ACTA ARITHMETICA
XLVI (1986)

Untere Abschätzung für die Anzahl der B-Zwillinge auf kurzen Intervallen

von

G. Bantle (Ulm)

1. Einleitung. Es sei $\mathscr{B}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die sich als Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen darstellen lassen. Die Elemente von $\mathscr{B}$ heißen *B-Zahlen*. Das Paar $(n, n+1)$ nennen wir *B-Zwilling*, wenn sowohl $n \in \mathscr{B}$ als auch $n+1 \in \mathscr{B}$ ist. Ferner sei

$$B_2(x, k, l) = |\{n \leqslant x\colon\ n \in \mathscr{B},\ n+1 \in \mathscr{B},\ n \equiv l(k)\}|,$$

d.h. die Anzahl der B-Zwillinge vor x in der Restklasse $l \bmod k$.

1965 zeigte G. Rieger [14] die obere Abschätzung

$$B_2(x, 1, 1) \ll x/\log x.$$

Erst 1974 gelang es Indlekofer [3] und Hooley [2] mit zwei grundverschiedenen Methoden, die analoge untere Abschätzung zu zeigen. Hooley benützte hauptsächlich Ergebnisse aus der Gitterpunktlehre, während Indlekofer obige Abschätzung mit dem eindimensionalen Sieb und einer von Iwaniec [4], [5] stammenden Technik zeigte.

1978 übertrug Kelly [12] diese Methoden auf kurze Intervalle und zeigte für $\theta > 5/6$ mit der Hooley'schen Methode bzw. für $\theta > 0.9972$ mit dem Sieb:

$$B_2(x, 1, 1) - B_2(x - x^\theta, 1, 1) \gg x^\theta/\log x.$$

Für $\theta > 1/2$ erhielt er die analoge obere Abschätzung.

In dieser Arbeit zeigen wir folgenden

Satz. *Sei $A > 0$, $1 \leqslant k \leqslant (\log x)^A$, $(k, 2l(l+1)) = 1$, dann existiert eine nur von A abhängende Konstante $c > 0$, so daß für genügend großes x*

$$B_2(x, k, l) - B_2(x - x^\theta, k, l) \geqslant \frac{c}{k} \prod_{\substack{p|k \\ p \equiv 3(4)}} \frac{p}{p-2} \cdot \frac{x^\theta}{\log x} \quad \textit{für} \quad \theta \geqslant 0.8521.$$

Der hier erzielte θ-Bereich ist zwar etwas kleiner wie der von Kelly mit der Hooley'schen Methode erreichte, allerdings läßt sich diese Methode nicht auf Restklassen übertragen.

Diese Arbeit ist eine Kurzfassung meiner Dissertation, die ich bei Prof. Dr. H.-E. Richert angefertigt habe; für seine Anregungen möchte ich mich an dieser Stelle recht herzlich bedanken.

2. Bezeichnungen. Mit p bezeichnen wir wie üblich eine Primzahl, mit $\boldsymbol{P}$ die Menge aller Primzahlen und mit $\mathscr{P}$ eine Teilmenge von $\boldsymbol{P}$, speziell sei $\mathscr{P}(z) = \{p \in \mathscr{P}\colon\ p < z\}$. Als Teilmengen von $\mathscr{P}$ verwenden wir

$$\mathscr{P}_3^{(q)}(z) := \{p < z\colon\ p \equiv 3(4),\ p \nmid q\}, \qquad \mathscr{P}_3^{(q)} := \mathscr{P}_3^{(q)}(\infty), \qquad \mathscr{P}_3 := \mathscr{P}_3^{(1)}(\infty).$$

Den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzen Zahlen a und b kürzen wir mit (a, b) ab. Wie üblich sei $\mu(n)$ die Möbiusfunktion, $\tau(n)$ die Teilerfunktion und $\varphi(n)$ die Euler'sche Funktion,

$$e(x) = e^{2\pi i x}, \qquad \mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \qquad x \geqslant 2, \qquad \psi(x) = x - [x] - \tfrac{1}{2},$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqslant x$ ist.

Mit C^1 bezeichnen wir die Klasse aller auf $\boldsymbol{R}$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen und mit C^∞ die Klasse aller auf $\boldsymbol{R}$ beliebig oft differenzierb. Funktionen.

Bezüglich Summationen vereinbaren wir:

$\sum\limits_{v \bmod d}$ bedeute die Summation über ein volles Restsystem $\bmod d$ und

$\sum\limits_{v \bmod d}^{*}$ die Summation über ein primes Restsystem $\bmod d$.

Mit ε bzw. η bezeichnen wir stets positive reelle Zahlen, die wir uns klein denken, die sich aber ebenso wie die Konstante c durchaus von Lemma zu Lemma unterscheiden können.

3. Siebergebnisse. Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen, geben wir zuerst die in dieser Arbeit benötigten Siebresultate an; sie stammen in der verwendeten Form alle von Iwaniec und geben einen Überblick über Siebabschätzungen im halb- bzw. eindim. Fall.

Gegeben sei eine endliche Folge ganzer Zahlen $\mathscr{A}$ und eine Menge $\mathscr{P}$ von Primzahlen $\mathscr{P} \subseteq \boldsymbol{P}$. $Q(\mathscr{P})$ sei die Menge aller positiven quadratfreien ganzen Zahlen, deren Primfaktoren alle in $\mathscr{P}$ liegen.

Als Siebfunktion bezeichnen wir

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) := \big|\{a \in \mathscr{A}\colon\ (a, \mathscr{P}(z)) = 1\}\big| = \sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ (a, \mathscr{P}(z)) = 1}} 1. \tag{1}$$

Für $d \in Q(\mathscr{P})$ sei

$$|\mathscr{A}_d| := |\{a \in \mathscr{A}\colon\ a \equiv 0(d)\}| \tag{2}$$

die Anzahl aller durch d teilbaren Zahlen aus $\mathscr{A}$.

$X > 1$ sei eine Approximation für $|\mathscr{A}|$; $r(\mathscr{A}, 1) := |\mathscr{A}| - X$.

$\omega(d)$ sei eine multiplikative Funktion auf $Q(\mathscr{P})$ und so gewählt, daß

$$r(\mathscr{A}, d) := |\mathscr{A}_d| - \frac{\omega(d)}{d} X \tag{3}$$

im Mittel bei Summation über d klein bleibt (vgl. Lemma 1–3).

Für $p \notin \mathscr{P}$ vereinbaren wir noch wie üblich $\omega(p) = 0$ und ebenso $\omega(d) = 0$ für nicht quadratfreie d.

Für $z \geqslant 2$ sei

$$V(z) := \prod_{p < z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right). \tag{4}$$

Zur Abschätzung von $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ sind noch gewisse Voraussetzungen über $\omega(p)$ nötig; für sie vereinbaren wir in Analogie zu [1] folgende Abkürzungen:

(Ω): Es existieren Konstanten A_0, $A_1 \geqslant 2$, so daß

$$\omega(p) \leqslant A_0 \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \omega(p)/p \leqslant 1 - 1/A_1.$$

$(\Omega_2(\varkappa, L))$: Es existieren Konstanten A_2, $L \geqslant 2$ und $\varkappa > 0$, so daß:

$$-L \leqslant \sum_{w \leqslant p < z} \frac{\omega(p)}{p} \log p - \varkappa \log\frac{z}{w} \leqslant A_2 \qquad \text{für} \quad 2 \leqslant w < z.$$

Mit $(\tilde{\Omega}_2(\varkappa))$ bezeichnen wir die entsprechende einseitige Bedingung $L = \infty$. $\varkappa$ heißt die *Dimension* des Siebes.

