_1} \ldots \sum_{0 \leqslant \lambda_k \leqslant L_k} p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} f_j(z)^{\lambda_j} \tag{9}$$

vérifie

$$F(\gamma) = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \text{ dans } \Gamma_N. \tag{10}$$

Pour cela, on choisit, pour $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$L_j = A^{1/k} \mu(N) \varphi(N) / \max\{d(N)\psi_j(N);\ \theta_j(R(N))\}. \tag{11}$$

On est donc amené à résoudre un système linéaire homogène de $\mu = \mu(N)$ équations, dont les inconnues $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sont en nombre $L$, avec

$$L = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} ([L_j]+1).$$

L'hypothèse (3) et le choix d'un $A$ suffisamment grand assurent que $L_j > 1$, donc que

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j < L < 2^k \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j.$$

On applique le lemme 1.1 en remarquant que le $\log M_h$ du lemme 1.1 est majoré par

$$d(N)\log L + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j d(N) h\big(f_j(\gamma)\big) \quad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_N.$$

Les hypothèses (8) et (11) donnent

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j d(N) h\big(f_j(\gamma)\big) \leqslant ckA^{1/k} \mu(N)\varphi(N);$$

d'autre part, pour $N$ suffisamment grand, l'hypothèse (2) fournit

$$A\mu(N)\varphi(N) d(N)^{-1} / \log\big(A\mu(N)\varphi(N)d(N)^{-1}\big) \geqslant 3kA^3,$$

d'où l'on déduit

$$\log(2L) \leqslant \tfrac{2}{3} A^{-2} \mu(N)\varphi(N) d(N)^{-1}.$$

Grâce à l'hypothèse (5), on a

$$D \leqslant d(N)\mu(N) \leqslant c_0 A^{-1} L,$$

donc

$$d\mu/(L-D) \leqslant c_0/(A-c_0) \leqslant (1+c_0)A^{-1},$$

pour $A$ assez grand. On obtient ainsi l'existence d'entiers rationnels $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ non tous nuls, tels que la fonction (9) vérifie (10), avec

$$\log|p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)| \leqslant (1+c_0)A^{-1}\big(\log(2L) + ckA^{1/k}\mu(N)\varphi(N)d(N)^{-1}\big),$$

pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Ainsi, on a

$$\log \sum_{\lambda} |p(\lambda)| \leqslant A^{-2} \mu(N) \varphi(N) d(N)^{-1}. \tag{12}$$

Posons

$$c' = \limsup_{N \to +\infty} \mu(N+1) \varphi(N+1) \mu(N)^{-1} \varphi(N)^{-1}.$$

L'hypothèse (4) montre que $0 \leqslant c' < +\infty$. Pour la suite de la démonstration, on définit, pour tout entier $M \geqslant N$, les propriétés suivantes:

$\mathscr{A}(M)$ $\quad F(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_M$,

$\mathscr{B}(M)$ $\quad \log|F(z)| \leqslant -\dfrac{1}{1+2c'} \mu(M) \varphi(M)$ pour $|z| \leqslant r(M)$.

Deuxième pas : *la condition* $\mathscr{A}(M)$ *entraîne* $\mathscr{B}(M+1)$. En raison de l'hypothèse $\mathscr{A}(M)$, la fonction

$$G(z) = F(z) \prod_{\gamma \in \Gamma_M} \left( (R(M)^2 - z\bar{\gamma}) R(M)^{-1} (z-\gamma)^{-1} \right)$$

est analytique dans le disque $\{|z| < R_0\}$. On lui applique le principe du maximum sur les disques $\{|z| \leqslant r(M+1)\}$ et $\{|z| \leqslant R(M)\}$; comme on a

$$|R^2 - z\bar{\gamma}| R^{-1} |z-\gamma|^{-1} = 1 \quad \text{pour} \quad |z| = R$$

et comme

$$|R^2 - z\bar{\gamma}| R^{-1} |z-\gamma|^{-1} \geqslant (R^2 + |z|\,|\gamma|) R^{-1} (|z| + |\gamma|)^{-1},$$

$$\text{pour} \quad |z| \leqslant R \text{ et } |\gamma| \leqslant R,$$

on trouve, grâce à (1)

$$\log|F(z)| \leqslant \log|F|_{R(M)} - \mu(M)\varphi(M) \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant r(M+1).$$

En utilisant (6) et (12), on obtient

$$\log|F|_{R(M)} \leqslant A^{-2} \mu(N) \varphi(N) d(N)^{-1} + c \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j \theta_j(R(M)).$$

Mais l'hypothèse (2) donne

$$\mu(N) \varphi(N) d(N)^{-1} \leqslant \mu(M) \varphi(M) d(M)^{-1} \leqslant \mu(M) \varphi(M),$$

et (11) conduit à la majoration

$$L_j \theta_j(R(M)) \leqslant A^{1/k} \frac{\mu(N)\varphi(N)}{\theta_j(R(N))} \theta_j(R(M)) \leqslant A^{1/k} \mu(M) \varphi(M).$$

Finalement, grâce à l'hypothèse (3), pour $|z| \leqslant r(M+1)$ on a

$$\log|F(z)| \leqslant -\tfrac{2}{3} \mu(M) \varphi(M) \leqslant -\frac{1}{1+2c'} \mu(M+1) \varphi(M+1),$$

ce qui établit la propriété $\mathscr{B}(M+1)$.



Troisième pas: *la condition* $\mathscr{B}(M)$ *entraîne* $\mathscr{A}(M)$. Soit $\gamma \in \Gamma_M$, tel que $F(\gamma) \neq 0$. D'après le §1, si $\xi_1, \ldots, \xi_k$ sont des nombres algébriques tels que $P(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ soit non nul, l'inégalité de Liouville peut s'écrire

$$|P(\xi_1, \ldots, \xi_k)| \geqslant L(P)^{1-d} \exp\Big(-\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} dL_j h(\xi_j)\Big),$$

si $[\mathbf{Q}(\xi_1, \ldots, \xi_k) : \mathbf{Q}] \leqslant d$. On en déduit, par (7), (8) et (12), que

$$\log|F(\gamma)| \geqslant -d(M) \{A^{-2} \mu(N) \varphi(N) d(N)^{-1} + c \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j \psi_j(M)\}.$$

Alors, les hypothèses (2) et (3) montrent que

$$\log|F(\gamma)| \geqslant -A^{-1} \mu(M) \varphi(M).$$

Or $|\gamma| \leqslant r(M)$, et cela contredit donc $\mathscr{B}(M)$. Il en résulte que $\mathscr{A}(M)$ est vérifiée si $\mathscr{B}(M)$ est vraie.

Quatrième pas : *conclusion.* La construction du premier pas montre que $\mathscr{A}(N)$ est vraie. Les deuxième et troisième pas montrent que les propriétés $\mathscr{A}(M)$ et $\mathscr{B}(M)$ sont vraies pour tout $M \geqslant N$. On considère alors deux cas:

(a) Supposons, en premier lieu, que $\limsup_{N \to +\infty} r(N) > 0$. Le fait que la propriété $\mathscr{B}(M)$ soit vraie pour tout $M \geqslant N$ implique, grâce à (2) que la fonction $F$ est identiquement nulle.

