und den Exponenten $68/451 = 0.1507760\ldots$ im Fehlerglied des Hauptsatzes zu

$$(1+2\alpha)/11+\varepsilon = 0.1507311\ldots$$

verbessern. Hierin ist $\alpha = 0.3290213\ldots$ das Infimum von $\varkappa+\lambda-\frac{1}{2}$, wenn $(\varkappa, \lambda)$ alle Exponentenpaare durchläft, die sich durch die Rankinschen Prozesse A und B aus dem trivialen Paar (0, 1) gewinnen lassen (vgl. [5], insbesondere Abschätzung (4), S. 150).

Darüber hinausgehende Verschärfungen des Hauptsatzes werden m. E. den Einsatz von Abschätzungen mehrdimensionaler Exponentialsummen erfordern.

Literaturverzeichnis

[1] P. T. Bateman and E. Grosswald, *On a theorem of Erdös and Szekeres*, Illinois J. Math. 2 (1958), S. 88–98.

[2] J. G. van der Corput, *Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem*, Math. Ann. 84 (1921), S. 53–79.

[3] E. Krätzel, *Teilerprobleme in drei Dimensionen*, Math. Nachrichten 42 (1969), S. 275–288.

[4] E. Philipps, *The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method*, Quart. J. Math. (Oxford) 4 (1933), S. 209–225.

[5] R. A. Rankin, *Van der Corput's method and the theory of exponent-pairs*, ibid. (2) 6 (1955), S. 147–153.

[6] H. E. Richert, *Über die Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung I*, Math. Z. 56 (1952), S. 21–32.

[7] P. G. Schmidt, *Zur Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung*, J. Reine Angew. Math. 229 (1968), S. 34–42.

[8] P. Shiu, *On square-full integers in a short interval*, Glasgow Math. J. 25 (1984), S. 127–134.

FACHBEREICH MATHEMATIK DER PHILIPPS-UNIVERSITÄT
LAHNBERGE
D-3550 MARBURG

Eingegangen am 19. 11. 1984 (1472)

ACTA ARITHMETICA
XLVI (1986)

Sur les fonctions multiplicatives à valeurs entières

par

HUBERT DELANGE (Orsay)

1. Introduction. f étant une fonction arithmétique à valeurs entières, autrement dit une application de N^* dans Z, un des problèmes que l'on peut se poser à son sujet est le suivant:

Etant donné k entier > 1 et l entier quelconque, étudier l'ensemble des $n \in N^*$ pour lesquels $f(n) \equiv l \pmod k$.

Si, k étant fixé, cet ensemble possède une densité pour tout l, on peut dire que f possède une distribution limite modulo k. S'il possède pour tout l une densité égale à $1/k$, ce qu'on peut exprimer en disant qu'asymptotiquement les valeurs de f se répartissent également entre les différentes classes modulo k, on peut dire que f possède une distribution limite uniforme modulo k, ou qu'elle est distribuée uniformément modulo k.

Ainsi, $\Omega(n)$ étant le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers, Pillai [8] avait démontré en 1940 que la fonction Ω est distribuée uniformément modulo k pour tout $k > 1$.

Dans un article paru en 1969 [2] nous avons démontré que toute fonction arithmétique additive à valeurs entières possède une distribution limite modulo k pour tout k, et nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les valeurs de la fonction pour les nombres premiers et les puissances de 2, pour que cette distribution limite soit uniforme pour un k donné, ou pour tout $k > 1$.

Nous nous proposons ici d'étudier le cas des fonctions multiplicatives à valeurs entières.

Pour ces fonctions comme pour les fonctions additives, l'existence d'une distribution limite modulo k peut se déduire d'un théorème général de Ruzsa ([9], théorème 2). Mais notre méthode est simple et nous obtenons des précisions que ne donne pas le théorème de Ruzsa.

Les résultats que nous allons établir ont été énoncés sans démonstration en 1976 et 1977 ([3] et [4]).

Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, les lettres p et q désigneront toujours des nombres premiers, et les lettres n, d, i, j désigneront des entiers > 0.

Comme il est usuel, nous appelons „valeur moyenne” d'une fonction arithmétique g la limite, si elle existe, de $(1/x)\sum_{n\leqslant x} g(n)$ quand x tend vers l'infini. Nous désignons cette valeur moyenne par $M(g)$.

Nous désignons par G_k le groupe des unités de l'anneau Z/kZ, c'est-à-dire le groupe multiplicatif des classes modulo k qui sont formées d'entiers premiers avec k.

q étant un nombre premier et m un entier non nul, nous désignons par $v_q(m)$ l'exposant de q dans la décomposition de $|m|$ en facteurs premiers. Autrement dit, nous posons $v_q(m) = r \geqslant 0$ si $q^r|m$ et $q^{r+1}\nmid m$, ce qui s'écrit aussi $q^r\|m$ suivant une notation usuelle.

Nous posons par ailleurs $v_q(0) = +\infty$.

Il est toujours entendu qu'une somme vide est nulle et un produit vide est égal à 1.

On utilise le signe # devant le symbole d'un ensemble fini pour désigner le nombre des éléments de cet ensemble.

2. Énoncé des résultats. Dans tout ce qui suit, jusqu'à la fin de cet article, il est entendu que f est une fonction arithmétique multiplicative à valeurs entières.

2.1. Le résultat principal est le suivant:

THÉORÈME 1. 1. *Pour tout k entier >1 et tout l entier, l'ensemble des n pour lesquels on a $f(n)\equiv l \pmod k$ possède une densité, soit $\delta_{k,l}$.*

2. *Soit P l'ensemble des nombres premiers q pour lesquels on a*

$$\sum_{q|f(p)} 1/p = +\infty.$$

(a) *On a $\delta_{k,0} = 1$ si, et seulement si, tous les diviseurs premiers de k appartiennent à P.*

(b) *Soit $D = \prod_{\substack{q|k\\ q\in P}} q^{v_q(k)}$, de sorte que D est un diviseur de k* (et $D=1$ si, et seulement si, k n'est divisible par aucun nombre de P).

On a $\delta_{k,l} = 0$ lorsque $l \not\equiv 0 \pmod D$.

2.2. Il est clair que, d'après 2(b) si $D>1$, on a $\delta_{k,l} = 0$ pour tout l premier avec k.

Par contre, on voit que, si $D=1$, l'ensemble des n tels que $(f(n), k) = 1$ possède une densité >0, autrement dit, on a

$$\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant k\\ (k,l)=1}} \delta_{k,l} > 0.$$

En effet, soit E l'ensemble considéré. Il a pour fonction caractéristique la fonction multiplicative $\chi\circ f$, où χ est le caractère principal modulo k. Comme

$p\notin E$ si, et seulement si, il existe un nombre premier q qui divise k et $f(p)$, et comme k n'est divisible par aucun nombre de P, on a

$$\sum_{p\notin E} 1/p \leqslant \sum_{q|k}\Big(\sum_{q|f(p)} 1/p\Big) < +\infty.$$

D'après un résultat bien connu (cf. corollaire 2, § 3.1.3 plus loin) ceci entraîne que E a une densité >0.

On peut chercher à quelles conditions, quand $D=1$, $\delta_{k,l}$ a la même valeur pour tous les l premiers avec k.

Il résulte immédiatement de la définition de D que, si $D=1$, toute classe u modulo k pour laquelle on a

$$\sum_{f(p)\in u} 1/p = +\infty$$

appartient à G_k.

Désignons par Γ le sous-groupe de G_k engendré par l'ensemble C de ces classes.

On a le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Si $D=1$, pour que $\delta_{k,l}$ ait la même valeur pour tous les l premiers avec k, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite:*

(a) $\Gamma = G_k$;

(b) *Γ est un sous-groupe d'indice 2 de G_k et, pour tout $r\in N^*$, la classe de $f(2^r)$ modulo k appartient à $G_k\setminus\Gamma$.*

Lorsqu'il en est ainsi, pour chaque diviseur d de k, $\delta_{k,l}$ a la même valeur pour tous les l tels que $(k,l) = d$.

Nous désignerons par $P_1(k)$ cette dernière propriété de la fonction f.

2.3. Il est clair que, pour que f soit distribuée uniformément modulo k, il faut et il suffit qu'elle possède le propriété $P_1(k)$ et en outre la propriété $P_2(k)$ suivante:

Pour chaque diviseur d de k, l'ensemble des n pour lesquels $(f(n), k) = d$ possède la densité $(1/k)\varphi(k/d)$.

Si f est supposée complètement multiplicative, ou bien fortement multiplicative (c'est-à-dire que $f(p^r) = f(p)$ pour tout p premier et tout $r>1$), on peut donner des conditions simples nécessaires et suffisantes pour que f possède la propriété $P_2(k)$.

THÉORÈME 3. *Si f est supposée complètement multiplicative, pour qu'elle possède la propriété $P_2(k)$, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions suivantes:*

1. *Pour chaque p premier, $f(p)$ est divisible par au plus un q premier divisant k;*

2. *Pour chaque q premier divisant k, on a*

$$\sum_{q\mid f(p)} \frac{1}{p} < +\infty \quad et \quad \prod_{q\mid f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right) = 1-\frac{1}{q},$$

et, si $v_q(k) > 1$, on a pour $1 \leqslant r < v_q(k)$

$$\sum_{ij=r} \left(i \sum_{q^j \| f(p)} \frac{1}{p^j}\right) = \frac{1}{q^r}. \tag{1}$$

Si f est supposée fortement multiplicative, pour qu'elle possède la propriété $P_2(k)$, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition 1 ci-dessus et à la condition déduite de 2 en remplaçant la relation (1) par

$$\sum_{ij=r} \left((-1)^{j-1} i \sum_{q^i \| f(p)} \frac{1}{(p-1)^j}\right) = \frac{1}{q^r}. \tag{1'}$$

2.4. Les théorèmes 2 et 3 permettent de répondre à une question posée par Narkiewicz [7]: le fait que f soit distribuée uniformément modulo k pour tout k implique-t-il que $f(n) = n$ pour tout n?

Il apparaît que ce n'est pas le cas, même si on ajoute la condition que f soit complètement multiplicative et > 0.

On voit aussi que le fait que f soit distribuée uniformément modulo k pour tout k n'implique pas qu'elle soit complètement multiplicative, même si on la suppose > 0.