Für $\varkappa = \frac{1}{2}$ bzw. $\varkappa = 1$ bezeichnen wir mit $F_\varkappa(s)$ und $f_\varkappa(s)$ die stetigen Lösungen folgender Differenzendifferentialgleichungen (vgl. [7]):

$$\begin{aligned}
s^\varkappa F_\varkappa(s) &= A_\varkappa && \text{für} \quad 0 < s \leqslant \beta_\varkappa + 1, \\
s^\varkappa f_\varkappa(s) &= 0 && \text{für} \quad 0 < s \leqslant \beta_\varkappa, \\
(s^\varkappa F_\varkappa(s))' &= \varkappa s^{\varkappa-1} f_\varkappa(s-1) && \text{für} \quad s > \beta_\varkappa + 1, \\
(s^\varkappa f_\varkappa(s))' &= \varkappa s^{\varkappa-1} F_\varkappa(s-1) && \text{für} \quad s > \beta_\varkappa,
\end{aligned} \tag{5}$$

mit $\beta_{1/2} = 1$, $\beta_1 = 2$, $A_{1/2} = 2\sqrt{e^\gamma/\pi}$, $A_1 = 2e^\gamma$, γ Euler'sche Konstante.

In dieser Arbeit verwenden wir das halb- bzw. eindim. Sieb in der Form der folgenden 3 Lemmata:

LEMMA 1 (vgl. [6], Lemma 16). *Sei $z \geqslant 2$, $D \geqslant 2$, $s = \log D/\log z$, dann gilt unter den Voraussetzungen (Ω) und $(\Omega_2(\frac{1}{2}))$ mit einer nur von den A_i abhängenden Konstanten $c \geqslant 1$*

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \leqslant XV(z)\left\{F_{1/2}(s) + \frac{c}{(\log D)^{0.21}}\right\} + \sum_{\substack{d < D \\ d \mid \mathscr{P}(z)}} |r(\mathscr{A}, d)|.$$

Daneben benötigen wir noch folgende spezielle Asymptotik

Lemma 2 (vgl. [6], Th. 2). *Sei* $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}_3$ *und für alle* $a \in \mathscr{A}$ *gelte: der größte ungerade Teiler* a' *von* a *erfüllt* $a' \equiv 1\,(4)$. *Dann gilt für* $Q^6 < z^2 \leqslant A^* := \max_{a \in \mathscr{A}} |a|$, $s = \log A^*/\log z$ *und* $|\delta| \leqslant 1$ *unter den Voraussetzungen* (Ω) *und* $(\Omega_2(\frac{1}{2}, L))$:

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = XV(z)\left\{F_{1/2}(s) + O\left(e^{-s}\left(\frac{L+\log Q}{\log A^*}\right)^{0.21}\right)\right\} + \delta \sum_{\substack{d < A^{\circ}/Q \\ d \mid \mathscr{P}(z)}} |r(\mathscr{A}, d)|.$$

Das eindim. Sieb benötigen wir in der Form von

Lemma 3 (vgl. [7]). *Sei* $\varepsilon > 0$, $Q_1 \geqslant 2$, $Q_2 \geqslant 2$, $D = Q_1 Q_2$, $s = \log D/\log z$, $2 \leqslant z \leqslant \sqrt{D}$, *dann existiert unter den Voraussetzungen* (Ω) *und* $(\Omega_2(1))$ *eine nur von den* A_i *abhängende Konstante* $c \geqslant 1$, *so daß*

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) \geqslant XV(z)\{f_1(s) - c(\varepsilon + \varepsilon^{-8}(\log D)^{-1/3})\} - R(\mathscr{A}, Q_1, Q_2)$$

mit

(6) $\quad R(\mathscr{A}, Q_1, Q_2)$

$$= \sum_{l < \exp(8\varepsilon^{-8})} \sum_{q_1 < Q_1} \sum_{\substack{q_2 < Q_2 \\ q_1 q_2 \mid \mathscr{P}(z)}} a_{q_1,l}(Q_1, Q_2, \varepsilon)\, b_{q_2,l}(Q_1, Q_2, \varepsilon)\, r(\mathscr{A}, q_1 q_2),$$

wobei die Koeffizienten $a_{q_1,l}$, $b_{q_2,l}$ *reell sind, nur von den angegebenen Größen abhängen und durch* 1 *beschränkt sind*:

$$|a_{q_1,l}| \leqslant 1, \qquad |b_{q_2,l}| \leqslant 1.$$

4. Aufspaltung in geeignete Siebprobleme. Bekanntlich ist $n \in \mathscr{B}$, wenn n keinen Primteiler $p \equiv 3\,(4)$ in ungerader Vielfachheit enthält. Folglich gilt wegen $(k, 2l(l+1)) = 1$

(7) $\quad B_2(x, k, l) - B_2(x - x^{\theta}, k, l) \geqslant S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x+2)$

mit $\mathscr{A} = \{n(n+1)\colon x - x^{\theta} < n \leqslant x,\ n \equiv l_1\,(16k)\}$, $l_1 = l\,16\,\overline{16} + 4k\bar{k}$, wobei $\overline{16}$ bzw. $\bar{k}$ Lösungen der Kongruenzen $16\,\overline{16} \equiv 1\,(k)$ bzw. $k\bar{k} \equiv 1\,(16)$ sind (vgl. (1)).

Leider läßt sich die Siebfunktion in (7) nur trivial nach unten abschätzen, denn beim eindim. Sieb ist $f_1(s) = 0$ für $s \leqslant 2$. Wir ersetzen deshalb diese Siebfunktion durch $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u)$ mit $\frac{1}{4} < u < \frac{1}{2}$.