(b) Supposons, au contraire, que $\lim_{N \to +\infty} r(N) = 0$. Comme la réunion des $\Gamma_N$ est infinie, la propriété $\mathscr{A}(M)$, vraie pour tout $M \geqslant N$ montre que les zéros de la fonction $F$ ne sont pas isolés, donc que $F$ est identiquement nulle. ∎

**3. Une variante de la méthode de Mahler.** Soient $k \geqslant 2$ et $\delta \geqslant 1$ des entiers naturels et $r > 0$ un nombre réel. On considère des fonctions $A$, $d$, $L_j$, $D_j$, $\varphi_j$, $\psi_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ de variable réelle positive à valeurs réelles au moins égales à 1. On pose

$$\Phi(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \{D_j(x(1 + \log L_j(x)));\ \varphi_j(x)\}$$

et

$$\Psi(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \{L_j(x) \psi_j(x)\}.$$

On dit qu'une fonction $f$: $[0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ est sur-additive si pour tout entier $n$ et tout $x_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i) \leqslant f\big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i\big)$. C'est, par exemple, le cas de la fonction $f(x) = x^a$ pour $a \geqslant 1$.

On suppose qu'il existe un nombre réel $x_0$ tel que, pour $x \geqslant x_0$ on ait les propriétés suivantes:

(1) Les fonctions $A$, $L_j$, $D_j$, $\varphi_j$, $\psi_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ sont croissantes (au sens large).

(2) Les fonctions $\varphi_j$ et $D_j$ sont constantes ou sur-additives, et au moins une des fonctions $\varphi_j$ est sur-additive (donc vérifie $\varphi_j(x) \geqslant x$).

(3) $$\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j(x) = 2\delta x.$$

Théorème 3.1. *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, on a : il existe une constante $\varepsilon > 0$, effectivement calculable, ne dépendant que de $\delta$, $k$ et $r$, ayant la propriété suivante.*

*Soient, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, $f_j(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_{j,n} z^n$ des fonctions analytiques dans le disque $\{|z| < r\}$ du plan complexe, dont les coefficients de Taylor $a_{j,n}$ sont dans un corps de nombres $K$ de degré $\delta = [K:\boldsymbol{Q}]$. On suppose que*

(4) $$\log \overline{|a_{j,n}|} \leqslant \varphi_j(n) \quad \text{pour tout } n \in \boldsymbol{N} \ (1 \leqslant j \leqslant k),$$

(5) *il existe un entier naturel $d_{j,n} \neq 0$ tel que $d_{j,n} a_{j,m}$ soit un entier de $K$ pour tout $m$, $0 \leqslant m \leqslant n$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, et vérifiant*

$$\log d_{j,n} \leqslant D_j(n) \quad \text{pour tout } n \ (1 \leqslant j \leqslant k).$$

*Soit, d'autre part, une suite $\{\alpha_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ de nombres complexes contenue dans le disque $\{|z| < r\}$, telle que les $f_j(\alpha_n)$ $(1 \leqslant j \leqslant k,\ n \in \boldsymbol{N})$ soient algébriques et vérifient pour tout $n$*

(6) $$\log |\alpha_n| \leqslant -A(n),$$

(7) $$[\boldsymbol{Q}(f_1(\alpha_n), \ldots, f_k(\alpha_n)) : \boldsymbol{Q}] \leqslant d(n),$$

(8) $$d(n)\, h(f_j(\alpha_n)) \leqslant \psi_j(\alpha_n) \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

*Si on a*

(9) $$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{A(x)} < \varepsilon,$$

(10) $$\limsup_{x \to +\infty} \frac{d(x)\Phi(x)}{xA(x)} < \varepsilon,$$

(11) $$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\Psi(x)}{xA(x)} < \varepsilon$$

*alors les fonctions $f_1, \ldots, f_k$ sont algébriquement dépendantes sur $\boldsymbol{Q}$.*

Un cas particulier de ce résultat est le suivant:

Corollaire 3.2. *Soit $K$ un corps de nombres et $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une fonction analytique dans le disque de rayon $r$ et dont les coefficients de Taylor à l'origine $a_n$ sont dans $K$. Soit $\{\alpha_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ une suite de nombres algébriques, avec $0 < |\alpha_n| < r$, telle que les $f(\alpha_n)$ soient algébriques.*



*On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier $n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_0$ on ait*

(i) $$[\boldsymbol{Q}(\alpha_n, f(\alpha_n)) : \boldsymbol{Q}]\, h(1, \alpha_n, f(\alpha_n)) \leqslant c \log \frac{1}{|\alpha_n|},$$

(ii) $$\lim_{n \to +\infty} [\boldsymbol{Q}(\alpha_n, f(\alpha_n)) : \boldsymbol{Q}] / \log \frac{1}{|\alpha_n|} = 0.$$

*Alors la fonction $f$ est algébrique sur $\boldsymbol{Q}(z)$.*

Cet énoncé est le meilleur possible dans les deux sens suivants:

(a) Si $f$ est une fonction algébrique sur $\boldsymbol{Q}(z)$, holomorphe sur $\{|z| < r\}$, ses coefficients de Taylor à l'origine sont dans un corps de nombres fixe. D'autre part, pour toute suite $\{\alpha_n\}$ de nombres algébriques, avec $|\alpha_n| < r$, les $f(\alpha_n)$ sont algébriques et $[\boldsymbol{Q}(\alpha_n, f(\alpha_n)) : \boldsymbol{Q}] \ll [\boldsymbol{Q}(\alpha_n) : \boldsymbol{Q}]$. Un calcul facile montre que $h(f(\alpha_n)) \ll h(\alpha_n)$ et il en résulte que, si la suite $\{\alpha_n\}$ vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} [\boldsymbol{Q}(\alpha_n) : \boldsymbol{Q}] / \log \frac{1}{|\alpha_n|} = 0$$

(c'est la condition (ii)), et

$$[\boldsymbol{Q}(\alpha_n) : \boldsymbol{Q}]\, h(\alpha_n) / \log \frac{1}{|\alpha_n|} \in O(1),$$

alors la condition (i) est vérifiée.

(b) Si, dans la condition (i), on remplace la constante $c$ par une fonction $\theta(n)$ croissante et tendant vers l'infini avec $n$, si faible que soit la croissance de $\theta$, la conclusion du corollaire 3.2 peut devenir fausse. En effet posons

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 2} \varepsilon_n z^n \prod_{2 \leqslant i \leqslant n} (z - 2^{-i}),$$

où $\varepsilon_n = 0$ ou 1, la suite des $\varepsilon_n$ étant suffisamment lacunaire pour que la série de Taylor de $f$ à l'origine soit lacunaire. Alors, la fonction $f$, analytique au voisinage du disque $\{|z| \leqslant 1/2\}$ est transcendante et ses coefficients de Taylor sont rationnels. Pour $n \geqslant 2$, soit $\alpha_n = 2^{-n}$, de sorte que $\alpha_n$ et $f(\alpha_n)$ sont rationnels, leurs dénominateurs respectifs étant majorés par $2^n$ et $4^{n^2}$. La condition (ii) du corollaire 3.2, qui se réduit à $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ est vérifiée et on a

$$[\boldsymbol{Q}(\alpha_n, f(\alpha_n)) : \boldsymbol{Q}]\, h(1, \alpha_n, f(\alpha_n)) / \log \frac{1}{|\alpha_n|} \ll n.$$

Soit alors $\theta$ une application croissante de $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que $\theta(1) \geqslant 2$ et $\lim_{n \to +\infty} \theta(n) = +\infty$. Pour tout entier $m$ vérifiant $\theta^{-1}(n) \leqslant m < \theta^{-1}(n+1)$, on pose $\beta_m = \alpha_n$, de sorte que la suite des $\beta_n$ vérifie la condition (ii) et

$$[\boldsymbol{Q}(\beta_n, f(\beta_n)) : \boldsymbol{Q}]\, h(1, \beta_n, f(\beta_n)) / \log \frac{1}{|\beta_n|} \ll \theta(n).$$

Cela montre bien le résultat annoncé.