2.4.1. On déduit d'abord des théorèmes 2 et 3 le résultat suivant:

THÉORÈME 4. *Si on suppose que f est complètement multiplicative et que $f(n) \geqslant 0$ pour tout n, pour que f soit distribuée uniformément modulo k pour tout $k > 1$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1. *Pour chaque p premier, $f(p)$ est égal à une puissance d'un nombre premier ou à 1;*

2. *Pour chaque q premier, on a pour tout $r \geqslant 1$*

$$\sum_{ij=r} \left(i \sum_{f(p)=q^i} \frac{1}{p^j}\right) = \frac{1}{q^r}. \tag{2}$$

Si on suppose que f est fortement multiplicative et que $f(n) \geqslant 0$ pour tout n, on a le même résultat où la relation (2) est remplacée par

$$\sum_{ij=r} \left((-1)^{j-1} i \sum_{f(p)=q^i} \frac{1}{(p-1)^j}\right) = \frac{1}{q^r}. \tag{2'}$$

Il est à noter que la condition 1 implique que $f(n) > 0$ pour tout n.

2.4.2. On démontre ensuite le résultat suivant:

THÉORÈME 5. 1. *Si f est supposée complètement multiplicative, ou fortement multiplicative, et $\geqslant 0$, les conditions du théorème 4 peuvent effectivement être satisfaites avec la condition supplémentaire que $f(p) = 1$ pour tout p appartenant à un ensemble E donné, pourvu que*

$$\sum_{p\notin E} 1/p = +\infty. \text{[1]}$$

Ceci montre qu'*il existe une infinité de fonctions complètement multiplicatives à valeurs entières > 0, et une infinité de fonctions fortement multiplicatives à valeurs entières > 0, qui sont distribuées uniformément modulo k pour tout $k > 1$.*

En effet, si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sont des fonctions complètement multiplicatives, ou fortement multiplicatives, à valeurs entières > 0, distribuées uniformément modulo k pour tout $k > 1$, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, m$, il existe au moins un nombre premier p_i tel que $f_i(p_i) \neq 1$ (car on n'a pas $f_i(n) = 1$ pour tout n sans facteur carré). En prenant $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ on voit qu'il existe une fonction distincte de $f_1, \ldots, f_m$ et ayant les mêmes propriétés.

Il est à noter que f peut être distribuée uniformément modulo k pour tout k en n'étant ni complètement multiplicative ni fortement multiplicative. Un exemple simple est le suivant:

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2.4.3. Notons aussi que le fait que f soit distribuée uniformément modulo k pour tout k peut entraîner que $f(n) = n$ pour tout n si l'on impose une condition supplémentaire plus forte que celle d'être complètement multiplicative et > 0.

On a le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Supposons que f est complètement multiplicative et que $f(n) > 1$ pour tout $n > 1$.*

Si, pour tout $k > 1$, l'ensemble des n tels que $f(n) \equiv 0 \pmod k$ a la densité $1/k$, on a $f(n) = n$ pour tout n.

3. Préliminaires.

3.1. Le lemme suivant joue un rôle fondamental dans nos démonstrations:

LEMME 1. *Soit λ une fonction multiplicative satisfaisant à $|\lambda(n)| \leqslant 1$ pour tout n.*

On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tout p premier,

$$|\mathrm{Im}\,\lambda(p)| \leqslant K(1-\mathrm{Re}\,\lambda(p)).$$

---

[1] Cette condition est indispensable. En effet, pour que f soit distribuée uniformément modulo k pour tout $k > 1$, il faut évidemment que l'ensemble des n tels que $f(n) = 1$ soit de densité nulle. Or, si f est $\geqslant 0$, la fonction caractéristique de cet ensemble est multiplicative, et il est de densité nulle si, et seulement si, $\sum_{f(p)\neq 1} 1/p = +\infty$.

λ possède une valeur moyenne, et celle-ci est nulle si on a

$$\sum \frac{1-\operatorname{Re}\lambda(p)}{p} = +\infty \quad \text{ou } \lambda(2^r) = -1 \text{ pour tout } r \in N^*.$$

Si $\sum (1-\operatorname{Re}\lambda(p))/p < +\infty$, on a

$$M(\lambda) = \prod \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(p^r)}{p^r}\right).$$

Ceci résulte d'un théorème connu de Wirsing ([10], Satz 1.2). On peut aussi le prouver de la manière suivante:

Le théorème 2 de [1] montre que, si $\sum (1-\operatorname{Re}\lambda(p))/p < +\infty$, la fonction λ possède une valeur moyenne égale à

$$\prod \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(p^r)}{p^r}\right),$$

qui n'est nulle que si $\lambda(2^r) = -1$ pour tout $r \in N^*$.

D'autre part, si $\sum (1-\operatorname{Re}\lambda(p))/p = +\infty$, la remarque du § 4.7.1 de [5] montre que l'on a

$$\sum \frac{1-\operatorname{Re}(\lambda(p)p^{-iu})}{p} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel},$$

et il résulte alors d'un théorème bien connu de Halász [6] que λ possède une valeur moyenne nulle.

3.1.1. Il est à noter que l'hypothèse sur les valeurs de $\lambda(p)$ est satisfaite en particulier si la fonction λ ne prend pas d'autres valeurs que zéro et des racines ν-ièmes de l'unité (avec ν fixé).

3.1.2. Notons aussi le corollaire suivant, qui est un résultat bien connu et se démontre directement de façon très simple:

COROLLAIRE 1. *Soit λ une fonction multiplicative réelle satisfaisant à $0 \leqslant \lambda(n) \leqslant 1$ pour tout n.*

λ possède une valeur moyenne et celle-ci est nulle si

$$\sum \frac{1-\lambda(p)}{p} = +\infty$$

et égale à

$$\prod \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda(p^r)}{p^r}\right) > 0 \quad \text{si} \quad \sum \frac{1-\lambda(p)}{p} < +\infty.$$

Notons que ceci est égal à $\prod \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\lambda(p)}{p}\right)^{-1}$ lorsque λ est complètement multiplicative, et à $\prod \left(1+\frac{\lambda(p)-1}{p}\right)$ lorsque λ est fortement multiplicative.

3.1.3. Ce corollaire a comme conséquence immédiate le suivant, également bien connu:

COROLLAIRE 2. *Soit E une partie de N^* dont la fonction caractéristique est multiplicative.*

E possède une densité et celle-ci est nulle si, et seulement si,

$$\sum_{p \notin E} 1/p = +\infty.$$

3.2. Du corollaire 1 on déduit le lemme suivant:

LEMME 2. *Soit q un nombre premier tel que $\sum_{q \mid f(p)} 1/p = +\infty$. Alors, quel que soit $r \in N^*$, l'ensemble des n tels que $q^r \nmid f(n)$ est de densité nulle.*

Démonstration. Soit λ la fonction arithmétique définie par

$$\lambda(n) = \begin{cases} e^{-\nu_q(f(n))} & \text{si} \quad f(n) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad f(n) = 0. \end{cases}$$

λ est une fonction multiplicative réelle et on a $0 \leqslant \lambda(n) \leqslant 1$ pour tout n.

Comme, pour tout p tel que $q \mid f(p)$, $\lambda(p) \leqslant e^{-1}$, on a

$$\sum (1-\lambda(p))/p = +\infty.$$

λ possède donc une valeur moyenne nulle. Autrement dit, $(1/x) \sum_{n \leqslant x} \lambda(n)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Mais la relation $q^r \nmid f(n)$ équivaut à $\lambda(n) \geqslant e^{1-r}$.

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \lambda(n) \geqslant e^{1-r} \cdot \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ q^r \nmid f(n)}} 1.$$

3.3. Le lemme 2 et le corollaire 2 permettent d'établir le théorème suivant:

THÉORÈME A. *k étant un entier donné > 1, pour que l'ensemble des n tels que $f(n) \not\equiv 0 \pmod k$ soit de densité nulle, il faut et il suffit que, pour tout q premier divisant k,*

$$\sum_{q \mid f(p)} 1/p = +\infty.$$

Démonstration. Supposons d'abord que la condition indiquée soit satisfaite avec $k = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_m^{\alpha_m}$, où $q_1, q_2, \ldots, q_m$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ des entiers > 0.

L'ensemble des n tels que $k \nmid f(n)$ est contenu dans l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{m} E_i$, où E_i est l'ensemble des n tels que $q_i^{\alpha_i} \nmid f(m)$. D'après le lemme 2, chaque ensemble E_i est de densité nulle.

Supposons maintenant qu'il existe un q premier divisant k tel que

$$\sum_{q|f(p)} 1/p < +\infty.$$

L'ensemble des n tels que $k \nmid f(n)$ contient l'ensemble E des n tels que $q \nmid f(n)$.

Mais E possède une densité > 0 d'après le corollaire 2. En effet, sa fonction caractéristique est multiplicative et on a $\sum_{p \notin E} 1/p < +\infty$.

3.4. Nous aurons à utiliser encore deux autres lemmes.

3.4.1. Lemme 3. *Soit $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille dénombrable de parties de N^* disjointes deux à deux, dont la réunion est N^*.*

On suppose que, pour chaque $\alpha \in I$, l'ensemble E_α possède une densité δ_α, et que l'on a $\sum_{\alpha\in I} \delta_\alpha = 1$.

Alors, quel que soit $J \subset I$, l'ensemble $E = \bigcup_{\alpha\in J} E_\alpha$ possède une densité égale à $\sum_{\alpha\in J} \delta_\alpha$.

Démonstration. Le résultat est trivial si J ou $I \setminus J$ est fini. Supposons donc J et $I \setminus J$ infinis.

Désignons par $E_\alpha(x)$ le nombre des éléments de E_α qui sont au plus égaux à x, et de même par $E(x)$ le nombre des éléments de E au plus égaux à x (x réel $\geqslant 1$).

Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver J_1 et J_2 finis, avec $J_1 \subset J$ et $J_2 \subset I \setminus J$, tels que

$$\sum_{\alpha\in J_1} \delta_\alpha \geqslant \sum_{\alpha\in J} \delta_\alpha - \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\in J_2} \delta_\alpha \geqslant \sum_{\alpha\in I\setminus J} \delta_\alpha - \varepsilon = 1 - \sum_{\alpha\in J} \delta_\alpha - \varepsilon.$$

On a

$$\bigcup_{\alpha\in J_1} E_\alpha \subset E \subset \bigcup_{\alpha\in I\setminus J_2} E_\alpha = N^* \setminus \bigcup_{\alpha\in J_2} E_\alpha,$$

d'où

$$\sum_{\alpha\in J_1} E_\alpha(x) \leqslant E(x) \leqslant [x] - \sum_{\alpha\in J_2} E_\alpha(x),$$

et il en résulte que

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x} \geqslant \sum_{\alpha\in J_1} \delta_\alpha \geqslant \sum_{\alpha\in J} \delta_\alpha - \varepsilon$$

et

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x} \leqslant 1 - \sum_{\alpha\in J_2} \delta_\alpha \leqslant \sum_{\alpha\in J} \delta_\alpha + \varepsilon.$$

3.4.2. Lemme 4. *Soit $\{u_n\}_{n\in N^*}$ une suite décroissante de nombres réels > 0 tendant vers zéro et telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.*

Quel que soit $S > 0$, on peut extraire de cette suite une suite partielle $\{u_{n_r}\}_{r\in N^*}$ telle que $\sum_{r=1}^{\infty} u_{n_r} = S$.