Wegen $n \equiv 4\,(16)$ haben n und $n+1$ immer nur eine gerade Anzahl von Primteilern aus $\mathscr{P}_3$. Folglich gilt insbesondere für ein in $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u)$ gezähltes Paar $(n, n+1)$:

$$(n, \mathscr{P}_3^{(k)}) = 1, \qquad (n+1, \mathscr{P}_3^{(k)}) = 1$$

oder

$$(n, \mathscr{P}_3^{(k)}(x^u)) = 1, \qquad n+1 = q_1 p_1 p_2,$$
$$(q_1, \mathscr{P}_3) = 1, \qquad p_i \in \mathscr{P}_3 \quad \text{und} \quad x^u \leqslant p_1 \leqslant p_2,$$

oder

$$(n+1, \mathscr{P}_3^{(k)}(x^u)) = 1, \qquad n = q_2 p_3 p_4,$$
$$(q_2, \mathscr{P}_3) = 1, \qquad p_i \in \mathscr{P}_3 \quad \text{und} \quad x^u \leqslant p_3 \leqslant p_4.$$

Wir erhalten also

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u) \leqslant S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x+2) + \\ + \sum_{q \leqslant x^{1-2u}} \sum_{x^u \leqslant p_1 \leqslant \sqrt{x/q}} \sum_{(x-x^{\theta})/qp_1 < p_2 \leqslant x/qp_1} 1 + O(x^{\varepsilon})$$

dabei ist nur über solche q und p_i zu summieren, für die

$$(q, \mathscr{P}_3^{(k)}) = 1, \qquad p_i \equiv 3\,(4),$$
$$(q p_1 p_2 + 1, \mathscr{P}_3^{(k)}(x^u)) = 1, \qquad q p_1 p_2 \equiv l_1\,(16k)$$

oder

$$(q p_1 p_2 - 1, \mathscr{P}_3^{(k)}(x^u)) = 1, \qquad q p_1 p_2 \equiv l_1 + 1\,(16k)$$

und damit nach (7) die grundlegende Aufspaltung

Lemma 4. *Sei*

$$\mathscr{A} = \{g(m)\colon x_0 - y_0 < m \leqslant x_0\}$$

mit

(8) $\quad g(m) = (16km + l_1)(16km + l_1 + 1), \qquad x_0 = (x - l_1)/16k, \qquad y_0 = x^{\theta}/16k,$

dann existieren Konstanten l_1^* *und* l_2^*, *so daß für* $\frac{1}{4} < u < \frac{1}{2}$

$$B_2(x, k, l) - B_2(x - x^{\theta}, k, l) \geqslant S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u) - R_1 - R_2 - O(x^{\varepsilon})$$

mit

(9) $$R_1 = \sum_{\substack{q \leqslant x^{1-2u} \\ q \equiv 4\,(16)}} \sum_{\substack{x^u \leqslant p_1 < \sqrt{x/q} \\ p_1 \equiv 3\,(4)}} S(M_1(qp_1), \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u),$$

(10) $$M_1(a) = \{ap + 1\colon (x - x^{\theta})/a < p \leqslant x/a,\ p \equiv l_1^*\,(4k)\},$$

(11) $$R_2 = \sum_{\substack{q \leqslant x^{1-2u} \\ q \equiv 1\,(4)}} \sum_{\substack{x^u \leqslant p_1 < \sqrt{x/q} \\ p_1 \equiv 3\,(4)}} S(M_2(qp_1), \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u),$$

(12) $$M_2(a) = \{ap - 1\colon (x - x^{\theta})/a < p \leqslant x/a,\ p \equiv l_2^*\,(16k)\},$$

wobei nur über solche q zu summieren ist, für die $(q, k\mathscr{P}_3^{(k)}) = 1$ ist.

Im nächsten Abschnitt schätzen wir die Siebfunktion $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u)$ mit dem eindim. Sieb nach unten ab. Im Gegensatz zu Indlekofer bzw. Kelly behandeln wir das Restglied (6) nichttrivial, indem wir es mit Hilfe einer neuartigen Technik von Iwaniec durch Exponentialsummen ersetzen, die dabei entstehenden unvollständigen Kloosterman-Summen mit der Poisson'schen Summenformel in vollständige überführen und diese nach Weyl abschätzen (vgl. [7] und [9]).

Im 6. Abschnitt schätzen wir R_1 ab. Bei der Abschätzung der Siebfunktion mit dem halbdim. Sieb verwenden wir die neuesten Ergebnisse von Iwaniec–Huxley [10] bzw. Ricci [13] über den Bombieri'schen Satz auf kurzen Intervallen. Für die Summation über q benötigen wir Lemma 2.

5. Abschätzung von $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u)$. In diesem Abschnitt zeigen wir

LEMMA 5. *Sei $\eta > 0$, $\theta > \frac{2}{3}$, $\psi = \min(1, \frac{5}{4}\theta - \frac{1}{6})$, $\frac{1}{4} < u < \frac{1}{2}\psi$ dann existiert eine höchstens von θ, u und A abhängende Konstante $c \geqslant 1$, so daß für $x \geqslant x_0(\eta)$:*

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u) \geqslant \frac{1}{8\psi}\log\left(\frac{\psi}{u}-1\right)\frac{x^\theta}{k\log x}\prod_p \frac{p-\omega(p)}{p-1}(1-c\eta),$$

mit

$$\omega(p) = \begin{cases} 2 & \text{falls } p \in \mathscr{P}_3^{(k)}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases} \tag{13}$$

Beweis. Zur Abschätzung der Siebfunktion wenden wir Lemma 3 an. Um dabei die Fehlerglieder besser in den Griff zu bekommen, ersetzen wir in der Siebfunktion die charakteristische Funktion des Intervalls $[x_0 - y_0, x_0]$ durch eine Funktion $f \in C^\infty$ mit folgenden Eigenschaften (vgl. [9] bzw. [11]):

$$\begin{aligned} &f(m) = 1 \quad \text{auf } [x_0 - y_0, x_0], \\ (14)\quad &f(m) = 0 \quad \text{für } m > x_0 + \Delta \text{ bzw. } m < x_0 - y_0 - \Delta,\ \Delta = y_0 x^{-2\varepsilon}, \\ &f^{(q)}(m) \ll \Delta^{-q} \quad \text{für alle } q \geqslant 0, \text{ wobei die } O\text{-Konstante höchstens von } q \end{aligned}$$

abhängt.

Es gilt also

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, z) = S^*(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, z) + O(\Delta), \quad \text{mit} \quad S^*(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, z) = \sum_{\substack{m \\ (g(m), \mathscr{P}_3^{(k)}(z)) = 1}} f(m).$$

Mit

$$|\mathscr{A}_d^*| = \sum_{g(m) \equiv 0(d)} f(m) \tag{15}$$

anstelle von (2), ist dann wieder Lemma 3 anwendbar (vgl. [11], Lemma 2).

Die in (8) gewählte Menge $\mathscr{A}$ ist ein Spezialfall von [1], Bsp. 4. Wir wählen deshalb $X = \int f(t)\,dt$ und $\omega(p)$ wie in (13).

Aus Lemma 3 erhalten wir also mit einer von k unabhängigen Konstanten $c \geqslant 1$:

$$S^*(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u) \geqslant XV(x^u)\left\{f_1\left(\frac{\log D}{u\log x}\right) - c\left(\varepsilon + \varepsilon^{-8}(\log D)^{-1/3}\right)\right\} - R(\mathscr{A}, Q_1, Q_2).$$

Für $R(\mathscr{A}, Q_1, Q_2)$ (vgl. (6)) zeigen wir im nächsten Abschnitt

LEMMA 6. *Sei $\frac{2}{3} < \theta < 1$, $\varepsilon > 0$, $\beta = \min(1-\theta, \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{6})$, dann gilt für $Q_1 = x^{\theta - 10\varepsilon}$ und $Q_2 = x^{\beta - 3\varepsilon}$ mit einer von k unabhängigen O-Konstanten*

$$R(\mathscr{A}, Q_1, Q_2) \ll x^{\theta - \varepsilon/2}.$$

Nach [1], Lemma 5.3 ist

$$V(x^u) = \prod_p \frac{p-\omega(p)}{p-1}\frac{e^{-\gamma}}{u\log x}\left(1 + O\left(\frac{\log\log 3k}{\log x}\right)\right).$$

Wegen $f_1(s) = 2e^\gamma \dfrac{\log(s-1)}{s}$ für $2 \leqslant s \leqslant 4$ (vgl. [7]), folgt die Behauptung für $\theta < 1$. Für $\theta = 1$ genügt es, das Restglied im Sieb trivial abzuschätzen.