Le corollaire 3.2 s'applique en particulier dans les cas où $f$ satisfait à une équation fonctionnelle du type considéré par Mahler en 1929 ([3] et [2]). En effet, une telle équation permet de vérifier la condition principale (condition (i)) du corollaire 3.2, et on obtient ainsi le corollaire 3.3 ci-dessous. On peut même traiter ainsi des équations fonctionnelles ne rentant pas dans le cadre de [3], ce que nous faisons dans le corollaire 3.4, dont un cas particulier est donné au corollaire 4.7. Remarquons qu'il s'agit bien ici de la méthode de Mahler puisqu'on peut démontrer directement le corollaire 3.2 sans utiliser le lemme de Siegel mais seulement l'algèbre linéaire (voir plus loin cette preuve directe).

L'exemple du corollaire 4.7 peut aussi être traité à partir du travail de K. Nishioka ([5]) qui considère des relations fonctionnelles plus générales que celles de Mahler ou que celles du corollaire 3.4. Mais le théorème de [5] est en fait une conséquence du théorème 3.1, là aussi les équations fonctionnelles servant uniquement à vérifier les hypothèses du théorème 3.1. Remarquons enfin que, dans ce cas, l'usage d'un lemme de Siegel, et donc une majoration de la croissance arithmétique des coefficients de Taylor de $f$, sont fondamentaux.

Il faut cependant noter que, dans le corollaire 3.2 donc dans le théorème 3.1, il est nécessaire de supposer que les $a_n$ sont algébriques. En effet, soient

$$f(z) = a\prod_{n\geqslant 0}(1-z^{2^n}), \quad \text{où} \quad a = \prod_{n\geqslant 0}(1-2^{-2^n})^{-1} \ \text{et}\ \alpha_n = 2^{-2^n}.$$

La fonction $g(z) = f(z)/a$ vérifie l'équation fonctionnelle $g(z) = (1-z)g(z^2)$, et le corollaire 3.3 ci-dessous montre que $a$ est transcendant.

Démonstration du théorème 3.1. Dans toute cette démonstration, les constantes $c_1, c_2, \ldots$ qui apparaîtront sont des nombres réels positifs ne dépendant que de $k$, $\delta$ et $r$. Pour des fonctions $\theta(x)$ et $\varrho(x)$ la notation $\theta(x) \ll \varrho(x)$ signifiera qu'il existe une constante $c$ réelle positive, ne dépendant que de $k$, $\delta$ et $r$, telle que $\theta(x) \leqslant c\varrho(x)$ pour $x$ suffisamment grand (la valeur minimale de $x$ à partir de laquelle cette inégalité est vérifiée peut dépendre des autres données du théorème).

Premier pas : *construction d'une fonction auxiliaire.* Cette construction dépend du paramètre entier $N$ qu'on choisira suffisamment grand.

On construit un polynôme $P$ de $\boldsymbol{Z}[X_1, \ldots, X_k]$, de degré au plus $L_j(N)$ en $X_j$, de sorte que la fonction

$$F(z) = P(f_1(z), \ldots, f_k(z)) = \sum_{\substack{0\leqslant\lambda_j\leqslant L_j(N)\\ 1\leqslant j\leqslant k}} p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\prod_{1\leqslant j\leqslant k} f_j(z)^{\lambda_j}$$

ait un zéro d'ordre au moins $N$ à l'origine. Cela revient à résoudre un système homogène de $N$ équations à au moins $2\delta N$ inconnues (hypothèse (3)), et dont



les coefficients sont dans le corps $K$. Si on pose

$$f_j(z)^\lambda = \sum_{n\geqslant 0} a_{j,\lambda,n} z^n \quad (1\leqslant j\leqslant k),$$

on a

$$a_{j,\lambda,n} = \sum_{|\boldsymbol{i}|=n} a_{j,i_1}\ldots a_{j,i_\lambda},$$

où on a noté $|\boldsymbol{i}| = |(i_1, \ldots, i_\lambda)| = i_1+\ldots+i_\lambda$ pour $\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{N}^\lambda$. Le système à résoudre s'écrit alors

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda}}\Big(\sum_{|\boldsymbol{n}|=n}\prod_{1\leqslant j\leqslant k} a_{j,\lambda_j,n_j}\Big)p(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (0\leqslant n< N).$$

Pour un $j$ fixé, les $a_{j,\lambda,n}$ considérés admettent $\prod_{1\leqslant i\leqslant L_j(N)} d_{j,[N/i]}$ comme dénominateur commun. Par suite les coefficients du système ont un dénominateur commun $\Delta = \Delta(N)$ vérifiant

$$\log|\Delta| \ll \max_{D_j=C^{te}}\{D_j\cdot\log L_j(N)\} + \max_{1\leqslant j\leqslant k}\sum_{1\leqslant i\leqslant L_j(N)} D_j(N/i).$$

Alors l'hypothèse (2) montre que

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant L_j(N)} D_j(N/i) \leqslant D_j\big(N(1+\log L_j(N))\big);$$

par suite on a

$$\log|\Delta| \ll \Phi(N).$$

D'autre part, l'hypothèse (1) montre que

$$\log\overline{|a_{j,\lambda,n}|} \leqslant \log\binom{\lambda+n-1}{n} + \max_{|\boldsymbol{i}|=n}\sum_{1\leqslant l\leqslant\lambda}\varphi_j(i_l) \ll L_j(N)+N+\varphi_j(N).$$

Alors, d'après les hypothèses (2) et (3), la maison des coefficients du système a un logarithme majoré par $c_1\Phi(N)$, pour $N$ assez grand.