On voit qu'on peut obtenir une telle suite par récurrence en prenant n_1 égal au plus petit n pour lequel $u_n < S$, et, pour $r > 1$, n_r égal au plus petit $n > n_{r-1}$ pour lequel $u_n < S - \sum_{\nu=1}^{r-1} u_{n_\nu}$.

4. Démonstration du théorème 1.

4.1. Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème A qu'il suffit de démontrer la première partie du théorème.

En effet, supposons celle-ci démontrée.

L'ensemble des n tels que $k \nmid f(n)$ a pour densité $1 - \delta_{k,0}$. On a donc $\delta_{k,0} = 1$ si, et seulement si, il est de densité nulle. Le théorème A donne alors le résultat 2(a).

D'autre part, si $D > 1$, l'ensemble des n tels que $D \nmid f(n)$ est de densité nulle d'après le théorème A. Mais, si $l \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, D)$, la relation $f(n) \equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ entraîne que $D \nmid f(n)$. Ceci donne 2(b).

4.2. Nous allons maintenant démontrer la première partie du théorème dans le cas où $D = 1$, c'est-à-dire où, pour tout q premier divisant k,

$$\sum_{q|f(p)} 1/p < +\infty.$$

4.2.1. Soit $(k, l) = d$, $k = dk'$, $l = dl'$, de sorte que $(k', l') = 1$. On voit d'abord que la relation $f(n) \equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ est équivalente à

$$d | f(n) \quad \text{et} \quad f(n)/d \equiv l' (\mathrm{mod}\, k').$$

On en déduit que

$$\frac{1}{x} \# \{n \in N^* \colon n \leqslant x \text{ et } f(n) \equiv l (\mathrm{mod}\, k)\}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ d|f(n)}} \frac{1}{\varphi(k')} \sum_{\chi \bmod k'} \overline{\chi(l')}\, \chi\left(\frac{f(n)}{d}\right) = \frac{1}{\varphi(k')} \sum_{\chi \bmod k'} \overline{\chi(l')} \cdot \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ d|f(n)}} \chi\left(\frac{f(n)}{d}\right).$$

Donc, pour établir le résultat voulu, il suffit de montrer que, pour chaque caractère χ modulo k', l'expression

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ d|f(n)}} \chi\left(\frac{f(n)}{d}\right)$$

possède une limite quand x tend vers l'infini.

4.2.2. Nous allons transformer cette expression. Pour cela, introduisons les fonctions multiplicatives g et h déterminées par

$$g(p^r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (d, f(p^r)) > 1, \\ 0 & \text{si} \quad (d, f(p^r)) = 1, \end{cases}$$

et $h(p^r) = 1 - g(p^r)$ (pour tout p premier et tout $r \in N^*$). Soient

$$A = \{n \in N^*:\ g(n) = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{n \in N^*:\ h(n) = 1\}.$$

On voit que tout n s'écrit de façon unique sous la forme

$$n = ab, \quad \text{où} \quad a \in A, \quad b \in B, \quad \text{et} \quad (a, b) = 1.$$

On a $f(n) = f(a) f(b)$ et, comme $(f(b), d) = 1$, $d|f(n)$ si, et seulement si, $d|f(a)$.

Il résulte de là que l'on a

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ d|f(n)}} \chi\left(\frac{f(n)}{d}\right) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{a \leqslant x, a \in A \\ d|f(a)}} \left(\sum_{\substack{b \leqslant x/a, b \in B \\ (a,b)=1}} \chi\left(\frac{f(a) f(b)}{d}\right)\right)$$
$$= \sum_{\substack{a \leqslant x, a \in A \\ d|f(a)}} \chi\left(\frac{f(a)}{d}\right)\left(\frac{1}{x} \sum_{\substack{b \leqslant x/a, b \in B \\ (a,b)=1}} \chi(f(b))\right),$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ d|f(n)}} \chi\left(\frac{f(n)}{d}\right) = \sum_{\substack{a \in A \\ d|f(a)}} \frac{1}{a} \chi\left(\frac{f(a)}{d}\right) G(a, x),$$

où

$$G(a, x) = \frac{a}{x} \sum_{\substack{b \leqslant x/a, b \in B \\ (a,b)=1}} \chi(f(b)) \qquad (= 0 \quad \text{si} \quad a > x).$$

Nous devons montrer que cette expression possède une limite quand x tend vers l'infini.

Comme elle est nulle si $\{a \in A:\ d|f(a)\} = \emptyset$, il nous suffit de considérer le cas contraire.

4.2.3. Il est clair que, pour chaque $a \in A$ tel que $d|f(a)$,

$$\left|\frac{1}{a} \chi\left(\frac{f(a)}{d}\right) G(a, x)\right| \leqslant \frac{1}{a} \quad \text{quel que soit } x > 0.$$

On va voir que

$$\sum_{\substack{a \in A \\ d|f(a)}} 1/a < +\infty.$$

On voit d'abord que

$$\sum_{\substack{a \in A \\ d|f(a)}} 1/a \leqslant \sum_{a \in A} 1/a = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)/n.$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ r \in N^*}} g(p^r)/p^r < +\infty.$$

On a

$$\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ r > 1}} \frac{g(p^r)}{p^r} \leqslant \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ r > 1}} \frac{1}{p^r} = \sum \frac{1}{p(p-1)}.$$

D'autre part,

$$\sum g(p)/p = \sum_{(f(p), d) > 1} 1/p < +\infty.$$

En effet, $(f(p), d) > 1$ si, et seulement si, il existe un q premier divisant d tel que $q|f(p)$, et par suite

$$\sum_{(f(p), d) > 1} 1/p \leqslant \sum_{q|d} \Big(\sum_{q|f(p)} 1/p \Big).$$

Mais, pour chaque q divisant d, $\sum_{q|f(p)} 1/p < +\infty$ puisque $q|k$.

Finalement, on est ramené à démontrer que, pour chaque $a \in A$ tel que $d|f(a)$, $G(a, x)$ possède une limite quand x tend vers l'infini.

On voit que

$$G(a, x) = \frac{a}{x} \sum_{n \leqslant x/a} h(n) \chi_a(n) \chi(f(n)),$$

où χ_a est le caractère principal modulo a.

Il s'agit donc de montrer que la fonction $h\chi_a(\chi \circ f)$ possède une valeur moyenne.

Cela résulte du lemme 1, car cette fonction est multiplicative et ne prend pas d'autres valeurs que zéro et des racines $\varphi(k')$-ièmes de l'unité.

4.3. Pour achever la démonstration du théorème 1, il ne reste plus qu'à démontrer la première partie dans le cas où $D > 1$.

Comme on l'a déjà dit au § 4.1, le théorème A montre que l'ensemble des n tels que $D \nmid f(n)$ est de densité nulle et, si $l \not\equiv 0 \pmod D$, la relation $f(n) \equiv l \pmod k$ entraîne que $D \nmid f(n)$; il résulte de là que, si $l \not\equiv 0 \pmod D$, l'ensemble des n tels que $f(n) \equiv l \pmod k$ est de densité nulle.

Supposons maintenant que $l \equiv 0 \pmod D$.

On peut écrire $k = Dk_1$.

Comme $(D, k_1) = 1$, la relation $f(n) \equiv l(\bmod k)$ est équivalente à
$$f(n) \equiv 0(\bmod D) \quad \text{et} \quad f(n) \equiv l(\bmod k_1).$$

On a donc
$$\frac{1}{x}\#\{n\in N^*\colon\ n\leqslant x \text{ et } f(n)\equiv l(\bmod k)\}$$
$$= \frac{1}{x}\#\{n\in N^*\colon\ n\leqslant x \text{ et } f(n)\equiv l(\bmod k_1)\} -$$
$$-\frac{1}{x}\#\{n\in N^*\colon\ n\leqslant x, f(n)\equiv l(\bmod k_1) \text{ et } f(n)\not\equiv 0(\bmod D)\}.$$

Le dernier terme est au plus égal à
$$\frac{1}{x}\#\{n\in N^*\colon\ n\leqslant x \text{ et } f(n)\not\equiv 0(\bmod D)\},$$
et tend donc vers zéro d'après ce qu'on vient de rappeler. Celui qui le précède possède une limite car, d'après ce qui a été démontré plus haut, l'ensemble des n tels que $f(n)\equiv l(\bmod k_1)$ possède une densité puisque, pour tout q premier divisant k_1, $\sum_{q\mid f(p)} 1/p < +\infty$.

5. Démonstration du théorème 2. *Dans cette section, il est supposé que* $D = 1$. Nous désignons par σ l'application canonique de Z sur Z/kZ.

5.1. Pour tout caractère χ modulo k, la fonction multiplicative $\chi\circ f$ possède une valeur moyenne d'après le lemme 1.

On voit que, pour que $\delta_{k,l}$ ait la même valeur pour tous les l premiers avec k, il faut et il suffit que $M(\chi\circ f) = 0$ lorsque χ n'est pas le caractère principal. Cela résulte de ce que, comme on le voit immédiatement, on a pour tout caractère χ modulo k
$$M(\chi\circ f) = \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant k\\ (k,l)=1}} \chi(l)\,\delta_{k,l},$$
et on a pour tout l premier avec k
$$\delta_{k,l} = \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi \bmod k} \overline{\chi(l)}\, M(\chi\circ f).$$

Maintenant, il résulte du lemme 1 que $M(\chi\circ f)\neq 0$ si, et seulement si, on a
$$\sum_{\chi(f(p))\neq 1} 1/p < +\infty \quad \text{et} \quad \chi\big(f(2^r)\big)\neq -1 \quad \text{pour au moins un } r\in N^*.$$

Il est clair que $\sum_{\chi(f(p))\neq 1} 1/p < +\infty$ si, et seulement si, $\chi(m) = 1$ quand $\sigma(m)\in C$, ou, ce qui est équivalent, $\chi(m) = 1$ quand $\sigma(m)\in\Gamma$.