6. Beweis von Lemma 6. Hierzu genügt es,

$$R := \sum_{M \leqslant m < M'} \sum_{\substack{N \leqslant n < N' \\ mn | \mathscr{P}_3^{(k)}(z)}} a_m b_n r(\mathscr{A}, mn) \tag{16}$$

mit $M < M' \leqslant 2M$, $N < N' \leqslant 2N$, $|a_m| \leqslant 1$, $|b_n| \leqslant 1$ abzuschätzen, denn $R(\mathscr{A}, Q_1, Q_2)$ ist die Summe von $\ll (\log Q_1)\cdot(\log Q_2)$ Ausdrücken der Form (16).

Nach (15) ist

$$|\mathscr{A}_d^*| = \sum_{g(l) \equiv 0(d)} f(l) = \sum_{\substack{v \bmod d \\ g(v) \equiv 0(d)}} \sum_{l \equiv v(d)} f(l).$$

Durch Anwendung der Poisson'schen Summenformel in der Form von [9], Lemma 1 auf die innerste Summe erhalten wir (vgl. (3))

$$r(\mathscr{A}, d) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{v \bmod d \\ g(v) \equiv 0(d)}} \sum_{\substack{h=-\infty \\ h \neq 0}}^{\infty} e\left(-h\frac{v}{d}\right) \int f(\xi)\, e\left(\frac{h}{d}\xi\right) d\xi.$$

Mit $H := \dfrac{MN}{y_0} x^{3\varepsilon}$ folgt aus (14) sofort durch q-malige partielle Integration,

$q \geqslant 3+1/\varepsilon$ (vgl. [11])

$$R = \int f(\xi)\Bigg\{\sum_{\substack{M \leqslant m < M' \\ mn \mid \mathscr{P}_3^{(k)}(z)}} \sum_{N \leqslant n < N'} \frac{a_m b_n}{mn} \sum_{\substack{v \bmod mn \\ g(v) \equiv 0(mn)}} \sum_{0<|h| \leqslant H} e\left(h\frac{\xi-v}{mn}\right)\Bigg\} d\xi + O\left(\frac{MN}{x^{1-\varepsilon}}\right).$$

Die Behauptung von Lemma 6 reduziert sich somit auf den Beweis von

LEMMA 7. *Sei* $\beta = \min(1-\theta, \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{6})$, $\frac{2}{3} < \theta < 1$, *dann gilt für* $M \leqslant x^{\theta-10\varepsilon}$, $N \leqslant x^{\beta-3\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $M < M' \leqslant 2M$, $N < N' \leqslant 2N$, $H = \dfrac{MN}{y_0} x^{3\varepsilon}$ *und* $x_0 - 2y_0 < \xi \leqslant x_0 + y_0$:

$$T(H, M, N) := \sum_{\substack{M \leqslant m < M' \\ mn \mid \mathscr{P}_3^{(k)}(z)}} \left| \sum_{N \leqslant n < N'} b_n \sum_{0<|h| \leqslant H} \sum_{\substack{v \bmod mn \\ g(v) \equiv 0(mn)}} e\left(h\frac{\xi-v}{mn}\right)\right| \ll MNx^{-\varepsilon}.$$

B e w e i s. Wegen $(m, n) = 1$, $(16kv+l_1, 16kv+l_1+1) = 1$ und $\mu^2(mn) = 1$ folgt

$$T(H, M, N) \ll \sum_{\substack{M \leqslant m < M' \\ (m, 2k)=1}} \sum_{\substack{r,s \\ rs=m, (r,s)=1}} \Bigg| \sum_{\substack{N \leqslant n < N' \\ (n,m)=1,\, n \mid \mathscr{P}_3^{(k)}(z)}} b_n$$
$$\sum_{0<|h| \leqslant H} \sum_{\substack{q_1, q_2 \\ q_1 q_2 = n, (q_1, q_2)=1}} \sum_{\substack{v \bmod mn \\ 16kv+l_1 \equiv 0(q_1 r) \\ 16kv+l_1+1 \equiv 0(q_2 s)}} e\left(h\frac{\xi-v}{mn}\right)\Bigg|.$$

Setzen wir $a_1 = l_1$, $c_1 = l_1+1$, $a_2 = l_1+1$, $c_2 = l_1$ und wählen eine Funktion $\delta(s)$ aus C^∞ mit

$$\begin{aligned} &\delta(s) \geqslant 1 && \text{auf} \quad [M/r, 2M/r], \\ &\delta(s) = 0 && \text{für} \quad s \leqslant \tfrac{1}{2}(M/r) \text{ bzw. } s \geqslant \tfrac{5}{2}(M/r), \\ &\delta^{(q)}(s) \ll (M/r)^{-q} && \text{für} \quad q \geqslant 0 \end{aligned} \tag{17}$$

so genügt es also, für $i = 1, 2$

$$T_i(H, M, N) := \sum_{\substack{r \leqslant \sqrt{M'} \\ (r, 2k)=1}} \sum_{\substack{s \\ (s, 2kr)=1}} \delta(s) \Bigg| \sum_{\substack{N \leqslant n < N' \\ (n, rs)=1,\, n \mid \mathscr{P}_3^{(k)}(z)}} b_n$$
$$\sum_{0<|h| \leqslant H} \sum_{\substack{q_1, q_2 \\ q_1 q_2 = n \\ (q_1, q_2)=1}} \sum_{\substack{v \bmod q_1 q_2 rs \\ 16kv+a_i \equiv 0(q_1 r) \\ 16kv+c_i \equiv 0(q_2 s)}} e\left(h\frac{\xi-v}{rsn}\right)\Bigg|$$

abzuschätzen.

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung und der Vereinbarung, daß sich die Summationen nur über solche r, s, q_1, q_2, q_3, q_4 erstrecken sollen, für die

$$(r, s) = (q_1, q_2) = (q_3, q_4) = 1,$$
$$(rsq_1 q_2 q_3 q_4, 2k) = 1, \quad (rs, q_1 q_2 q_3 q_4) = 1,$$

erhalten wir

$$T_i(H, M, N) \ll \Bigg(Mx^\varepsilon \sum_{r \leqslant \sqrt{M'}} \sum_{0 \leqslant |R| \leqslant 4HN} \sum_{N \leqslant n_1, n_2 < N'} \sum_{\substack{0<|h_1| \leqslant H \\ 0<|h_2| \leqslant H \\ h_1 n_2 - h_2 n_1 = R}} \sum_{\substack{q_1, q_2, q_3, q_4 \\ q_1 q_2 = n_1 \\ q_3 q_4 = n_2}}$$
$$\left|\sum_s \delta(s) e\left(R\frac{\xi}{rsn_1 n_2} - \frac{h_1}{rsn_1} v + \frac{h_2}{rsn_2} w\right)\right|\Bigg)^{1/2},$$

wobei v und w die $\bmod q_1 q_2 rs$ bzw. $q_3 q_4 rs$ eindeutig bestimmten Lösungen von

$$\begin{matrix} 16kv + a_i \equiv 0(q_1 r) \\ 16kv + c_i \equiv 0(q_2 s) \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} 16kw + a_i \equiv 0(q_3 r) \\ 16kw + c_i \equiv 0(q_4 s) \end{matrix}$$

sind.