Le lemme 1.1 montre donc l'existence de $p(\boldsymbol{\lambda})\in\boldsymbol{Z}$ non tous nuls, avec

$$\log\sum_{\boldsymbol{\lambda}}|p(\boldsymbol{\lambda})| \ll \Phi(N).$$

Deuxième pas : *majoration de* $F(\alpha)$. Supposons la fonction $F$ non identiquement nulle, et soit $M\geqslant N$ l'ordre de $F$ à l'origine, de sorte que

$$F(z) = \sum_{t\geqslant 0} b_{M+t}z^{M+t} = b_M z^M\Big(1+\sum_{t\geqslant 1}\frac{b_{M+t}}{b_M}z^t\Big),$$

où les $b_{M+t}$ sont dans le corps $K$. Par construction de $F$, on a

$$h(b_M) \ll \Phi(M),$$

donc

$$\log|b_M| \geqslant -\Phi(M).$$

D'autre part, les séries de Taylor des $f_j$ convergent sur $\{|z|<r\}$ donc

$$\log|a_{j,n}| \leqslant n \quad (1 \leqslant j \leqslant k);$$

et il en résulte que

$$\log|b_{M+t}| \leqslant t+\Phi(M).$$

Par suite, on a

$$\left|\sum_{t \geqslant 1} \frac{b_{M+t}}{b_M} z^t\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

dès que

$$\log|z| \leqslant -c_2\,\Phi(M),$$

et on a alors

$$0<|F(z)| \leqslant \tfrac{3}{2}|b_M|\,|z|^M.$$

Pour $\varepsilon<1/c_2$ l'hypothèse (9) montre que, dès que $N$ est assez grand, on a:

$$\log|\alpha_M| \leqslant -c_2\,\Phi(M),$$

et il en résulte que

$$\log|F(\alpha_M)| \leqslant -MA(M)+\Phi(M) \leqslant -MA(M).$$

Troisième pas: *majoration de* $F(\alpha)$. Par construction de $F$, le lemme 1.0 donne immédiatement

$$h\big(F(\alpha_M)\big) \leqslant \Phi(N)+\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} L_j(N)\,h\big(f_j(\alpha_M)\big) \leqslant \Phi(M)+\Psi(M)/d(M).$$

Quatrième pas: *conclusion.* On a

$$F(\alpha_M) \neq 0 \text{ et } \big[Q\big(F(\alpha_M)\big):Q\big] \leqslant d(M),$$

donc l'inégalité de la taille

$$\log|F(\alpha_M)| \geqslant -\big[Q\big(F(\alpha_M)\big):Q\big]\,h\big(F(\alpha_M)\big)$$

fournit, d'après les estimations des troisième et quatrième pas

$$MA(M)<c_3\big(d(M)\,\Phi(M)+\Psi(M)\big).$$

Si $\varepsilon<1/c_3$ les hypothèses (10) et (11) montrent que c'est impossible si $N$ est suffisamment grand. Il en résulte que la fonction $F$ est identiquement nulle et le théorème 3.1 est démontré. ∎

Nous allons maintenant montrer comment déduire le corollaire 3.2 du théorème 3.1 et donner aussi une preuve directe du corollaire 3.2.



Démonstration du corollaire 3.2. On applique le théorème 3.1, avec $k=2$, aux fonctions $f_1(z)=z$ et $f_2(z)=f(z)$. Soit $\varphi(x)$ une fonction sur-additive vérifiant $\varphi(0) \geqslant 1$ et

$$\max(\log\boxed{a_n}, \log d_n) \leqslant \varphi(n),$$

où $d_n \in N\setminus\{0\}$ est un dénominateur commun aux $a_m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Soit $\{\beta_n\}$ une sous-suite de $\{\alpha_n\}$ telle que $A(n)=-\log|\beta_n|$ soit croissante et $A(n)/\big[Q\big(\beta_n, f(\beta_n)\big):Q\big]=A(n)/d(n)$ soit strictement croissante (c'est possible d'après l'hypothèse (ii)). Le théorème 3.1 s'applique alors, avec $L_1(x)=L_2(x)=\sqrt{2[K:Q]x}$, à la sous-suite $\{\gamma_n\}$ de $\{\beta_n\}$ définie par $\gamma_n=\beta_{\theta(n)}$ où la fonction $\theta\colon N \to N$ croit suffisamment vite pour que

$$\lim_{n \to +\infty} d(\theta(n))\,\varphi(n\log n)/A(\theta(n))=0. \ ∎$$

Démonstration directe du corollaire 3.2. Soit $N$ un entier suffisamment grand.

Premier pas: *construction d'une fonction auxiliaire.* On construit un polynôme non nul $P \in Z[X, Y]$, de degré au plus $N$ en chacune des indéterminées, tel que la fonction $F(z)=P\big(z, f(z)\big)$ ait un zéro d'ordre au moins $[c_1 N^2]$ à l'origine, avec $c_1^{-1}=[K:Q]$. Pour cela il suffit de résoudre un système de $[c_1 N^2]$ équations linéaires homogènes à coefficients dans $K$, dont les inconnues (les coefficients de $P$) sont en nombre $(N+1)^2$. L'algèbre linéaire montre qu'il existe une solution entière non triviale dès que $[K:Q][c_1 N^2]<(N+1)^2$, c'est-à-dire dès que $N$ est assez grand.

Remarquons que la suite de la démonstration n'utilise pas d'estimation des coefficients de $P$, ce qui permet de supposer seulement que les $a_n$ sont dans $K$ sans ajouter d'hypothèse sur leur hauteur.

On suppose que la fonction $f$ est transcendante, de sorte que la fonction auxiliaire $F$ n'est pas la fonction nulle, donc que ses zéros sont isolés. La condition (ii) montre que la suite des $\alpha_k$ tend vers zéro, par suite il existe une infinité de $\alpha_k$ tels que $F(\alpha_k) \neq 0$.

Deuxième pas: *majoration de* $|F(\alpha_k)|$. Soit $k \geqslant k_0$ tel que $F(\alpha_k) \neq 0$ et que le nombre $\psi(k)=\log(1/|\alpha_k|)$ soit suffisamment grand par rapport à $N$.

La fonction $F$ ayant un zéro d'ordre au moins $[c_1 N^2] \geqslant c_1 N^2/2$ à l'origine, et étant analytique au voisinage du disque fermé de rayon $r$, le lemme de Schwarz fournit

$$|F(\alpha_k)| \leqslant |\alpha_k/r|^{c_1 N^2/2} \max_{|z|=r}|F(z)|.$$

Mais la quantité

$$r^{-c_1 N^2/2} \max_{|z|=r}|F(z)|$$

est indépendante de $k$, donc, pour $\psi(k)$ suffisamment grand, elle est majorée par $\exp(c_1 N^2 \psi(k)/4)$ et on a l'inégalité

$$\log|F(\alpha_k)| \leqslant -c_1 N^2 \psi(k)/4. \tag{12}$$

Troisième pas: *minoration de* $|F(\alpha_k)|$. De la définition de la hauteur absolue d'un nombre algébrique non nul $\beta$ donnée au § 1, on déduit que, pour chaque place $v$ de $\mathbf{Q}(\beta)$, on a

$$\log|\beta|_v \geqslant -[\mathbf{Q}(\beta):\mathbf{Q}]\, h(\beta). \tag{13}$$

Si $\alpha$ est un nombre algébrique, $0<|\alpha|<r$, tel que $f(\alpha)$ soit algébrique, d'après le lemme 1.0 on a

$$h\big(F(\alpha)\big) \leqslant 2Nh\big(1,\alpha, f(\alpha)\big)+\log L(P).$$

Par application de (13) à $\beta = F(\alpha_k)$, en prenant pour place $v$ la norme euclidienne, il en résulte, grâce à (i), que

$$\log|F(\alpha_k)| \geqslant -2cN\psi(k)-\big[\mathbf{Q}(\alpha_k, f(\alpha_k)):\mathbf{Q}\big]\log L(P).$$

Mais l'hypothèse (ii) montre que, pour $k$ assez grand, on a

$$\big[\mathbf{Q}(\alpha_k, f(\alpha_k)):\mathbf{Q}\big]\log L(P) \leqslant cN\psi(k),$$

d'où

$$\log|F(\alpha_k)| \geqslant -3cN\psi(k). \tag{14}$$

Les inégalités (12) et (14) sont contradictoires dès que $N$ est assez grand, donc $F$ est identiquement nulle, et $f$ est algébrique. ∎

COROLLAIRE 3.3. *Soit* $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une fonction transcendante, analytique au voisinage de zéro, et dont les coefficients de Taylor* $a_n$ *à l'origine sont dans un corps de nombres. On suppose que* $f$ *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$f(z^n) = \frac{P\big(z, f(z)\big)}{Q\big(z, f(z)\big)} \tag{15}$$

*où* $n \geqslant 2$ *est un entier,* $P(X, Y)$ *et* $Q(X, Y)$ *sont des polynômes à coefficients algébriques, avec* $\deg_Y P < n$ *et* $\deg_Y Q < n$.