Il résulte immédiatement de là que, si $\Gamma = G_k$, on a $M(\chi\circ f) = 0$ pour tout caractère χ modulo k autre que le caractère principal.

Supposons maintenant $\Gamma\neq G_k$.

Soit ν l'indice de Γ comme sous-groupe de G_k, et soit ϱ l'application canonique de G_k sur G_k/Γ.

On obtient les caractères modulo k tels que $\chi(m) = 1$ quand $\sigma(m)\in\Gamma$ par la formule
$$\chi(n) = \begin{cases} \gamma\big(\varrho(\sigma(n))\big) & \text{si} \quad \sigma(n)\in G_k,\\ 0 & \text{si} \quad \sigma(n)\notin G_k,\end{cases} \tag{3}$$
où γ est un caractère du groupe G_k/Γ.

Ceci donne un caractère autre que le caractère principal si, et seulement si, γ n'est pas le caractère principal de G_k/Γ.

Si $\nu > 2$, on voit qu'il existe au moins un caractère modulo k autre que le caractère principal pour lequel $M(\chi\circ f)\neq 0$.

En effet, ou bien il existe un $r\in N^*$ tel que $\sigma\big(f(2^r)\big)\notin G_k$, et alors on a pour chacun des $\nu-1$ caractères non principaux donnés par la formule (3)
$$\sum_{\chi(f(p))\neq 1} 1/p < +\infty \quad \text{et} \quad \chi\big(f(2^r)\big) = 0 \quad \text{pour le } r \text{ en question,}$$
ou bien $\sigma\big(f(2^r)\big)\in G_k$ pour tout $r\in N^*$. Dans ce dernier cas, il existe un caractère γ_0 de G_k/Γ autre que le caractère principal et prenant une valeur $\neq -1$ sur l'élément $\varrho\big(\sigma(f(2))\big)$, car la somme des valeurs sur cet élément des caractères non principaux de G_k/Γ est -1. Pour le caractère modulo k donné par la formule (3) en prenant $\gamma = \gamma_0$, on a
$$\sum_{\chi(f(p))\neq 1} 1/p < +\infty \quad \text{et} \quad \chi\big(f(2)\big)\neq -1.$$

Si $\nu = 2$, le groupe G_k/Γ possède un seul caractère autre que le caractère principal et il y a donc un seul caractère modulo k autre que le caractère principal tel que $\sum_{\chi(f(p))\neq 1} 1/p < +\infty$, savoir le caractère donné par la formule
$$\chi(m) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma(m)\in\Gamma,\\ -1 & \text{si} \quad \sigma(m)\in G_k\setminus\Gamma,\\ 0 & \text{si} \quad \sigma(m)\notin G_k.\end{cases}$$

On voit que, pour ce caractère, on a $M(\chi\circ f) = 0$ si $\sigma\big(f(2^r)\big)\in G_k\setminus\Gamma$ pour tout $r\in N^*$, et $M(\chi\circ f)\neq 0$ si $\sigma\big(f(2^r)\big)\notin G_k\setminus\Gamma$ pour au moins un $r\in N^*$, car $\chi\big(f(2^r)\big) = -1$ si $\sigma\big(f(2^r)\big)\in G_k\setminus\Gamma$ et $= 0$ ou 1 dans le cas contraire.

On a ainsi démontré que la condition indiquée dans l'énoncé du théorème est bien nécessaire et suffisante pour que $\delta_{k,l}$ ait la même valeur pour tous les l premiers avec k.

5.2. Reste à démontrer que, si cette condition est satisfaite, pour chaque diviseur d de k, $\delta_{k,l}$ a la même valeur pour tous les l pour lesquels $(k, l) = d$. On le sait déjà pour $d = 1$. Reste le cas où $d > 1$.

En reprenant la démonstration du théorème 1 dans le cas où $D = 1$, on voit que, pour établir la propriété voulue, il suffit de montrer que, quel que soit $a \in A$ tel que $f(a) \equiv 0 \pmod d$, on a pour tout caractère χ modulo k' autre que le caractère principal $M(h\chi_a(\chi \circ f)) = 0$.

D'après le lemme 1, ceci a lieu si on a

$$\sum_{h(p)\chi_a(p)\chi(f(p)) \neq 1} 1/p = +\infty \tag{4}$$

ou

$$h(2^r)\chi_a(2^r)\chi(f(2^r)) = -1 \quad \text{pour tout } r \in N^*. \tag{5}$$

Comme $\chi_a(p) \neq 1$ pour un nombre fini de nombres premiers, la condition (4) est équivalente à la suivante, qui ne dépend plus de a:

$$\sum_{h(p)\chi(f(p)) \neq 1} 1/p = +\infty.$$

On peut encore transformer cette dernière condition.

En effet, à chaque caractère χ modulo k' correspond un caractère χ^* modulo k tel que

$$\chi^*(m) = \begin{cases} \chi(m) & \text{si} \quad (m, k) = 1, \\ 0 & \text{si} \quad (m, k) > 1, \end{cases}$$

et la définition de la fonction h montre que, pour tout p, on a $h(p)\chi(f(p)) = \chi^*(f(p))$. On obtient ainsi la condition

$$\sum_{\chi^*(f(p)) \neq 1} 1/p = +\infty. \tag{4'}$$

Si $\Gamma = G_k$, d'après ce qui a été vu plus haut, elle est toujours satisfaite si χ n'est pas le caractère principal modulo k', car alors χ^* n'est pas le caractère principal modulo k.

Supposons maintenant que Γ est un sous-groupe de G_k d'indice 2 et que, pour tout $r \in N^*$, $\sigma(f(2^r))$ appartient à $G_k \setminus \Gamma$.

Il résulte de ce qui a été vu plus haut que, χ étant un caractère modulo k' autre que le caractère principal, la condition (4') est satisfaite si χ^* n'est pas le caractère donné par la formule

$$\chi^*(m) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma(m) \in \Gamma, \\ -1 & \text{si} \quad \sigma(m) \in G_k \setminus \Gamma, \\ 0 & \text{si} \quad \sigma(m) \notin G_k. \end{cases}$$

On voit que, si χ^* est ce caractère, on a (5) quel que soit $a \in A$ tel que $f(a) \equiv 0 \pmod d$.

En effet, pour tout $r \in N^*$, $(f(2^r), k) = 1$ puisque $\sigma(f(2^r)) \in G_k$, donc

$$\chi^*(f(2^r)) = \chi(f(2^r)) \quad \text{et} \quad (f(2^r), d) = 1, \quad \text{d'où } h(2^r) = 1,$$

et par suite

$$h(2^r)\chi(f(2^r)) = \chi^*(f(2^r)) = -1.$$

D'autre part, d'après la définition de l'ensemble A, si $a \in A$, a est impair et par suite $\chi_a(2^r) = 1$.

6. Démonstration du théorème 3.

6.1. Faisons d'abord quelques remarques préliminaires.

6.1.1. *L'ensemble V_0 des n tels que $f(n) = 0$ possède une densité δ_0* d'après le corollaire 2, car la fonction caractéristique de son complémentaire est multiplicative.

6.1.2. Soient $q_1, \ldots, q_s$ des nombres premiers distincts, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ des entiers ≥ 0 $(s \geq 1)$.

On voit que *l'ensemble $V(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ des n tels que*

$$v_{q_i}(f(n)) = \alpha_i \quad \textit{pour} \quad 1 \leq i \leq s$$

possède une densité, soit $\Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.

En effet, soient $N = q_1^{\alpha_1} \ldots q_s^{\alpha_s}$ et $Q = q_1 \ldots q_s$.

n appartient à $V(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ si, et seulement si, $f(n)$ est congru modulo QN à un des nombres mN où $1 \leq m \leq Q$ et $(m, Q) = 1$.

Les ensembles $V(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ parcourt N^s étant disjoints, on a

$$\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s \geq 0} \Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) \leq 1.$$

6.1.3. Etant donné les nombres premiers distincts $q_1, \ldots, q_s$ et les nombres réels $u_1, \ldots, u_s$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ $(s \geq 1)$, définissons une fonction arithmétique $F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}$ par

$$F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}(n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{s} u_i^{v_{q_i}(f(n))} & \text{si} \quad f(n) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad f(n) = 0 \end{cases}$$

(étant entendu que $0^0 = 1$).

C'est une fonction multiplicative réelle dont les valeurs appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$. Elle possède donc une valeur moyenne d'après le corollaire 1.

Si les u_i sont < 1, on a

$$M(F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s \geq 0} \Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) u_1^{\alpha_1} \ldots u_s^{\alpha_s}. \tag{6}$$

En effet

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} F^{(q_1,\ldots,q_s)}_{u_1,\ldots,u_s}(n) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\geqslant 0}\Big(u_1^{\alpha_1}\ldots u_s^{\alpha_s}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ v_{q_i}(f(n))=\alpha_i, 1\leqslant i\leqslant s}} 1\Big).$$

Le terme général de cette somme est $\geqslant 0$ et $\leqslant u_1^{\alpha_1}\ldots u_s^{\alpha_s}$, et il tend, quand x tend vers $+\infty$, vers $\Delta(q_1,\ldots,q_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_s)u_1^{\alpha_1}\ldots u_s^{\alpha_s}$.

6.1.4. *Si aucun des q_i n'appartient à P, on a*

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\geqslant 0}\Delta(q_1,\ldots,q_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_s) = 1-\delta_0 \tag{7}$$

et, quel que soit $E\subset N^s$, l'ensemble $\mathfrak{B}(E)$ des n tels que

$$\big(V_{q_1}(f(n)),\ldots,V_{q_s}(f(n))\big)\in E$$

possède une densité égale à

$$\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\in E}\Delta(q_1,\ldots,q_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_s).$$

Pour établir (7) on remarque d'abord que l'on a $F^{(q_1,\ldots,q_s)}_{u_1,\ldots,u_s}(p)=1$ pour tout p tel que $(f(p),q_1\ldots q_s)=1$, et par suite

$$\sum\frac{1}{p}\big(1-F^{(q_1,\ldots,q_s)}_{u_1,\ldots,u_s}(p)\big)\leqslant\sum_{(f(p),q_1\ldots q_s)>1}\frac{1}{p}<+\infty.$$

Il en résulte, d'après le corollaire 1, que l'on a

$$M(F^{(q_1,\ldots,q_s)}_{u_1,\ldots,u_s}) = \prod\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p^r}F^{(q_1,\ldots,q_s)}_{u_1,\ldots,u_s}(p^r)\Big). \tag{8}$$

Le produit est uniformément convergent pour $(u_1,\ldots,u_s)\in[0,1]^s$ car chaque facteur appartient à l'intervalle $[1-w_p,1]$, où

$$w_p=\begin{cases}1/p^2 & \text{si}\quad (f(p),q_1\ldots q_s)=1,\\ 1/p & \text{si}\quad (f(p),q_1\ldots q_s)>1,\end{cases}$$

de sorte que $\sum w_p<+\infty$.