Mit

$$v = -\frac{1}{16k} s\bar{s} q_2 \bar{q}_2 (16k\overline{16k} a_i - c_i) - \frac{c_i}{16k}$$

$$\text{und} \qquad w = -\frac{1}{16k} s\bar{s} q_4 \bar{q}_4 (16k\overline{16k} a_i - c_i) - \frac{c_i}{16k},$$

wobei $\bar{s}$, $\bar{q}_2$, $\bar{q}_4$ und $\overline{16k}$ Lösungen der Kongruenzen $s\bar{s} \equiv 1(16krq_1 q_2 q_3 q_4)$, $q_2 \bar{q}_2 \equiv 1(16krq_1)$, $q_4 \bar{q}_4 \equiv 1(16krq_3)$. bzw. $16k\,\overline{16k} \equiv 1(q_1 q_2 q_3 q_4 r)$ sind, erhalten wir also

$$T_i(H, M, N) \ll \Bigg(Mx^\varepsilon \sum_{r \leqslant \sqrt{M'}} \sum_{0 < R \leqslant 4HN} \sum_{N \leqslant n_1, n_2 < N'} \sum_{\substack{0<|h_1|, |h_2| \leqslant H \\ h_1 n_2 - h_2 n_1 = R}} \sum_{\substack{q_1, q_2, q_3, q_4 \\ q_1 q_2 = n_1 \\ q_3 q_4 = n_2}} \tag{18}$$
$$\left|\sum_s \delta(s) e\left(\frac{R(16k\xi + c_i)}{16krn_1 n_2 s} + \frac{\bar{s}}{16krn_1 n_2}(h_1 n_2 q_2 \bar{q}_2 - h_2 n_1 q_4 \bar{q}_4)(16k\overline{16k} a_i - c_i)\right)\right|\Bigg)^{1/2}.$$

Der Diagonalterm $R = 0$ liefert den Beitrag

(19)
$$\ll \Bigg(M^2 x^{3\varepsilon} \sum_{\substack{N \leqslant n_1 < N' \\ 0<|h_2| \leqslant H}} \sum_{\substack{n_2, h_1 \\ n_2 h_1 = n_1 h_2}} 1\Bigg)^{1/2} \ll MN^{1/2} H^{1/2} x^{2\varepsilon} \ll MNx^{-\varepsilon} M^{1/2} y_0^{-1/2} x^{9\varepsilon/2},$$

d.h., er geht in der O-Abschätzung von Lemma 7 auf.

Zur Abschätzung der restlichen Summe, die wir mit $T_i^*(H, M, N)$ bezeichnen wollen, betrachten wir zunächst

$$\sum := \sum_{\substack{s \\ (s, m_1) = 1}} \delta(s) e\left(h \frac{\bar{s}}{m_1} + \frac{R\xi'}{m_1 s}\right). \tag{20}$$

Mit der Poisson'schen Summenformel folgt sofort

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_{l \bmod m_1}^{*} e\left(h \frac{\bar{l}}{m_1}\right) \sum_{\substack{s \\ s \equiv l (m_1)}} \delta(s) e\left(\frac{R\xi'}{m_1 s}\right) \\ &= \frac{1}{m_1} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l \bmod m_1}^{*} e\left(h \frac{\bar{l}}{m_1} - K \frac{l}{m_1}\right)\right) \left(\int \delta(t) e\left(\frac{R\xi'}{m_1 t} + \frac{K}{m_1} t\right) dt\right) \\ &:= \frac{1}{m_1} \sum_{K=-\infty}^{\infty} S(h, -K, m_1) I(R\xi', K, m_1). \end{aligned} \tag{21}$$

Für die Kloosterman-Summe gilt nach [9]

$$S(h, -K, m_1) \ll \begin{cases} (h, K, m_1)^{1/2} m_1^{1/2} \tau(m_1) & \text{falls} \quad K \neq 0, \\ (h, m_1)^{1/2} \tau(m_1) & \text{falls} \quad K = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Zur Abschätzung von $I(R\xi', K, m_1)$ verwenden wir

Lemma 8. *$\delta(t)$ erfülle (17), dann gilt für $q \geqslant 0$ und $R \geqslant 1$*

$$I(R\xi', K, m_1) \ll \begin{cases} \left(\dfrac{M}{r}\right)^{1-q} \left(\dfrac{|K|}{m_1} + \dfrac{R\xi'}{m_1} \left(\dfrac{M}{r}\right)^{-2}\right)^{-q} & \textit{falls} \quad \dfrac{KM^2}{R\xi' r^2} \notin [1/5, 5], \\ \left(\dfrac{M}{r}\right)^{3/2} \left(\dfrac{m_1}{R\xi'}\right)^{1/2} & \textit{sonst}. \end{cases} \tag{23}$$

Der Beweis verläuft vollkommen analog zum Beweis von [11], Lemma 3.

Mit (22) und (23) erhalten wir aus (21) für $q_1 \geqslant 0$ und $q \geqslant 2$:

$$\sum \ll \begin{cases} \tau^2(m_1) \left\{ (h, m_1)^{1/2} m_1^{q_1 - 1} (R\xi')^{-q_1} \left(\dfrac{M}{r}\right)^{q_1 + 1} + m_1^{q - 1/2} \left(\dfrac{M}{R\xi' r}\right)^{q-1} + \left(\dfrac{R\xi' r}{M}\right)^{1/2} \right\} \\ \qquad\qquad \text{für} \quad R \geqslant \dfrac{1}{5\xi'} \left(\dfrac{M}{r}\right)^2, \\ \tau(m_1) \left\{ (h, m_1)^{1/2} m_1^{q_1 - 1} (R\xi')^{-q_1} \left(\dfrac{M}{r}\right)^{q_1 + 1} + m_1^{q - 1/2} \left(\dfrac{M}{r}\right)^{1-q} \right\} \\ \qquad\qquad \text{für} \quad R < \dfrac{1}{5\xi'} \left(\dfrac{M}{r}\right)^2. \end{cases}$$

Zur Abschätzung von $T_i^*(H, M, N)$ — vgl. (18) — wählen wir $q_1 = 1$, $q = 2$, $m_1 = 16krn_1 n_2$, $\xi' = 16k\xi + c_i$ und $h = (h_1 n_2 q_2 \bar{q}_2 - h_2 n_1 q_4 \bar{q}_4)(16k\overline{16k}a_i - c_i)$.