*Soit* $\alpha$ *un nombre algébrique, avec* $0<|\alpha|<1$, *tel que* $f$ *soit définie en* $\alpha$ *et que* $Q(\alpha^{n^k}, f(\alpha^{n^k})) \neq 0$ *pour tout entier naturel* $k$. *Alors* $f(\alpha)$ *est transcendant.*

Démonstration. Supposons $f(\alpha)$ algébrique, et posons $\alpha_k = \alpha^{n^k}$. Il suffit de vérifier que $f$ et la suite $(\alpha_k)$ satisfont aux hypothèses (i) et (ii) du corollaire 3.2 pour obtenir une contradiction, et donc montrer la transcendance de $f(\alpha)$.

La relation fonctionnelle (15) montre que $\big[\mathbf{Q}(\alpha_k, f(\alpha_k)):\mathbf{Q}\big]$ reste borné, et même que les $\alpha_k, f(\alpha_k)$ et les coefficients des polynômes $P$ et $Q$ sont tous dans un corps de nombres fixé. Comme $|\alpha_k| = |\alpha|^{n^k}$, la condition (ii) est donc vérifiée.



De plus, on a $h(\alpha_k) = n^k h(\alpha)$; donc il suffit de vérifier que $h\big(f(\alpha_k)\big)$ est majoré, à une constante multiplicative près, par $n^k$, pour obtenir la condition (i). Une majoration directe de $h\big(f(\alpha_k)\big)$ ne donne pas ce résultat, et on est amené à utiliser un artifice de calcul introduit par Mahler ([3], II, § 4).

Notons

$$P(X, Y) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} a_j(X)\, Y^j \quad \text{et} \quad Q(X, Y) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} b_j(X)\, Y^j,$$

où les $a_j$ et $b_j$ sont des polynômes à coefficients algébriques. Posons $f(\alpha) = \beta$, et définissons les suites de nombres algébriques $(\beta_k)$ et $(\gamma_k)$ par $\beta_0 = \beta$, $\gamma_0 = 1$ et les relations de récurrence

$$\beta_{k+1} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} a_j(\alpha_k)\, \beta_k^j \gamma_k^{n-1-j},$$

$$\gamma_{k+1} = \sum_{0\leqslant j\leqslant n-1} b_j(\alpha_k)\, \beta_k^j \gamma_k^{n-1-j}.$$

Il est clair qu'on a $f(\alpha_k) = \beta_k/\gamma_k$ pour tout $k\in\mathbf{N}$. Soit $c>0$ une constante suffisamment grande par rapport à $h(\alpha)$ et à la hauteur des coefficients des polynômes $P$ et $Q$. Si on suppose que $h(\beta_k) \leqslant cn^k$ et $h(\gamma_k) \leqslant cn^k$, le lemme 1.0 montre qu'on a $h(\beta_{k+1}) \leqslant cn^{k+1}$ et $h(\gamma_{k+1}) \leqslant cn^{k+1}$. Cette majoration est donc vraie pour tout $k$, et on a

$$h\big(f(\alpha_k)\big) \leqslant h(\beta_k)+h(\gamma_k) \leqslant 2cn^k$$

pour tout $k$, ce qui achève la preuve du corollaire 3.3. ∎

COROLLAIRE 3.4. *Soit* $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une fonction non polynômiale, analytique au voisinage de zéro, et dont les coefficients de Taylor* $a_n$ *à l'origine sont dans un corps de nombres. On suppose que* $f$ *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$f(z^n) = af(z)^n + P\big(z, f(z)\big) \tag{16}$$

*où* $n\geqslant 2$ *est un entier,* $a$ *un nombre algébrique et où le polynôme* $P(X, Y)$ *à coefficients algébriques vérifie* $\deg_Y P < n$.

*Si* $\alpha$ *est un nombre algébrique, avec* $0<|\alpha|<1$, *tel que* $f(\alpha)$ *soit défini, alors* $f(\alpha)$ *est transcendant.*

Démonstration. Comme pour le corollaire 3.3 on suppose $f(\alpha)$ algébrique, et on note $\alpha_k = \alpha^{n^k}$. Montrons que $h\big(1, \alpha_k, f(\alpha_k)\big)$ est majoré par $n^k$, à une constante multiplicative près.

Soit $K$ un corps de nombres contenant $\alpha$, $f(\alpha)$, $a$ et les coefficients de $P$. D'après la relation fonctionnelle (16), il n'y a qu'un nombre fini de places finies $v$ de $K$ pour lesquelles $f(\alpha_k)$ n'est pas un entier $v$-adique: ce sont des places pour lesquelles $\alpha$, $f(\alpha)$, $a$ ou un des coefficients de $P$ n'est pas entier.

Soit $v$ une place finie de $K$, $b_v \geqslant 1$ un majorant de $|a|_v$, $|\alpha|_v$ et des valeurs absolues $v$-adiques des coefficients de $P$. Supposons que

$$|f(\alpha_k)|_v \leqslant b_v^{1+n+\ldots+n^{k-1}} c_v^{n^k},$$

où $c_v$ est une constante suffisamment grande par rapport à $b_v$. L'équation fonctionnelle (16) montre que

$$|f(\alpha_{k+1})|_v \leqslant \max\left(b_v |f(\alpha_k)|_v^n ; b_v^{1+n^k \deg_X P} \max(1, |f(\alpha_k)|_v)^{n-1}\right).$$

On a évidemment

$$\log\left(b_v |f(\alpha_k)|_v^n\right) \leqslant (1+n+\ldots+n^k)\log b_v + n^{k+1}\log c_v,$$

et

$$\begin{aligned}(1+n^k \deg_X P)\log b_v + (n-1)\log\max\left(1, |f(\alpha_k)|_v\right) &\\ \leqslant \left(1+n^k \deg_X P + (n-1)(1+n+\ldots+n^{k-1})\right)\log b_v + n^k(n-1)\log c_v &\\ \leqslant (1+n+\ldots+n^k)\log b_v + n^{k+1}\log c_v,&\end{aligned}$$

dès que $\log c_v \geqslant \deg_X P \log b_v$. Par récurrence, on a donc

$$\log\max\left(|\alpha_k|_v, |f(\alpha_k)|_v\right) \leqslant 2n^k \log c_v$$

pour tout entier naturel $k$.