Chaque facteur étant une fonction continue de $u_1,\ldots,u_s$, on voit qu'il en est de même de $M(F^{(q_1,\ldots,q_s)}_{u_1,\ldots,u_s})$. Quant $(u_1,\ldots,u_s)$ tend vers le point $(1,\ldots,1)$, $M(F^{(q_1,\ldots,q_s)}_{u_1,\ldots,u_s})$ tend vers sa valeur en ce point, qui est égale à $1-\delta_0$ car c'est la densité de l'ensemble des n tels que $f(n)\neq 0$. Ainsi la formule (6) montre que l'on a (7).

On obtient maintenant le second résultat en appliquant le lemme 3.

En effet, $q_1,\ldots,q_s$ étant fixés, V_0 et les ensembles $V(q_1,\ldots,q_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ où $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\in N^s$ forment une famille dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux dont la réunion est N^*. Chacun possède une densité, et la somme des densités est égale à 1.

$\mathfrak{B}(E)$ est la réunion des ensembles $V(q_1,\ldots,q_s;\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ où $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\in E$.

6.1.5. Notons encore que, *si la propriété $P_2(k)$ est satisfaite, on a le résultat suivant:*

Si $k=mk'$, avec m et $k'\geqslant 1$ et $(m,k')=1$, l'ensemble des n tels que $(f(n),m)=1$ possède une densité égale à $\varphi(m)/m$.

En effet, comme $(f(n),k)=(f(n),k')\times(f(n),m)$, on a $(f(n),m)=1$ si, et seulement si, $(f(n),k)|k'$. L'ensemble des n tels que $(f(n),m)=1$ a donc une densité égale à $(1/k)\sum_{d|k'}\varphi(k/d)$.

Mais, si $d|k'$,

$$\varphi\Big(\frac{k}{d}\Big)=\varphi\Big(m\frac{k'}{d}\Big)=\varphi(m)\,\varphi\Big(\frac{k'}{d}\Big).$$

Donc

$$\sum_{d|k'}\varphi(k/d)=\varphi(m)\sum_{d|k'}\varphi(k'/d)=k'\varphi(m).$$

6.1.6. *Si la propriété $P_2(k)$ est satisfaite, on a aussi la propriété suivante:*

Si q est un nombre premier divisant k et $v_q(k)=\gamma>1$, pour $0\leqslant r<\gamma$, l'ensemble des n tels que $v_q(f(n))=r$ possède une densité égale à $\frac{1}{q^r}\Big(1-\frac{1}{q}\Big)$, autrement dit, avec les notations du paragraphe 6.1.2,

$$\Delta(q;r)=\frac{1}{q^r}\Big(1-\frac{1}{q}\Big).$$

En effet, soit $k=q^\gamma k'$. On voit que $v_q(f(n))=r$ si, et seulement si, $(f(n),k)$ est de la forme $q^r d$, où $d|k'$. On a donc

$$\Delta(q;r)=\frac{1}{k}\sum_{d|k'}\varphi\Big(\frac{k}{q^r d}\Big).$$

Mais, si $d|k'$,

$$\varphi\Big(\frac{k}{q^r d}\Big)=\varphi\Big(q^{\gamma-r}\frac{k'}{d}\Big)=\varphi(q^{\gamma-r})\,\varphi\Big(\frac{k'}{d}\Big).$$

Donc

$$\sum_{d|k'}\varphi\Big(\frac{k}{q^r d}\Big)=\varphi(q^{\gamma-r})\sum_{d|k'}\varphi\Big(\frac{k'}{d}\Big)=\varphi(q^{\gamma-r})k'=q^{\gamma-r}k'\Big(1-\frac{1}{q}\Big).$$

6.2. Nous allons maintenant établir la nécessité des conditions indiquées dans l'énoncé du théorème 3.

Supposons donc que f soit complètement multiplicative, ou fortement multiplicative, et qu'elle possède la propriété $P_2(k)$ pour un k donné.

6.2.1. On voit d'abord que, si $k = mk'$, avec m et $k' \geqslant 1$ et $(m, k') = 1$, on a

$$\sum_{(f(p),m)>1} \frac{1}{p} < +\infty \quad \text{et} \quad \prod_{(f(p),m)>1} \left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(m)}{m}.$$

En effet, d'après la remarque du paragraphe 6.1.5, si χ est le caractère principal modulo m, la fonction $\chi \circ f$ possède une valeur moyenne égale à $\varphi(m)/m$. Cette fonction est complètement multiplicative ou fortement multiplicative, comme la fonction f. Le corollaire 1 donne le résultat indiqué:

L'inégalité résulte de ce que

$$\frac{1-\chi(f(p))}{p} = \begin{cases} 1/p & \text{si} \quad (f(p), m) > 1, \\ 0 & \text{si} \quad (f(p), m) = 1. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$M(\chi\circ f) = \begin{cases} \prod\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\chi(f(p))}{p}\right)^{-1} \\ \qquad \text{si } f \text{ est complètement multiplicative,} \\ \prod\left(1+\frac{\chi(f(p))-1}{p}\right) \\ \qquad \text{si } f \text{ est fortement multiplicative.} \end{cases}$$

Dans les deux cas, le terme général du produit est égal à $1-1/p$ si $(f(p), m) > 1$ et à 1 si $(f(p), m) = 1$.

6.2.2. Si q est un nombre premier divisant k, on peut écrire $k = q^\alpha k'$, où $\alpha \in N^*$ et $q \nmid k'$. En appliquant ce qui précède à $m = q^\alpha$, on obtient

$$\sum_{q|f(p)} \frac{1}{p} < +\infty \quad \text{et} \quad \prod_{q|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right) = 1-\frac{1}{q}.$$

Si q_1 et q_2 sont deux nombres premiers distincts divisant k, on peut écrire $k = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} k'$, où α_1 et $\alpha_2 \in N^*$ et $(k', q_1 q_2) = 1$.

En prenant cette fois $m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$ et tenant compte de ce qu'on vient de voir, on trouve que

$$\prod_{q_1 \text{ou} q_2|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right) = \left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right) = \left(\prod_{q_1|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\left(\prod_{q_2|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right)\right),$$

d'où

$$\prod_{q_1 \text{et} q_2|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right) = 1.$$

Ceci implique qu'il n'y a aucun p tel que q_1 et q_2 divisent $f(p)$.

On voit ainsi que, pour chaque p premier, $f(p)$ ne peut être divisible par plus d'un nombre premier divisant k.

6.2.3. Soit maintenant q un nombre premier divisant k et tel que $v_q(k) > 1$, soit $= \gamma$.

Etant donné $u \in [0, 1]$ définissons la fonction arithmétique $\mathfrak{F}_u$ par

$$\mathfrak{F}_u(n) = \begin{cases} u^{v_q(f(n))} & \text{si} \quad f(n) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad f(n) = 0. \end{cases}$$

C'est un cas particulier de la fonction considérée au paragraphe 6.1.3 ($s = 1$, $q_1 = q$, $u_1 = u$).

Sa valeur moyenne est égale à

$$\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{F}_u(p^r)}{p^r}\right) > 0,$$

d'après le corollaire 1, car

$$\sum \frac{1-\mathfrak{F}_u(p)}{p} \leqslant \sum_{q|f(p)} \frac{1}{p} < +\infty,$$

et, d'après ce qui a été vu au paragraphe 6.1.3, on a pour $u < 1$

$$M(\mathfrak{F}_u) = \sum_{r=0}^{\infty} \Delta(q; r) u^r.$$

Il résulte alors de la remarque du paragraphe 6.1.6 que l'on a

$$M(\mathfrak{F}_u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{q^r}\left(1-\frac{1}{q}\right)u^r + O(u^\gamma),$$

d'où

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u) = \left(1-\frac{u}{q}\right)^{-1} + O(u^\gamma) \quad (u \to 0).$$

Par suite on a

$$\log\left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)\right\} = \log\left\{\left(1-\frac{u}{q}\right)^{-1}\right\} + O(u^\gamma) \quad (u \to 0). \tag{9}$$

Il nous faut maintenant distinguer le cas où f est complètement multiplicative et celui où f est fortement multiplicative.

(a) Si f est complètement multiplicative, il en est de même de $\mathfrak{F}_u$ et on a pour $u \in [0, 1]$

$$M(\mathfrak{F}_u) = \prod\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{F}_u(p)}{p}\right)^{-1} = \prod_{q|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\mathfrak{F}_u(p)}{p}\right)^{-1},$$

car $\mathfrak{F}_u(p) = 1$ si $q \nmid f(p)$.

Compte tenu de ce que $\prod_{q|f(p)}\left(1-\frac{1}{p}\right)=1-\frac{1}{q}$, ceci donne

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)=\prod_{q|f(p)}\left(1-\frac{\mathfrak{F}_u(p)}{p}\right)^{-1}=\prod_{\substack{f(p)\neq 0\\ q|f(p)}}\left(1-\frac{u^{v_q(f(p))}}{p}\right)^{-1},$$

d'où

$$\log\left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)\right\}=\sum_{\substack{f(p)\neq 0\\ q|f(p)}}\log\left\{\left(1-\frac{u^{v_q(f(p))}}{p}\right)^{-1}\right\}.$$

On a pour chaque p

$$\log\left\{\left(1-\frac{u^{v_q(f(p))}}{p}\right)^{-1}\right\}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u^{jv_q(f(p))}}{jp^j}.$$

Si l'ensemble des p tels que $f(p)\neq 0$ et $q|f(p)$ n'est pas vide, la famille $\left\{\frac{u^{jv_q(f(p))}}{jp^j}\right\}$, où j parcourt N^* et p parcourt cet ensemble, est sommable.