Wegen

$$\sum_{\substack{0 < |h_1|, |h_2| \leqslant H \\ h_1 n_2 - h_2 n_1 = R}} 1 \ll (n_1, n_2) \frac{H}{N} + 1 \ll (n_1, n_2) x^{3\varepsilon}$$

folgt

$$\begin{aligned} T_i^*(H, M, N) &\ll \Bigg(M x^{2\varepsilon} \sum_{N \leqslant n_1, n_2 \leqslant N'} \Bigg(\sum_{r \leqslant M/\sqrt{\xi'}} \sum_{1 \leqslant R \leqslant M^2/\xi' r^2} \sum_{\substack{0 < |h_1|, |h_2| \leqslant H \\ h_1 n_2 - h_2 n_1 = R}} N^3 M^{-1} r^{5/2} \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant R \leqslant 4HN} \sum_{\substack{0 < |h_1|, |h_2| \leqslant H \\ h_1 n_2 - h_2 n_1 = R}} \sum_{r \leqslant \sqrt{M'}} \left(\frac{NM^2 (h, r)^{1/2}}{Rxr^2} + \frac{N^3 M r^{1/2}}{Rx} + \left(\frac{Rxr}{M}\right)^{1/2} \right)\Bigg)\Bigg)^{1/2} \\ &\ll MNx^{11\varepsilon/2} \left(\frac{M^{3/4} N^{3/2}}{x^{7/8}} + \frac{M^{1/2} N^{1/2}}{x^{1/2}} + \frac{M^{3/8} N^{3/2}}{x^{1/2}} + \frac{M^{3/8} N^{3/2}}{x^{3\theta/4 - 1/4}} \right) \end{aligned}$$

und damit zusammen mit (19) die Behauptung von Lemma 7.

7. Abschätzung von $S(M_1(a), \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u)$. In diesem Abschnitt zeigen wir mit dem halbdim. Sieb

Lemma 9. *Sei $a \leqslant x^{1-u}$, $\frac{19}{24} < \theta \leqslant 1$, $\max\left(\frac{1}{4}, \frac{12}{5}(1-\theta)\right) < u \leqslant \frac{1}{2}$, dann gilt*

$$S(M_1(a), \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u) \leqslant \frac{(\pi\alpha)^{-1/2}}{\varphi(k)} \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} \frac{x^\theta}{a \log \dfrac{x}{a} \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha} \log x - \log a}} \left(1 + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/5}}\right)\right)$$

mit

$$(\beta, \alpha) = \begin{cases} \left(\theta - \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}\right) & \textit{falls} \quad a < x^{3\theta - 2}, \\ \left(\frac{5}{2}\theta - \frac{3}{2} - \varepsilon, 1\right) & \textit{falls} \quad x^{3\theta - 2} \leqslant a < x^{\frac{33 + \sqrt{6}}{12}\theta - \frac{21 + \sqrt{6}}{12}}, \\ \left(\dfrac{96\sqrt{6} - 189}{29}\theta - 2\sqrt{6} + 4 - \varepsilon, \dfrac{38\sqrt{6} - 73}{29}\right) & \textit{falls} \\ \qquad\qquad x^{\frac{33 + \sqrt{6}}{12}\theta - \frac{21 + \sqrt{6}}{12}} \leqslant a < x^{\frac{48}{19}\theta - \frac{29}{19}}, \\ \left(3\theta - \frac{7}{4} - \varepsilon, \frac{5}{4}\right) & \textit{falls} \quad x^{\frac{48}{19}\theta - \frac{29}{19}} \leqslant a \leqslant x^{1-u} \end{cases} \tag{24}$$

und

$$\omega(p) = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & \textit{für } p \in \mathscr{P}_3^{(ak)}, \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases} \tag{25}$$

Eine um den Faktor 4 *bessere Abschätzung gilt auch für* $S(M_2(a), \mathscr{P}_3^{(k)}, x^u)$ (vgl. (12)).

Beweis. Wegen $(ap+1, a) = 1$ können wir $\mathscr{P}_3^{(k)}$ durch $\mathscr{P}_3^{(ak)}$ ersetzen. Zur Wahl von X betrachten wir zuerst $|M_1(a)_d|$.

Für $\theta < 1$, $(d, 2k) = 1$, $(a, d) = 1$, $a\bar{a} \equiv 1\,(d)$ gilt (vgl. (10) bzw. (2))

$$|M_1(a)_d| = \left|\left\{\frac{x-x^\theta}{a} < p \leqslant \frac{x}{a},\ p \equiv -\bar{a}\,(d),\ p \equiv l_1^*\,(4k)\right\}\right|$$
$$= \pi\left(\frac{x}{a}, 4kd, l^*\right) - \pi\left(\frac{x-x^\theta}{a}, 4kd, l^*\right),$$

denn die arithmetischen Progressionen $-\bar{a}(d)$ und $l_1^*(4k)$ überlagern sich zu einer einzigen Progression $l^*(4kd)$. Wir wählen also $\omega(p)$ wie in (25) und

$$X = \frac{1}{\varphi(4k)}\left\{\mathrm{li}\left(\frac{x}{a}\right) - \mathrm{li}\left(\frac{x-x^\theta}{a}\right)\right\} = \frac{1}{\varphi(4k)}\frac{x^\theta}{a\log(x/a)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log(x/a)}\right)\right).$$

Folglich gilt für ein $d \in Q(\mathscr{P}_3^{(ak)})$:

$$|r(M_1(a), d)| \tag{26}$$
$$\leqslant \max_{x/2a \leqslant N \leqslant x/a}\ \max_{h \leqslant x^\theta/a}\ \max_{(l,4kd)=1} \left|\pi(N+h, 4kd, l) - \pi(N, 4kd, l) - \frac{\mathrm{li}(N+h) - \mathrm{li}(N)}{\varphi(4kd)}\right|.$$

Zur Abschätzung des Restgliedes in Lemma 1 benützen wir

Lemma 10. *Sei* $2 \leqslant y < x$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$, *dann gilt mit einer höchstens von* ε *und* C *abhängenden O-Konstanten*:

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(l,q)=1}\ \max_{x/2 \leqslant N \leqslant x}\ \max_{h \leqslant y} \left|\pi(N+h, q, l) - \pi(N, q, l) - \frac{\mathrm{li}(N+h) - \mathrm{li}(N)}{\varphi(q)}\right|$$
$$\ll \frac{y}{(\log x)^C}$$

für

$$Q \leqslant \begin{cases} yx^{-1/2-\varepsilon} & \textit{falls} \quad y \geqslant x^{2/3}, \\ y^{5/2}x^{-3/2-\varepsilon} & \textit{falls} \quad x^{(229+4\sqrt{6})/361} \leqslant y \leqslant x^{2/3}, \\ y^{(96\sqrt{6}-189)/29}x^{-2\sqrt{6}+4-\varepsilon} & \textit{falls} \quad x^{29/48} \leqslant y \leqslant x^{(229+4\sqrt{6})/361}, \\ y^3x^{-7/4-\varepsilon} & \textit{falls} \quad x^{7/12+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x^{29/48}. \end{cases}$$

Dieses Lemma ergibt sich sofort aus den Arbeiten von Huxley–Iwaniec [10] und S. Ricci [13], wir müssen nur x^θ durch y ersetzen und beachten, daß

$$\left(\frac{1}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}\theta - \frac{9}{25}}\right)^2 \geqslant \frac{96\sqrt{6}-189}{29}\theta - 2\sqrt{6} + 4 \quad \text{für} \quad \frac{29}{48} \leqslant \theta \leqslant \frac{229+4\sqrt{6}}{361}$$

ist.