Si $v$ est une place infinie de $K$, soit $b_v \geqslant 1$ un majorant de $|a|_v$, $|\alpha|_v$ et de la somme des valeurs absolues $v$-adiques des coefficients de $P$. Supposons que

$$\log|f(\alpha_k)|_v \leqslant (1+n+\ldots+n^{k-1})\log b_v + \log\left(c_v^{n^k} - c_v^{n^{k-1}}\right),$$

où $c_v$ est une constante suffisamment grande par rapport à $b_v$. L'équation fonctionnelle (16) montre que

$$|f(\alpha_{k+1})|_v \leqslant b_v^{1+n+\ldots+n^k} \left\{\left(c_v^{n^k} - c_v^{n^{k-1}}\right)^n + b_v^{n^k \deg_X P}\left(c_v^{n^k} - c_v^{n^{k-1}}\right)^{n-1}\right\}.$$

L'expression entre accolades est majorée par

$$\begin{aligned}c_v^{n^{k+1}}\left(1 - c_v^{-(n-1)n^{k-1}}\right)^n \left(1 + \frac{b_v^{n^k \deg_X P}}{c_v^{n^k} - c_v^{n^{k-1}}}\right)&\\ \leqslant c_v^{n^{k+1}}\left(1 - \frac{n}{2} c_v^{-(n-1)n^{k-1}}\right)\left(1 + \left(c_v^{-1} b_v^{\deg_X P}\right)^{n^k}\left(1 + 2c_v^{-(n-1)n^{k-1}}\right)\right)&\end{aligned}$$

dès que $c_v$ est suffisamment grand. On a donc

$$\begin{aligned}|f(\alpha_{k+1})|_v\, b_v^{-(1+n+\ldots+n^k)} c_v^{-n^{k+1}} &\leqslant 1 + \left(c_v^{-1} b_v^{\deg_X P}\right)^{n^k} - \frac{n}{3} c_v^{-(n-1)n^{k-1}}\\ &\leqslant 1 - c_v^{-(n-1)n^k} \leqslant 1\end{aligned}$$

si $c_v$ est suffisamment grand.



On a ainsi montré par récurrence l'existence d'une constante $d_v$ telle que

$$\log|f(\alpha_k)|_v \leqslant d_v n^k$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Comme $\max\left(|\alpha_k|_v, |f(\alpha_k)|_v\right) \leqslant 1$ pour presque toutes les places finies $v$ de $K$, on en déduit que la condition (i) du corollaire 3.2 est vérifiée. Il ne reste qu'à montrer la transcendance de la fonction $f$, ce qui résulte du corollaire 4.4 ci-dessous. ∎

**4. Sur l'équation fonctionnelle $f(z^k) = af(z)^k + bz^h$.** Nous étudions l'équation fonctionnelle $f(z^k) = A(z, f(z))$, où $A$ est un polynôme. Nos résultats les plus précis concernent le cas particulier suivant: soient $h$ et $k$ deux entiers, $k > 0$, et $a$, $b$ deux nombres complexes. On considère l'équation fonctionnelle

$$f(z^k) = af(z)^k + bz^h, \tag{1}$$

où $f \in \mathbf{C}((z))$ est une série de Laurent formelle à coefficients complexes. Nous montrons en particulier que toute solution $f$ est méromorphe à l'origine, et nous appliquons les résultats du § 3 pour donner un énoncé de transcendance sur les valeurs de $f$.

Eliminons d'abord les cas triviaux: $b = 0$, $k = 1$, $a = 1$ (et $f$ quelconque), puis $b = 0$, ou $k = 1$, ou $a = 0$ qui imposent à $f$ d'être un monôme $f(z) = cz^n$ ($c \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$). On suppose donc désormais $ab \neq 0$ et $k \geqslant 2$.

Soit $f \in \mathbf{C}((z))$ une solution de (1). Comme $b$ n'est pas nul, ou peut écrire $f(z) = z^l \varphi(z)$ avec $\varphi \in \mathbf{C}[[z]]$, et $\varphi(0) \neq 0$. Alors

$$\varphi(z^k) = a\varphi(z)^k + bz^{h-kl}.$$

On a donc $l \leqslant h/k$ et on est ramené au cas où $f \in \mathbf{C}[[z]]$, $f(0) \neq 0$, et $h \geqslant 0$, ce que nous supposerons dans toute la suite.

**(a) Existence et analyticité des solutions.**

LEMME 4.1. *Soit $a_0 \in \mathbf{C}$, $a_0 \neq 0$, vérifiant $a_0 = aa_0^k + b\delta_{h,0}$ (où $\delta_{h,0}$ est le symbole de Kronecker). Alors il existe une unique série formelle $f(z) = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} a_n z^n$ solution de* (1). *Ses coefficients $a_n$ appartiennent au corps $\mathbf{Q}(a_0, b)$.*

En particulier, quand $a$, $b$, $k$ et $h$ sont donnés, il y a $k-1$ solutions distinctes $f \in \mathbf{C}[[z]]$, avec $f(0) \neq 0$, à l'équation (1) si $h > 0$; et il y en a $k$ ou $k-1$ si $h = 0$ (on voit facilement que, dans ce dernier cas, les solutions sont toutes des constantes).

Démonstration du lemme 4.1. On a

$$f(z)^k = \sum_{l \geqslant 0}\left(\sum_{\nu \in E(k,l)} \frac{k!}{\nu_0! \ldots \nu_l!} a_0^{\nu_0} \ldots a_l^{\nu_l}\right) z^l$$

où $E(k, l)$ est l'ensemble des $(l+1)$-uplets $(\nu_0, \ldots, \nu_l)$ d'entiers $\geqslant 0$ vérifiant

$$\nu_0+\ldots+\nu_l = k \quad \text{et} \quad \nu_1+2\nu_2+\ldots+l\nu_l = l.$$

De (1) on déduit

$$aka_0^{k-1}a_1+b\delta_{h,1} = 0,$$

et pour $l \geqslant 2$

$$aka_0^{k-1}a_l+a\sum_{\nu\in F(k,l)}\frac{k!}{\nu_0!\ldots\nu_{l-1}!}a_0^{\nu_0}\ldots a_{l-1}^{\nu_{l-1}}+b\delta_{h,l} = \begin{cases}a_n & \text{si} \quad l = kn,\\ 0 & \text{si} \quad l \not\equiv 0 \bmod k\end{cases}$$

où $F(k, l)$ est l'ensemble des $l$-uplets $(\nu_0, \ldots, \nu_{l-1})$ d'entiers $\geqslant 0$ vérifiant

$$\nu_0+\ldots+\nu_{l-1} = k \quad \text{et} \quad \nu_1+2\nu_2+\ldots+(l-1)\nu_{l-1} = l.$$

Le lemme 4.1 en résulte immédiatement. ∎

LEMME 4.2. *Toute solution formelle* $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \boldsymbol{C}[[z]]$, *avec* $a_0 \neq 0$, *de l'équation fonctionnelle* (1) *est analytique à l'origine.*

Démonstration. La suite des $|a_n|$ est majorée par la suite des entiers $b_n$ définie par

$$b_0 = \max\{1+[|a_0|]\}, \quad b_1 = 1+\max\{[|ba^{-1}k^{-1}a_0^{1-k}|]\},$$

où les maxima sont pris sur les $a_0$ solutions de $a_0 = aa_0^k+b\delta_{h,0}$, et, pour $l \geqslant 2$,

$$b_l = c_1\sum_{\nu\in F(k,l)}\frac{k!}{\nu_0!\ldots\nu_{l-1}!}b_0^{\nu_0}\ldots b_{l-1}^{\nu_{l-1}},$$

où $c_1$ est un entier majorant $b_1(1+1/|b|+|a/b|)$, et $F(k, l)$ est défini dans la preuve du lemme 4.1.