En effet, son terme général est $\leqslant 1/jp^j$; or on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1/jp^j \leqslant 2/p \quad \text{et} \quad \sum_{q|f(p)} 1/p<+\infty.$$

$\sum_{\substack{f(p)\neq 0\\ q|f(p)}}\log\left\{\left(1-\frac{u^{v_q(f(p))}}{p}\right)^{-1}\right\}$ est alors la somme de cette famille sommable. On peut calculer cette somme en groupant ensemble les termes pour lesquels le produit $jv_q(f(p))$ a une même valeur, soit r. On voit ainsi qu'elle est égale à

$$\sum_{r=1}^{\infty} u^r\left\{\sum_{ij=r}\left(\frac{1}{j}\sum_{q^i\|f(p)}\frac{1}{p^j}\right)\right\}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{u^r}{r}\left\{\sum_{ij=r}\left(i\sum_{q^i\|f(p)}\frac{1}{p^j}\right)\right\}.$$

On obtient ainsi

$$\log\left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)\right\}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{u^r}{r}\left\{\sum_{ij=r}\left(i\sum_{q^i\|f(p)}\frac{1}{p^j}\right)\right\}. \tag{10}$$

Ceci est encore vrai si l'ensemble des p tels que $f(p)\neq 0$ et $q|f(p)$ est vide, car alors les deux membres sont nuls.

En comparant (9) et (10), on voit que, pour $1\leqslant r<\gamma$,

$$\sum_{ij=r}\left(i\sum_{q^i\|f(p)}\frac{1}{p^j}\right)=\frac{1}{q^r}.$$

(b) Si f est fortement multiplicative, il en est de même de $\mathfrak{F}_u$ et on a

$$M(\mathfrak{F}_u)=\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{F}_u(p)}{p-1}\right)=\prod_{q|f(p)}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{F}_u(p)}{p-1}\right),$$

encore parce que $\mathfrak{F}_u(p)=1$ si $q\nmid f(p)$.

En tenant compte ici encore de ce que

$$\prod_{q|f(p)}\left(1-\frac{1}{p}\right)=1-\frac{1}{q},$$

on obtient

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)=\prod_{q|f(p)}\left(1+\frac{\mathfrak{F}_u(p)}{p-1}\right)=\prod_{\substack{f(p)\neq 0\\ q|f(p)}}\left(1+\frac{u^{v_q(f(p))}}{p-1}\right),$$

d'où

$$\log\left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)\right\}=\sum_{\substack{f(p)\neq 0\\ q|f(p)}}\log\left(1+\frac{u^{v_q(f(p))}}{p-1}\right).$$

Si $u<1$, et si $f(p)\neq 0$ et $q|f(p)$, on a

$$\log\left(1+\frac{u^{v_q(f(p))}}{p-1}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}u^{jv_q(f(p))}}{j(p-1)^j},$$

la série étant absolument convergente car $u^{v_q f(p)}/(p-1)\leqslant u$.

Si l'ensemble des p tels que $f(p)\neq 0$ et $q|f(p)$ n'est pas vide, pour $u<1$ la famille

$$\left\{\frac{(-1)^{j-1}u^{jv_q(f(p))}}{j(p-1)^j}\right\},$$

où j parcourt N^* et p parcourt cet ensemble, est sommable du fait que, pour chacun des p en question,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{j-1}u^{jv_q(f(p))}}{j(p-1)^j}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{u}{p-1}\right)^j=\frac{u}{p-1-u}\leqslant\frac{2u}{1-u}\cdot\frac{1}{p},$$

et que $\sum_{q|f(p)} 1/p<+\infty$.

$\sum_{\substack{f(p)\neq 0\\ q|f(p)}}\log\left(1+\frac{u^{v_q(f(p))}}{p-1}\right)$ est alors la somme de cette famille sommable.

Si on calcule cette somme en groupant ses termes comme on l'a fait pour la famille considérée en (a), on obtient

$$\sum_{\substack{f(p)\neq 0\\ q|f(p)}}\log\left(1+\frac{u^{v_q(f(p))}}{p-1}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{u^r}{r}\left\{\sum_{ij=r}\left((-1)^{j-1}i\sum_{q^i\|f(p)}\frac{1}{(p-1)^j}\right)\right\}.$$

Ceci vaut encore si l'ensemble des p tels que $f(p) \neq 0$ et $q | f(p)$ est vide, car alors les deux membres sont nuls.

On voit donc que, pour $0 \leqslant u < 1$, on a

$$(11)\qquad \log\left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)\right\} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^r}{r}\left\{\sum_{ij=r}\left((-1)^{j-1} i \sum_{q^i \| f(p)} \frac{1}{(p-1)^j}\right)\right\}.$$

En comparant avec (9), on voit que, pour $1 \leqslant r < \gamma$,

$$\sum_{ij=r}\left((-1)^{j-1} i \sum_{q^i \| f(p)} \frac{1}{(p-1)^j}\right) = \frac{1}{q^r}.$$

6.3. Il nous reste à démontrer que les conditions indiquées dans l'énoncé du théorème 3 sont suffisantes pour que f possède la propriété $P_2(k)$.

Supposons donc maintenant que f est complètement multiplicative ou fortement multiplicative et que les conditions indiquées sont satisfaites.

Notons que ces conditions impliquent qu'aucun nombre premier divisant k n'appartient à P.

6.3.1. Considérons d'abord le cas simple où k est une puissance d'un nombre premier, soit $k = q^\gamma$.

Un diviseur d de k s'écrit $d = q^\beta$, où $0 \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

On a $(f(n), k) = q^\beta$ avec $0 \leqslant \beta < \gamma$ si, et seulement si, $v_q(f(n)) = \beta$, et on a $(f(n), k) = q^\gamma = k$ si, et seulement si, $v_q(f(n)) \geqslant \gamma$ (éventuellement $= +\infty$).

Ainsi, avec les notations des paragraphes 6.1.1 et 6.1.2, si $d = q^\beta$, avec $\beta < \gamma$, l'ensemble des n tels que $(f(n), k) = d$ est l'ensemble $V(q; \beta)$, et possède donc la densité $\Delta(q; \beta)$; si $d = k = q^\gamma$, cet ensemble est la réunion de V_0 et des ensembles $V(q; r)$ où $r \geqslant \gamma$, et possède donc la densité $\delta_0 + \sum_{r=\gamma}^{\infty} \Delta(q; r)$ puisque, comme $q \notin P$, l'ensemble réunion des $V(q; r)$ où $r \geqslant \gamma$ possède, d'après la remarque du paragraphe 6.1.4, la densité $\sum_{r=\gamma}^{\infty} \Delta(q; r)$.

On voit ainsi que, pour montrer que f possède la propriété $P_2(k)$, il suffit de montrer que l'on a

$$(12)\qquad \Delta(q; r) = \frac{1}{q^r}\left(1-\frac{1}{q}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant r < \gamma$$

et

$$(13)\qquad \delta_0 + \sum_{r=\gamma}^{\infty} \Delta(q; r) = 1/q^\gamma.$$

En effet, si $d = q^\beta$, avec $0 \leqslant \beta < \gamma$, on a

$$\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{1}{q^\gamma}\varphi(q^{\gamma-\beta}) = \frac{1}{q^\beta}\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

et, si $d = k$, on a

$$\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{1}{k} = \frac{1}{q^\gamma}.$$

En fait, il suffit de montrer que l'on a (12). En effet, d'après la remarque du paragraphe 6.1.4, $\sum_{r=0}^{\infty} \Delta(q; r) = 1 - \delta_0$. Donc, si on a (12), on a

$$\sum_{r=\gamma}^{\infty} \Delta(q; r) = 1 - \delta_0 - \sum_{r=0}^{\gamma-1} \frac{1}{q^r}\left(1-\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q^\gamma} - \delta_0.$$

$\mathfrak{F}_u$ étant la fonction définie au paragraphe 6.2.3 (c'est-à-dire $F_u^{(q)}$ avec les notations du paragraphe 6.1.3) on sait que l'on a pour $u < 1$

$$(14)\qquad M(\mathfrak{F}_u) = \sum_{r=0}^{\infty} \Delta(q; r) u^r.$$

$M(\mathfrak{F}_u)$ est d'ailleurs > 0 et les calculs faits au paragraphe 6.2.3, basés uniquement sur le fait que

$$\sum_{q | f(p)} \frac{1}{p} < +\infty \quad \text{et} \quad \prod_{q | f(p)}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1-\frac{1}{q},$$

montrent que l'on a (10) si f est complètement multiplicative, et (11) si f est fortement multiplicative.

On en déduit que

$$\log\left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1} M(\mathfrak{F}_u)\right\} = \log\left\{\left(1-\frac{u}{q}\right)^{-1}\right\} + O(u^\gamma),$$

d'où

$$M(\mathfrak{F}_u) = \left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{u}{q}\right)^{-1} + O(u^\gamma) \quad (u \to 0),$$

ce qui montre bien, par comparaison avec (14), que

$$\Delta(q; r) = \frac{1}{q^r}\left(1-\frac{1}{q}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant r < \gamma.$$

6.3.2. Passons maintenant au cas où k a plus d'un diviseur premier. Soit $k = q_1^{\gamma_1} \ldots q_s^{\gamma_s}$, où $q_1, \ldots, q_s$ sont des nombres premiers distincts et $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ des entiers > 0, avec $s > 1$.

Notons qu'ici $f(n) \neq 0$ pour tout n car $f(p) \neq 0$ pour tout p du fait que $f(p)$ est divisible par au plus un nombre premier divisant k. Autrement dit, V_0 est vide et $\delta_0 = 0$.