Wegen (26) folgt aus diesem Lemma mit $Q = \dfrac{1}{4k}\dfrac{x^\beta}{a^\alpha}$, wobei (β, α) wie in (24) definiert sind:

$$\sum_{\substack{d < Q \\ d \mid \mathscr{P}_3^{(ak)}(x^u)}} |r(M_1(a)_d)| \ll \frac{x^\theta}{a(\log(x/a))^{A+2}}.$$

Aus Lemma 1 erhalten wir also

$$S(M_1(a), \mathscr{P}_3^{(ak)}, x^u)$$
$$\leqslant XV(x^u)\left\{F_{1/2}\left(\frac{\log Q}{u\log x}\right) + \frac{c}{(\log Q)^{0.21}}\right\} + O\left(x^\theta/a(\log(x/a))^{A+2}\right).$$

Diese Abschätzung gilt auch für $\theta = 1$. Wegen (24) ist

$$0 < \varepsilon \leqslant \log Q/u\log x \leqslant 2,$$

so daß nach (5)

$$F_{1/2}\left(\frac{\log Q}{u\log x}\right) = 2\sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi}}\sqrt{\frac{u\log x}{\log Q}}$$

ist. Mit [1], Lemma 5.3 folgt schließlich die Behauptung. Wählen wir in Lemma 9 $a = qp_1$, so erhalten wir sofort aus (9)

Korollar 1. *Sei* $\frac{19}{24} < \theta \leqslant 1$, $\max\left(\frac{1}{4}, \frac{12}{5}(1-\theta)\right) < u \leqslant \frac{1}{2}$, *dann gilt für*

$$\omega_1(p) = \begin{cases} p/(p-1) & \textit{falls } p \in \mathscr{P}_3^{(k)}, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

$$R_1 \leqslant \frac{1}{\varphi(k)\sqrt{\pi}} \prod_p \left(1 - \frac{\omega_1(p)}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} x^\theta$$
$$\times \sum_{i=1}^{4} \sum_{q,p}^{(i)} \frac{a_i}{qp\log\dfrac{x}{qp}\sqrt{b_i(\theta)\log x - \log qp}}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/5}}\right)\right)$$

mit

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \sqrt{\frac{29}{38\sqrt{6}-73}}, \quad a_4 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$(27)\qquad \begin{aligned} b_1(\theta) &= 2\theta - 1 - \varepsilon,\\ b_2(\theta) &= \tfrac{5}{2}\theta - \tfrac{3}{2} - \varepsilon,\\ b_3(\theta) &= \frac{96\sqrt{6}-189}{38\sqrt{6}-73}\theta - \frac{58\sqrt{6}-116}{38\sqrt{6}-73} - \varepsilon,\\ b_4(\theta) &= \tfrac{12}{5}\theta - \tfrac{7}{5} - \varepsilon, \end{aligned}$$

und den Summationsbedingungen in $\sum^{(i)}$:

$$\max(1, x^{c_i(\theta)}) < q \leqslant \min(x^{1-2u}, x^{d_i(\theta)-u}), \quad (q, k\mathscr{P}_3^{(k)}) = 1, \quad q \equiv 4(16),$$

$$\max\left(x^u, \frac{x^{d_{i-1}(\theta)}}{q}\right) \leqslant p < \min\left(\sqrt{\frac{x}{q}}, \frac{x^{d_i(\theta)}}{q}\right), \quad p \equiv 3(4),$$

wobei

$$(28)\qquad \begin{aligned} c_1(\theta) &= 0, & d_0(\theta) &= 0, \quad d_1(\theta) = 3\theta - 2,\\ c_2(\theta) &= 6\theta - 5, & d_2(\theta) &= \frac{33+\sqrt{6}}{12}\theta - \frac{21+\sqrt{6}}{12},\\ c_3(\theta) &= \frac{33+\sqrt{6}}{6}\theta - \frac{27+\sqrt{6}}{6}, & d_3(\theta) &= \tfrac{48}{19}\theta - \tfrac{29}{19},\\ c_4(\theta) &= \tfrac{96}{19}\theta - \tfrac{77}{19}, & d_4(\theta) &= 1. \end{aligned}$$

8. Einige Umformungen. Wir werden in diesem Abschnitt, stellvertretend für die in Korollar 1 auftretenden Summen, die nicht leer sind,

$$\sum := \sum_{\substack{x^{\varrho_1} < q \leqslant x^{\varrho_2}\\ q \equiv 4(16)}} \; \sum_{\substack{x^{\gamma_1}/q^{\delta_1} \leqslant p < x^{\gamma_2}/q^{\delta_2}\\ p \equiv 3(4)}} \frac{1}{qp} g(q, p, \beta^*)$$

auswerten, wobei ϱ_i, γ_i, δ_i, β^* nur die in (27) auftretenden Werte annehmen, θ bzw. u in den in Korollar 1 angegebenen Bereichen liegen und die q-Summationen immer nur über solche q laufen für die $(q, k\mathscr{P}_3^{(k)}) = 1$ ist.

Zur Auswertung der p-Summation verwenden wir einen Spezialfall von [6], Lemma 8:

Lemma 11. *Sei $B(t)$ eine reelle, positive, stetige und monoton wachsende Funktion im Intervall $[z_1, z_2]$ mit $2 \leqslant z_1 \leqslant z_2$, dann gilt*

$$\sum_{\substack{z_1 \leqslant p < z_2\\ p \equiv 3(4)}} \frac{1}{p} B(p) = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{B(t)}{t \log t} dt + O\left(\frac{B(z_2)}{\log z_1}\right).$$

Die O-Konstante ist absolut und unabhängig von $B(t)$.