On a donc, pour $l \geqslant 2$,

$$b_l = c_1\sum_{0\leqslant j\leqslant k-2}\binom{k}{j}b_0^j\sum_{\nu\in G(k-j,l)}\frac{(k-j)!}{\nu_1!\ldots\nu_{l-1}!}b_1^{\nu_1}\ldots b_{l-1}^{\nu_{l-1}},$$

où $G(k-j, l)$ est l'ensemble des $(l-1)$-uplets $(\nu_1, \ldots, \nu_{l-1})$ d'entiers $\geqslant 0$ vérifiant

$$\nu_1+\ldots+\nu_{l-1} = k-j \quad \text{et} \quad \nu_1+2\nu_2+\ldots+(l-1)\nu_{l-1} = l.$$

Par conséquent, la suite $b_n$ est majorée par la suite $d_n$ définie par $d_0 = b_0$, $d_1 = b_1$, et, pour $l \geqslant 2$

$$d_l = c_2\sum_{2\leqslant j\leqslant k}\sum_{\nu\in G(j,l)}\frac{j!}{\nu_1!\ldots\nu_{l-1}!}d_1^{\nu_1}\ldots d_{l-1}^{\nu_{l-1}},$$

où $c_2 = c_1\max_{2\leqslant j\leqslant k}\left\{\binom{k}{j}b_0^j\right\}$.



Il en résulte que la série formelle $g(z) = \sum_{n\geqslant 1} d_n z^n$ vérifie l'équation algébrique

$$g(z)-d_1 z = c_2\sum_{2\leqslant j\leqslant k} g(z)^j.$$

La théorie des fonctions algébriques montre que la série $g(z)$ a un rayon de convergence non nul; comme la suite de ses coefficients majore ceux de $f(z)$, le rayon de convergence de $f$ est, lui aussi, non nul, et $f$ est analytique à l'origine. ∎

**(b) Les solutions algébriques sont des polynômes.** Nous allons voir, en particulier, que si $f$ est une fonction analytique à l'origine qui vérifie l'équation fonctionnelle (1), alors $f$ est une fonction transcendante sur $\boldsymbol{C}(z)$, sauf dans les deux cas "triviaux" suivants:

1) $f(z) = cz^n$, $h = kn$, $c = ac^k+b$,
2) $f(z) = c(z^n+z^d)$, $h = n+d$, $a = 1/c$, $b = -2c$, $k = 2$.

LEMME 4.3. *Soit* $f \in \boldsymbol{C}[[z]]$ *une série entière, de rayon de convergence* $R > 0$, *solution de l'équation fonctionnelle*

$$f(z^k) = A(z, f(z)) \tag{2}$$

*avec* $A \in \boldsymbol{C}[X, Y]$ *et* $k$ *entier* $\geqslant 2$.

*Si* $R < +\infty$, *alors* $R$ *est au plus égal à* 1 *et* $f$ *admet le cercle de rayon* 1 *pour frontière naturelle.*

Démonstration. Elle se décompose en quatre parties.

Première partie : On a $R = +\infty$ ou $R \leqslant 1$. En effet le rayon de convergence de $f(z^k)$ est $R^{1/k}$ et $A(z, f(z))$ a un rayon au moins égal à $R$, donc $R^{1/k} \geqslant R$.

Deuxième partie : Si $R = 1$, la conclusion du lemme est vérifiée. Comme $f$ a un point singulier de module 1, il suffit de montrer que si $\zeta$, de module 1, est un point singulier, alors toutes les racines $k$-èmes de $\zeta$ sont des points singuliers. En effet, par itération de ce résultat on voit que l'ensemble des points singuliers de $f$ est dense dans le cercle unité.

Montrons donc que, si $x \in \boldsymbol{C}$, avec $|x| = 1$, est un point régulier de $f$, alors le point $x^k$ est régulier. Comme $x$ est régulier, $f$ se prolonge analytiquement sur un disque $D$ de centre $x$ qu'on peut choisir suffisamment petit pour que l'application $z \mapsto z^k$ soit injective dans $D$. La fonction $g(z) = A(z, f(z))$ admet un prolongement analytique sur $D$, donc $f(z)$ admet un prolongement analytique sur l'image de $D$ par l'application $z \mapsto z^k$. L'image de $D$ étant un voisinage de $x^k$, il en résulte que le point $x^k$ est régulier.

Troisième partie : Si $R < 1$, l'ensemble des points singuliers de $f$ situés dans le disque $\{|z| \leqslant \varrho\}$, avec $\varrho < 1$, est fini.

Nous avons besoin de quelques notations : soit $d = \deg_Y A$, $A(X, Y)$

$= P_0(X)\,Y^d + \ldots$, et notons $\Delta(z)$ le discriminant du polynôme $A(z, Y) - f(z^k)$, considéré comme polynôme en l'indéterminée $Y$. La fonction $\Delta(z)$ est définie et analytique dans le disque $\{|z| < R^{1/k}\}$.

Si $\Delta(z) \equiv 0$, la fonction $f(z^k)$ est algébrique sur $C(z)$, donc il en est de même de la fonction $f(z)$, et on a bien le résultat voulu. Dans le cas contraire, la fonction $P_0(z)\Delta(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans tout compact $K$ contenu dans le disque $\{|z| < R^{1/k}\}$. D'après le théorème des fonctions implicites, $f$ n'a donc qu'un nombre fini de singularités dans $K$, et, en dehors de ces points, $f$ est une fonction multiforme ayant au plus $d$ déterminations. Ainsi $\Delta(z)$ se prolonge à tout disque de centre 0 et de rayon $< R^{1/k^2}$ privé d'un nombre fini de points en une fonction multiforme à au plus $d$ déterminations. Le même procédé permet de passer du disque de rayon $R^{1/k}$ au disque de rayon $R^{1/k^2}$ et, par itération, à $R^{1/k^n}$. Or $R < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} R^{1/k^n} = 1$, et on a bien le résultat désiré.

Quatrième partie : Si $R < 1$, le cercle $\{|z| = 1\}$ est frontière naturelle pour $f$. Comme dans la deuxième partie, il suffit de montrer que si $\zeta \in C$, avec $|\zeta| < 1$, est un point singulier de $f$, alors toutes les racines $k$-èmes de $\zeta$ sont des points singuliers.