Un diviseur d de k s'écrit

$$d = q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s}, \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \beta_i \leqslant \gamma_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Pour que $(f(n), k) = d$, il faut et il suffit que l'on ait

$$v_{q_i}(f(n)) = \beta_i \quad \text{si} \quad \beta_i < \gamma_i \quad \text{et} \quad v_{q_i}(f(n)) \geqslant \gamma_i \quad \text{si} \quad \beta_i = \gamma_i.$$

Autrement dit, si E est l'ensemble des $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in N^s$ qui satisfont à $\alpha_i = \beta_i$ pour $\beta_i < \gamma_i$ et $\alpha_i \geqslant \gamma_i$ pour $\beta_i = \gamma_i$, l'ensemble des n tels que $(f(n), k) = d$ est la réunion des ensembles $V(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in E$. Donc, d'après la remarque du paragraphe 6.1.4, il possède la densité

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in E} \Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

Pour montrer que f possède la propriété $P_2(k)$, il faut donc montrer que l'on a, quel que soit d,

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in E} \Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{k}{d}\right). \tag{15}$$

Si f est complètement multiplicative, il en est de même de $F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}$ et on a

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^r} F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}(p^r) = \left(1 - \frac{1}{p} F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}(p)\right)^{-1}.$$

De même, si f est fortement multiplicative, $F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}$ l'est aussi et on a

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^r} F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}(p^r) = 1 + \frac{1}{p-1} F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}(p).$$

On sait que, pour chaque p, $f(p)$ est divisible par au plus un des q_i. Si $q_\nu | f(p)$ et $q_i \nmid f(p)$ pour $i \neq \nu$, on a

$$F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}(p) = F_{u_\nu}^{(q_\nu)}(p) \quad \text{et} \quad F_{u_i}^{(q_i)}(p) = 1 \quad \text{pour} \quad i \neq \nu.$$

Si aucun des q_i ne divise $f(p)$, on a

$$F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}(p) = 1 \quad \text{et} \quad F_{u_i}^{(q_i)}(p) = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, s.$$

D'après cela, que f soit complètement multiplicative ou fortement multiplicative, la formule (8), appliquée à la fonction $F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}$ et à chacune des fonctions $F_{u_\nu}^{(q_\nu)}$, montre que l'on a

$$M(F_{u_1, \ldots, u_s}^{(q_1, \ldots, q_s)}) = \prod_{\nu=1}^{s} M(F_{u_\nu}^{(q_\nu)}).$$

On a donc, pour $u_1, \ldots, u_s < 1$, par application de (6),

$$\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s \geqslant 0} \Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) u_1^{\alpha_1} \ldots u_s^{\alpha_s} = \prod_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{\alpha_\nu=0}^{\infty} \Delta(q; \alpha_\nu) u_\nu^{\alpha_\nu}\right),$$

et il en résulte que

$$\Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \prod_{\nu=1}^{s} \Delta(q_\nu; \alpha_\nu).$$

On déduit de là que, E étant l'ensemble indiqué plus haut, on a

$$\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in E} \Delta(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \prod_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{\alpha_\nu \in E_\nu} \Delta(q_\nu; \alpha_\nu)\right),$$

où

$$E_\nu = \begin{cases} \{\beta_\nu\} & \text{si} \quad \beta_\nu < \gamma_\nu, \\ \{\alpha_\nu\colon \alpha_\nu \geqslant \gamma_\nu\} & \text{si} \quad \beta_\nu = \gamma_\nu. \end{cases}$$

Comme par ailleurs,

$$\frac{1}{k} \varphi\left(\frac{k}{d}\right) = \prod_{\nu=1}^{s} \frac{1}{q_\nu^{\gamma_\nu}} \varphi(q_\nu^{\gamma_\nu - \beta_\nu}),$$

on voit que, pour établir que l'on a (15), il suffit de montrer que, pour chaque ν,

$$\sum_{\alpha_\nu \in E_\nu} \Delta(q_\nu; \alpha_\nu) = \frac{1}{q_\nu^{\gamma_\nu}} \varphi(q_\nu^{\gamma_\nu - \beta_\nu}),$$

c'est-à-dire que

$$\Delta(q_\nu; \alpha_\nu) = \frac{1}{q_\nu^{\beta_\nu}}\left(1 - \frac{1}{q_\nu}\right) \quad \text{si} \quad \beta_\nu < \gamma_\nu,$$

et

$$\sum_{r=\gamma_\nu}^{\infty} \Delta(q_\nu; r) = \frac{1}{q_\nu^{\gamma_\nu}} \quad \text{si} \quad \beta_\nu = \gamma_\nu.$$

Pour cela, on remarque que la démonstration de (12) et (13) au paragraphe 6.3.1 peut s'appliquer à $k = q_\nu^{\gamma_\nu}$.

7. Discussion du problème de Narkiewicz.

7.1. Il est clair, d'après le théorème 3, que les conditions indiquées dans l'énoncé du théorème 4 sont nécessaires pour que, f étant supposée complètement multiplicative ou fortement multiplicative, et $\geqslant 0$, elle possède la propriété $P_2(k)$ pour tout k. En particulier, elles sont nécessaires pour que f soit distribuée uniformément modulo k pour tout $k \geqslant 2$.

Pour établir le théorème 4, il reste à montrer qu'elles sont suffisantes.

Supposons donc que f soit complètement multiplicative, ou fortement multiplicative, et que les conditions indiquées correspondantes (qui impliquent évidemment que $f(n) > 0$ pour tout n) soient satisfaites.

On va montrer que, quel que soit k entier > 1, f possède les propriétés $P_1(k)$ et $P_2(k)$.

7.1.1. On voit d'abord que l'ensemble P est vide, c'est-à-dire que, quel que soit q premier, $\sum_{q|f(p)} 1/p < +\infty$.

En effet, on a

$$\sum_{q|f(p)} \frac{1}{p} = \sum_{r=1}^{\infty} \Big(\sum_{f(p)=q^r} \frac{1}{p} \Big).$$

Dans le cas où f est supposée complètement multiplicative, en observant que la somme au premier membre de (2) est au moins égale au terme correspondant à $i = r$ et $j = 1$, on voit que

$$\sum_{f(p)=q^r} 1/p \leqslant 1/rq^r.$$

Donc

$$\sum_{q|f(p)} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rq^r} = \log\Big(\Big(1-\frac{1}{q}\Big)^{-1} \Big).$$

Dans le cas où f est supposée fortement multiplicative, la relation (2') donne

$$r \sum_{f(p)=q^r} \frac{1}{p-1} = \frac{1}{q^r} + \sum_{\substack{ij=r \\ j>1}} \Big((-1)^j i \sum_{f(p)=q^i} \frac{1}{(p-1)^j} \Big),$$

d'où

$$\sum_{f(p)=q^r} \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{rq^r} + \sum_{\substack{ij=r \\ j>1}} \Big(\sum_{f(p)=q^i} \frac{1}{(p-1)^j} \Big) = \frac{1}{rq^r} + \sum_{\substack{jv_q(f(p))=r \\ j>1}} \frac{1}{(p-1)^j}.$$

Par suite, quel que soit $N \geqslant 2$, on a

$$\sum_{r=1}^{N} \Big(\sum_{f(p)=q^r} \frac{1}{p} \Big) \leqslant \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{rq^r} + \sum_{\substack{jv_q(f(p)) \leqslant N \\ j>1}} \frac{1}{(p-1)^j}.$$

Mais

$$\sum_{\substack{jv_q(f(p)) \leqslant N \\ j>1}} \frac{1}{(p-1)^j} \leqslant 1 + \sum_{\substack{jv_q(f(p)) \leqslant N \\ j>1, p>2}} \frac{1}{(p-1)^j}$$

$$\leqslant 1 + \sum_{p>2, j>1} \frac{1}{(p-1)^j} = 1 + \sum_{p>2} \frac{1}{(p-1)(p-2)}.$$

Donc on a pour tout $N \geqslant 2$

$$\sum_{r=1}^{N} \Big(\sum_{f(p)=q^r} \frac{1}{p} \Big) \leqslant \log\Big(\Big(1-\frac{1}{q}\Big)^{-1} \Big) + 1 + \sum_{p>2} \frac{1}{(p-1)(p-2)} = M,$$

et par suite on a $\sum_{q|f(p)} 1/p \leqslant M$.

Du fait que P est vide, quel que soit k on a $D = 1$.

Maintenant, si f est supposée complètement multiplicative, la relation (2) donne pour $r = 1$

$$\sum_{f(p)=q} 1/p = 1/q,$$

et, si f est supposée fortement multiplicative, la relation (2') donne $\sum_{f(p)=q} 1/(p-1) = 1/q$, d'où $\sum_{f(p)=q} 1/p \geqslant 1/2q$ puisque $1/p \geqslant 1/2(p-1)$.

Dans les deux cas, quel que soit l premier avec k, on a

$$\sum_{f(p) \equiv l \pmod k} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{q \equiv l \pmod k} \Big(\sum_{f(p)=q} \frac{1}{p} \Big) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{q \equiv l \pmod k} \frac{1}{q} = +\infty.$$

Autrement dit, $C = G_k$ et par suite $\Gamma = G_k$.

Ainsi le théorème 2 montre que, quel que soit k, f possède la propriété $P_1(k)$.

7.1.2. Pour montrer que la fonction f possède la propriété $P_2(k)$ pour tout k, il suffit de montrer que, pour tout q premier,

$$\prod_{q|f(p)} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) = 1-\frac{1}{q},$$

car, avec cette relation, les conditions indiquées dans l'énoncé du théorème 3 sont satisfaites pour tout k.

Dans le cas où f est supposée complètement multiplicative, on remarque que, compte tenu de ce que, pour chaque p, $f(p)$ est égal à une puissance d'un nombre premier ou à 1, le raisonnement fait en (a) du paragraphe 6.2.3 montre que l'on a pour $0 \leqslant u \leqslant 1$

$$\sum_{q|f(p)} \log\Big\{ \Big(1-\frac{u^{v_q(f(p))}}{p}\Big)^{-1} \Big\} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^r}{r} \Big(\sum_{ij=r} \Big(i \sum_{f(p)=q^i} \frac{1}{p^j} \Big) \Big)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^r}{rq^r} = \log\Big\{ \Big(1-\frac{u}{q}\Big)^{-1} \Big\} \quad \text{d'après (2).}$$

En prenant $u = 1$, on trouve

$$\sum_{q|f(p)} \log\Big\{ \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1} \Big\} = \log\Big\{ \Big(1-\frac{1}{q}\Big)^{-1} \Big\},$$

d'où le résultat voulu.

Dans le cas où f est supposée fortement multiplicative, on voit que le raisonnement fait en (b) du paragraphe 6.2.3 montre que l'on a pour $0 \leqslant u \leqslant 1$

$$\sum_{q|f(p)} \log\left(1+\frac{u^{v_q(f(p))}}{p-1}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{u^r}{r}\left(\sum_{ij=r}\left((-1)^{j-1}\, i \sum_{f(p)=q^i}\frac{1}{(p-1)^j}\right)\right)$$

$$\equiv \sum_{r=1}^{\infty}\frac{u^r}{rq^r} = \log\left\{\left(1-\frac{u}{q}\right)^{-1}\right\} \qquad \text{d'après } (2').$$

Si la somme au premier membre a une infinité de termes, c'est une série uniformément convergente pour $u \in [0, 1]$ car son terme général est $\geqslant 0$ et $\leqslant 2/p$ et on a $\sum_{q|f(p)} 1/p < +\infty$.