Mit

$$B(p) = g(q, p, \beta^*) = \frac{1}{\log \frac{x}{qp} \sqrt{\log \frac{x^{\beta^*}}{qp}}},$$

vgl. (28), erhalten wir sofort

$$(29)\qquad \sum = \frac{1}{2}(\log x)^{-3/2}$$

$$\times \sum_{\substack{x^{\varrho_1} < q \leqslant x^{\varrho_2}\\ q \equiv 4(16)}} \frac{1}{q} \int_{\gamma_1 - \delta_1 \log q/\log x}^{\gamma_2 - \delta_2 \log q/\log x} \frac{dv}{v\left(1 - v - \frac{\log q}{\log x}\right)\sqrt{\beta^* - v - \frac{\log q}{\log x}}} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{3/2}}\right).$$

Zur Auswertung der Summation über q benötigen wir noch

Lemma 12. *Für $t \geqslant (\log x)^{2A}$ gilt*

$$\sum_{\substack{q \leqslant t\\ q \equiv 4(16)}} \frac{1}{q} = 2c^* \sqrt{\log t}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log t)^{1/5}}\right)\right)$$

mit

$$c^* = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \prod_p \left(1 - \frac{\omega_2(p)}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} \frac{\varphi(k)}{k}$$

und

$$\omega_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p \in \mathscr{P}_3^{(k)},\\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Offensichtlich gilt mit $\mathscr{A} = \{q \leqslant t\colon q \equiv 4(16),\ q \equiv m(k)\}$

$$\sum_{\substack{q \leqslant t\\ q \equiv 4(16)}} 1 = \sum_{\substack{m=1\\ (m,k)=1}}^{k} S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, \sqrt{t}) + O(1).$$

Auf die Siebfunktion wenden wir Lemma 2 an. Dazu wählen wir $\omega(p) = \omega_2(p)$ und $X = t/16k$. Da die Voraussetzungen erfüllt sind, erhalten wir mit $Q = (\log t)^2$ und [1], Lemma 5.3 durch triviale Abschätzung des Restgliedes

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}_3^{(k)}, \sqrt{t}) = \frac{1}{\varphi(k)} c^* \frac{t}{\sqrt{\log t}}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log t)^{1/5}}\right)\right)$$

und hieraus durch partielle Summation die Behauptung.

Durch erneute partielle Summation mit Hilfe von Lemma 12 erhalten wir aus (29) schließlich unter den Voraussetzungen von Korollar 1

$$(30)\quad \sum_{\substack{x^{\varrho_1} < q \leqslant x^{\varrho_2} \\ q \equiv 4(16)}} \sum_{\substack{x^{\gamma_1}/q^{\delta_1} \leqslant p < x^{\gamma_2}/q^{\delta_2} \\ p \equiv 3(4)}} \frac{1}{qp} g(q, p, \beta^*)$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \prod_p \left(1 - \frac{\omega_2(p)}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/2} \frac{\varphi(k)}{k} \frac{1}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/5}}\right)\right)$$

$$\times \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \int_{\gamma_1 - \delta_1 w}^{\gamma_2 - \delta_2 w} \frac{dv}{v(1-v-w)\sqrt{\beta^* - v - w}} \frac{dw}{\sqrt{w}}.$$

Zusammen mit Korollar 1 folgt hieraus die endgültige Abschätzung von R_1. Genau dieselbe Abschätzung gilt auch für R_2 (vgl. (11)).

9. Zusammenfassung der Ergebnisse. Aus Lemma 4, Lemma 5, Korollar 1 und (30) erhalten wir

LEMMA 13. *Sei* $\frac{19}{24} < \theta \leqslant 1$, $\max\left(\frac{1}{4}, \frac{12}{5}(1-\theta)\right) < u < \psi/2$, $\psi = \min(1, \frac{5}{4}\theta - \frac{1}{6})$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 \leqslant k \leqslant (\log x)^A$, $(k, 2l(l+1)) = 1$,

$$\omega(p) = \begin{cases} 2 & \textit{für } p \in \mathscr{P}_3^{(k)}, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

dann existiert eine höchstens von θ, u, A *und* ε *abhängende Konstante* $c \geqslant 1$, *so daß für* $x \geqslant x_0(\eta)$:

$$B_2(x, k, l) - B_2(x - x^\theta, k, l)$$

$$\geqslant \frac{1}{8\pi} \prod_p \frac{p - \omega(p)}{p-1} \frac{x^\theta}{k \log x} (1 - c\eta) \left\{ \frac{\pi}{\psi} \log\left(\frac{\psi}{u} - 1\right) - \sum_{i=1}^{4} a_i I_i \right\}$$

mit

$$I_i = \int_{\max(0, c_i(\theta))}^{\min(1-2u, d_i(\theta)-u)+} \int_{\max(u, d_{i-1}(\theta)-t)}^{\min(1/2-1/2t, d_i(\theta)-t)} \frac{dt}{v(1-v-t)\sqrt{b_i(\theta)-v-t}\sqrt{t}},$$

a_i, $b_i(\theta)$, $c_i(\theta)$ *und* $d_i(\theta)$ *aus* (27) *bzw.* (28), *wobei*

$$\int_a^{b+} f(t)\, dt = \begin{cases} \int_a^b f(t)\, dt & \textit{falls } a < b, \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Die Behauptung des Satzes folgt aus diesem Lemma durch Auswertung der Integrale. Die Integration nach v kann noch exakt ausgeführt werden,

während die Integration nach t numerisch durchgeführt werden muß; zuvor muß allerdings noch partiell integriert werden, da die Integrale für $t = 0$ uneigentlich werden.

Mit $u = 3/8$ ergibt sich für $\theta \geqslant 0.8521$

$$\frac{\pi}{\psi} \log\left(\frac{\psi}{u} - 1\right) - \left(\sqrt{2} I_1 + I_2 + \sqrt{\frac{29}{38\sqrt{6} - 73}} I_3 + \frac{2}{\sqrt{5}} I_4\right) \geqslant 2.5 \cdot 10^{-4}$$

und damit die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] H. Halberstam and H. E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, London 1974.
[2] C. Hooley, *On the intervals between numbers, that are sums of two squares*, III, J. Reine Angew. Math. 267 (1974), S. 207–218.
[3] K. H. Indlekofer, *Scharfe untere Abschätzung für die Anzahlfunktion der B-Zwillinge*, Acta Arith. 26 (1974), S. 207–212.
[4] H. Iwaniec, *On the error term in the linear sieve*, ibid. 19 (1971), S. 1–30.
[5] — *Primes of type* $\varphi(x, y) + A$ *where* φ *is a quadratic form*, ibid. 21 (1972), S. 203–234.
[6] — *The half-dimensional sieve*, ibid. 29 (1976), S. 69–95.
[7] — *Rosser's sieve*, ibid. 36 (1980), S. 171–202.
[8] — *A new form of the error term in the linear sieve*, ibid. 37 (1980), S. 307–320.
[9] H. Iwaniec and J.-M. Deshouillers, *An additive divisor problem*, J. London Math. Soc. (2) 26 (1982), S. 307–320.
[10] H. Iwaniec and M. M. Huxley, *Bombieri's theorem in short intervals*, Mathematika 22 (1975), S. 188–194.
[11] H. Iwaniec and M. Laborde, P_2 *in short intervals*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 31.4 (1981), S. 37–56.
[12] P. J. Kelly, *The number of B-twins in an interval*, Dissertation, Nottingham 1978.
[13] S. J. Ricci, *Mean value theorems for primes in short intervals*, Proc. London Math. Soc. (3) 37 (1978), S. 230–242.
[14] G. J. Rieger, *Aufeinanderfolgende Zahlen als Summe von 2 Quadraten*, Indag. Math. 27 (1965), S. 208–220.

UNIVERSITÄT ULM
OBERER ESELBERG
D-79 ULM

Eingegangen am 6.3.1984
und in revidierter Form am 10.7.1984 (1408)