Soit donc $x \in C$, avec $|x| < 1$, tel que $x^k$ soit un point singulier de $f$, et montrons que $x$ est un point singulier de $f$. D'après la troisième partie, le point $x^k$ est un point singulier isolé de $f$. Ainsi, ou bien $f$ n'est pas bornée au voisinage de $x^k$, ou bien $f$ admet un développement en série de Puiseux en ce point. Dans les deux cas il existe un plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que $f^{(n)}$ n'est pas bornée au voisinage de $x^k$. En dérivant $n$ fois la relation (2), on voit qu'il existe un entier $m$, $0 \leqslant m \leqslant n$ tel que $f^{(m)}$ n'est pas bornée au voisinage de $x$. Ainsi $x$ est bien un point singulier de $f$. ∎

COROLLAIRE 4.4. *Toute fonction algébrique $f$, analytique à l'origine, et vérifiant la relation fonctionnelle* (2), *est un polynôme.*

Démonstration. L'ensemble des points singuliers d'une fonction algébrique est fini, donc ne peut contenir le cercle unité. ∎

Inversement, tout polynôme $f \in C[X]$ vérifie une équation fonctionnelle (2), par exemple avec $A(X, Y) = f(X^k)$.

LEMME 4.5. *Soient $h$ et $k$ deux entiers, $h \geqslant 0$, $k \geqslant 1$, et $a$, $b$ deux nombres complexes non nuls. Soit $f$ un polynôme vérifiant*

(1) $$f(z^k) = af(z)^k + bz^h.$$

*Alors ou bien $f$ est un monôme:*

$$f(z) = cz^n, \quad h = kn, \quad c = ac^k + b,$$



*ou bien $f$ est une somme de deux monômes:*

$$f(z) = c(z^n + z^d), \quad k = 2, \quad a = 1/c, \quad b = -2c, \quad n < d, \quad \text{et} \quad h = n + d.$$

Démonstration. Si $f$ est un monôme, le résultat est clair. Sinon, on développe $f$ d'abord suivant les puissances croissantes:

$$f(z) = a_n z^n + a_d z^d + O(z^{d+1}),$$

avec $n < d$, $a_n a_d \neq 0$, puis suivant les puissances décroissantes

$$f(z) = a_N z^N + a_D z^D + O(z^{D-1}),$$

avec $N > D$ et $a_N a_D \neq 0$. Comme on a $(k-1)n + d < kd$, la relation (1) impose $h = (k-1)n + d$. De même, de $(k-1)N + D > kD$, on déduit $h = (k-1)N + D$. On a donc $N = d$, $D = n$, d'où $k = 2$. ∎

**(c) Les solutions entières sont des polynômes.**

LEMME 4.6. *Soit $f$ une fonction entière vérifiant l'équation fonctionnelle*

(2) $$f(z^k) = A(z, f(z))$$

*avec $k$ entier $\geqslant 2$ et $A \in C[X, Y]$. Soient $d = \deg_Y A$ et $D = \max\{d, k\}$. Alors si $d \neq k$*

$$\log|f|_r \ll (\log r)^{(\log D)/\log k},$$

*si $d = k$*

$$\log|f|_r \ll (\log\log r)\log r.$$

*Pour $d < k$, la fonction $f$ est un polynôme. Si $d = k$ et si $A$ est de la forme $A(X, Y) = aY^k + B(X, Y)$, avec $\deg_Y B < k$, la fonction $f$ est encore un polynôme.*

Démonstration. Posons $\varphi(r) = \log^+|f|_r$, où $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$. De la relation (2) résulte l'existence d'une constante positive $c$ telle que, pour $|z| = r \geqslant 2$, on ait

$$\log|f(z^k)| \leqslant d\log^+|f(z)| + c\log r.$$

Donc, en particulier

$$\varphi(e^k) \leqslant d\varphi(e) + c,$$

et, plus généralement

$$\varphi(e^{k^n}) \leqslant d^n\varphi(e) + c(d^{n-1} + d^{n-2}k + \ldots + k^{n-1})$$

pour tout entier positif $n$.

Ainsi, pour $k^{n-1} < \log x \leqslant k^n$, on a

$$\varphi(x) \leqslant (c + \varphi(e))(d^n + kd^{n-1} + \ldots + k^n) \quad \text{et} \quad n - 1 < \frac{\log\log x}{\log k}.$$

Les majorations annoncées en résultent immédiatement.

Pour $d < k$, on a donc

$$\log|f|_r \ll \log r$$

et, par suite, $f$ est un polynôme.

Enfin, dans le cas où $A(X, Y) = aY^k + B(X, Y)$, il existe des constantes positives $c'$ et $c''$ telles que, pour $r \geqslant e$, on ait

$$\varphi(r^k) \leqslant \max\{k\varphi(r),\ c'\log r\} + c''.$$

Ainsi la fonction $\psi(r) = \max\{\varphi(r),\ c'\log r\}$ vérifie

$$\psi(r^k) \leqslant k\psi(r) + c''.$$

On en déduit aisément que $\psi(x) \ll \log x$, donc $\log|f|_r \ll \log r$ et $f$ est bien un polynôme. ∎

**(d) Un exemple.**

Corollaire 4.7. *Soient $h$ un entier $\geqslant 1$, $a$ et $b \in \mathbf{C}$ deux nombres algébriques non nuls, avec $ab \neq -2$; et soit $f$ l'unique série entière formelle vérifiant $f(0) = 1/a$ et*

$$f(z^2) = af(z)^2 + bz^h. \tag{3}$$

*Alors $f$ est analytique à l'origine, et pour tout nombre algébrique $\alpha$, avec $0 < |\alpha| < 1$, tel que $f(\alpha)$ soit défini, le nombre $f(\alpha)$ est transcendant.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'étude ci-dessus et du corollaire 3.4. ∎

Nous remercions R. Louboutin, I. Wakabayashi et tout particulièrement M. Hervé dont les avis nous ont été précieux pour la mise au point du dernier paragraphe.

**Ajouté sur épreuves.** Kumiko Nishioka a montré (*On a problem of Mahler for transcendency of function values II*, Tsukuba J. Math. 7 (2) (1983), p. 265–279) que des équations fonctionnelles "à la Mahler" impliquent des majorations de la maison des coefficients de Taylor utilisables pour l'application du lemme de Siegel dans le théorème 3.1.

D'autre part Keiji Nishioka (*Algebraic function solutions of a certain class of functional equations*, Arch. Math. 44 (1985), p. 330–335) montre un résultat plus général que le lemme 4.2.

## Bibliographie


[1] F. Gramain et M. Mignotte, *Fonctions entières arithmétiques*, in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Luminy 1982 (D. Bertrand et M. Waldschmidt éditeurs), Birkhäuser, Progress in Math. 31 (1983), p. 99–124.





[2] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler*, in *Transcendence theory: advances and applications* (A. Baker and D. W. Masser editors), Academic Press, 1977, p. 211–226.

[3] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann. 101 (1929), p. 342–366.

[4] M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method*, ibid. 231 (1978), p. 241–267.

[5] K. Nishioka, *On a problem of Mahler for transcendency of function values*, J. Austral. Math. Soc. (Séries A), 33 (1982), p. 386–393.

[6] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants*, Springer Lecture Notes in Math. n° 402 (1974).



UNITÉ ASSOCIÉE AU CNRS n° 763
PROBLÈMES DIOPHANTIENS
INSTITUT HENRI POINCARÉ
11, RUE PIERRE ET MARIE CURIE
75231 PARIS CEDEX 05
FRANCE

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
CENTRE DE CALCUL
7, RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE


*Reçu le 3. 8. 1984*
*et dans la forme modifiée le 13. 5. 1985* (1442)