En passant à la limite pour u tendant vers 1, on obtient encore

$$\sum_{q|f(p)} \log\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right\} = \log\left\{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-1}\right\}.$$

7.2. Passons maintenant à la démonstration du théorème 5.

Nous ne la donnerons en détail que pour le cas où on veut que f soit complètement multiplicative. Nous indiquerons ensuite brièvement quelles modifications il faut apporter au raisonnement pour traiter le cas où on veut que f soit fortement multiplicative.

7.2.1. Pour obtenir f complètement multiplicative à valeurs $\geqslant 0$ satisfaisant aux conditions du théorème 4 et à $f(p) = 1$ pour $p \in E$, on procèdera de la façon suivante:

On définira une famille $\{E_{q,i}\}$ d'ensembles de nombres premiers, où q parcourt l'ensemble des nombres premiers et i parcourt N^*, ayant les propriétés suivantes:

1. Les ensembles $E_{q,i}$ ne rencontrent pas E et sont disjoints deux à deux;
2. Pour chaque q premier et chaque $r \in N^*$ on a

$$\sum_{ij=r}\left(i \sum_{p \in E_{q,i}} \frac{1}{p^j}\right) = \frac{1}{q^r}. \tag{16}$$

On déterminera f par

$$f(p) = \begin{cases} q^i & \text{si} \quad p \in E_{q,i}, \\ 1 & \text{si} \quad p \text{ n'appartient à aucun } E_{q,i}. \end{cases} \tag{17}$$

7.2.2. Faisons d'abord la remarque suivante:

Soit A un ensemble de nombres premiers tel que $\sum_{p \notin A} 1/p = +\infty$, et soit q un nombre premier.

On peut déterminer une suite $E_{q,1}, E_{q,2}, \ldots, E_{q,i}, \ldots$ d'ensembles de nombres premiers ne rencontrant pas A et disjoints deux à deux, telle que l'égalité (16) soit satisfaite pour tout $r \in N^*$, que tous les éléments de $E_{q,i}$ soient $\geqslant 2q^i$, et que l'on ait pour chaque i

$$i \sum_{p \in E_{q,i}} 1/p \leqslant 1/q^i. \tag{18}$$

Cette suite sera déterminée par récurrence.

Pour $r = 1$, la relation (16) se réduit à

$$\sum_{p \in E_{q,1}} 1/p = 1/q, \tag{19}$$

et, pour $r > 1$, on peut l'écrire sous la forme

$$r \sum_{p \in E_{q,r}} \frac{1}{p} = \frac{1}{q^r} - \sum_{\substack{ij=r \\ j>1}}\left(i \sum_{p \in E_{q,i}} \frac{1}{p^j}\right). \tag{20}$$

Le lemme 4 montre que l'on peut déterminer $E_{q,1}$ disjoint de A, satisfaisant à (19), et par le fait même à (18) où $i = 1$, et dont tous les éléments sont $\geqslant 2q$.

Il suffit de prendre pour $\{u_n\}$ la suite des inverses des nombres premiers $\geqslant 2q$ et n'appartenant pas à A.

Maintenant, soit $r > 1$ et supposons que l'on a déjà déterminé $E_{q,1}, \ldots, E_{q,r-1}$ ne rencontrant pas A et disjoints deux à deux, de manière que l'on ait

$$\sum_{ij=s}\left(i \sum_{p \in E_{q,i}} \frac{1}{p^j}\right) = \frac{1}{q^s} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant s \leqslant r-1$$

et (18) pour $1 \leqslant i \leqslant r-1$, les éléments de chaque $E_{q,i}$ étant tous $\geqslant 2q^i$.

Pour $i \leqslant r-1$ et $j > 1$, on a pour chaque $p \in E_{q,i}$

$$\frac{1}{p^j} = \frac{1}{p^{j-1}} \cdot \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{(2q^i)^{j-1}} \cdot \frac{1}{p},$$

et il en résulte que, si $ij = r$ et $j > 1$,

$$i \sum_{p \in E_{q,i}} \frac{1}{p^j} \leqslant \frac{1}{2^{j-1} q^{r-i}} \cdot i \sum_{p \in E_{q,i}} \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2^{j-1} q^r}.$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{ij=r \\ j>1}}\left(i \sum_{p \in E_{q,i}} \frac{1}{p^j}\right) \leqslant \sum_{1 < j \leqslant r} \frac{1}{2^{j-1} q^r} < \frac{1}{q^r}.$$

Le second membre de (20) est donc > 0.

Alors on voit qu'on peut déterminer $E_{q,r}$ ne rencontrant pas A ni les $E_{q,i}$ où $i \leqslant r-1$, formé de nombres premiers $\geqslant 2q^r$ et tel que l'on ait (20) et donc (16).

Pour cela on applique le lemme 4 en prenant pour $\{u_n\}$ la suite des inverses des nombres premiers $\geqslant 2q^r$ et n'appartenant pas à A ni à $\bigcup_{i=1}^{r-1} E_{q,i}$, et pour S le quotient par r du second membre de (20).

(20) implique évidemment que l'on a (18) pour $i = r$.

7.2.3. La famille $\{E_{q,i}\}$ mentionnée plus haut, où q parcourt l'ensemble des nombres premiers et i parcourt N^*, s'obtient de la façon suivante:

On détermine la suite $\{E_{2,i}\}_{i\in N^*}$ en appliquant ce qui précède à $q = 2$ et $A = E$.

On détermine la suite $\{E_{3,i}\}_{i\in N^*}$ en appliquant ce qui précède à $q = 3$ et $A = E \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{2,i})$, puis la suite $\{E_{5,i}\}_{i\in N^*}$ en prenant $q = 5$ et

$$A = E \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{2,i}) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{3,i}),$$

et ainsi de suite...

7.2.4. Le théorème 5 est ainsi démontré pour le cas où on veut que f soit complètement multiplicative.

Pour le cas où on veut que f soit fortement multiplicative, on procède de façon semblable en définissant encore une famille $\{E_{q,i}\}$ d'ensembles de nombres premiers ne rencontrant pas E et disjoints deux à deux, telle que l'on ait cette fois pour chaque $r \in N^*$

$$\sum_{ij=r} \left((-1)^{j-1} i \sum_{p\in E_{q,i}} \frac{1}{(p-1)^j}\right) = \frac{1}{q^r}. \tag{16'}$$

Pour la construction de cette famille, on peut imposer cette fois que tous les éléments de $E_{q,i}$ soient $\geqslant 3q^i+1$, et remplacer l'inégalité (18) par

$$i \sum_{p\in E_{q,i}} \frac{1}{p-1} \leqslant \frac{2}{q^i}.$$

7.3. Le théorème 6 se démontre très simplement, indépendamment de tout ce qui précède. Supposons donc que f est complètement multiplicative et satisfait à $f(n) > 1$ pour tout $n > 1$, et que, pour tout $k \geqslant 2$, l'ensemble des n pour lesquels $f(n) \equiv 0 \pmod{k}$ a la densité $1/k$.

On voit d'abord que, *pour tout* $m > 1$, $f(m) \leqslant m$.

En effet, comme, pour tout $r \in N^*$, $f(mr) = f(m)f(r)$, l'ensemble des n qui sont multiples de m est contenu dans l'ensemble des n pour lesquels $f(n) \equiv 0(\mathrm{mod}\, f(m))$. Le premier de ces ensembles à la densité $1/m$, le second la densité $1/f(m)$. Donc $1/m \leqslant 1/f(m)$.

D'autre part, q étant un nombre premier quelconque, on voit que, *si* $f(q) = q$, *pour tout* $p \neq q$, $q \nmid f(p)$.

En effet, si χ est le caractère principal modulo q, la fonction complètement multiplicative $\chi \circ f$ a une valeur moyenne égale à $1-1/q$ car l'ensemble des n tels que $\chi(f(n)) = 1$ est le complémentaire de l'ensemble des n tels que $f(n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$. D'après le corollaire 1,

$$M(\chi\circ f) = \prod \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\chi(f(p))}{p}\right)^{-1} = \prod_{q|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right)$$

puisque $\chi(f(p)) = 1$ si $q \nmid f(p)$ et $= 0$ si $q | f(p)$.

On a donc

$$\prod_{q|f(p)} \left(1-\frac{1}{p}\right) = 1-\frac{1}{q}.$$

Si $f(q) = q$, ceci donne

$$\left(1-\frac{1}{q}\right) \prod_{\substack{q|f(p)\\ p\neq q}} \left(1-\frac{1}{p}\right) = 1-\frac{1}{q}, \quad \text{d'où} \quad \prod_{\substack{q|f(p)\\ p\neq q}} \left(1-\frac{1}{p}\right) = 1,$$

ce qui implique que l'ensemble des $p \neq q$ tels que $q | f(p)$ est vide.

Ceci dit, on voit d'abord que $f(2) = 2$ puisqu'on doit avoir $f(2) > 1$ et $f(2) \leqslant 2$.

Maintenant, q étant un nombre premier > 2, supposons établi que $f(p) = p$ pour tout $p < q$.

On a par hypothèse $f(q) > 1$. Mais, d'après ce qu'on vient de voir, $f(q) \leqslant q$ et $f(q)$ n'est divisible par aucun $p < q$. Donc $f(q) = q$.

On voit ainsi que $f(q) = q$ pour tout q premier, d'où il résulte que $f(n) = n$ pour tout n.

Bibliographie

[1] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 78 (1961), p. 273–304.

[2] — *On integral-valued additive functions*, J. Number Theory 1 (1969), p. 419–430.

[3] — *Sur les fonctions multiplicatives à valeurs entières*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 283 (1976), p. 1065–1067.

[4] — *Sur les fonctions multiplicatives à valeurs entières*, ibid. 284 (1977), p. 1325–1327.

[5] — *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives de module* $\leqslant 1$, Acta Arith. 42 (1983), p. 121–151.

[6] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 19 (1968), p. 365–403.

[7] W. Narkiewicz, *Some problems and remarks on arithmetical functions*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 13 (Topics in Number Theory, Debrecen 1974), p. 205–208.

[8] S. S. Pillai, *Generalization of a theorem of Mangoldt*, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A, 11 (1940), p. 13–20.

[9] I. Z. Ruzsa, *Semigroup-valued multiplicative functions*, Acta Arith. 42 (1982), p. 79–90.

[10] E. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967), p. 411–467.

Reçu le 3. 12. 1984 (1475)