ACTA ARITHMETICA
XLVI (1986)

Zur Anzahl quadratvoller Zahlen in kurzen Intervallen

von

PETER GEORG SCHMIDT (Marburg)

1. Einleitung. Eine natürliche Zahl q heiße *quadratvoll*, wenn jeder Primteiler p von q mindestens zweimal in q aufgeht: $p|q \Rightarrow p^2|q$. Für $x \geqslant 1$ sei $Q(x)$ die Anzahl der quadratvollen Zahlen kleiner oder gleich x.

Bateman und Grosswald [1] zeigten

$$Q(x) = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} x^{1/2} + \frac{\zeta(2/3)}{\zeta(2)} x^{1/3} + o(x^{1/6}) \quad (x \to \infty).$$

Setzt man $h := x^{1/2+\theta}$, so folgt unter der Voraussetzung $1/6 \leqslant \theta < 1/2$

$$\sum_{\substack{x<q\leqslant x+h\\ p|q\Rightarrow p^2|q}} 1 = Q(x+h) - Q(x) \sim \frac{\zeta(3/2)}{2\zeta(3)} x^{\theta} \quad (x \to \infty). \tag{1.1}$$

Für $\theta \leqslant 0$ ist (1.1) offensichtlich falsch. Es erhebt sich die Frage, ob θ mit $0 < \theta < 1/6$ existiern, für die (1.1) richtig ist.

P. Shiu [8] konnte den Gültigkeitsbereich von (1.1) auf $0.1526 \leqslant \theta < 1/2$ ausdehnen. Das Kernstück seiner Arbeit ist die Abschätzung einer zweidimensionalen Exponentialsumme.

Ich werde (1.1) *ohne Abschätzungen mehrdimensionaler Exponentialsummen* für

$$68/451 < \theta < 1/2 \quad (68/451 = 0.1507\ldots)$$

beweisen. Genauer zeige ich folgenden

HAUPTSATZ. *Sind* $x,\ h \in \boldsymbol{R}$; $x \geqslant 1,\ 1 \leqslant h \leqslant x^{2/3}$, *so gilt*

$$Q(x+h) - Q(x) = \frac{\zeta(3/2)}{2\zeta(3)} \frac{h}{\sqrt{x}} + O(x^{68/451}).$$

Der Beweis des Hauptsatzes wird in § 4 geführt. Er stützt sich auf zwei Gitterpunktsätze, die in § 3 formuliert und bewiesen werden.

2. Vereinbarungen. Für $x,\ y,\ t\in \boldsymbol{R};\ x\geqslant 1,\ 0<t<x^{1/6}$ sei[1]

$$Q(x) := \#\{q\in N|\ q\leqslant x;\ p\,\mathrm{prim},\ p|q\Rightarrow p^2|q\},$$
$$D(x) := \#\{(m,n)\in N^2|\ m^2n^3\leqslant x\},$$
$$\Delta(x) := D(x)-\zeta(\tfrac{3}{2})x^{1/2}-\zeta(\tfrac{2}{3})x^{1/3},$$
$$\psi(y) := y-[y]-\tfrac{1}{2},$$
$$T(x,t) := \#\{(m,n,k)\in N^3|\ m^2n^3k^6\leqslant x;\ k>t\}.$$

3. Zwei Gitterpunktsätze.

Satz 1. *Für* $x\in\boldsymbol{R},\ x\geqslant 1$ *gilt*

$$D(x)=\zeta(\tfrac{3}{2})x^{1/2}+\zeta(\tfrac{2}{3})x^{1/3}+O(x^{27/205}).$$

Satz 1 ist eine unmittelbare Konsequenz der beiden folgenden Hilfssätze, die auf H. E. Richert zurückgehen.

Hilfssatz 1 (vgl. [6], Lemma 3). *Ist* $x\in\boldsymbol{R},\ x\geqslant 1$, *so gilt*

$$\Delta(x)=-\sum_{n\leqslant x^{1/5}}\left\{\psi\left(\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right)+\psi\left(\sqrt[3]{\frac{x}{n^2}}\right)\right\}+O(1).$$

Hilfssatz 2 (vgl. [6], Lemma 8). *Ist* β *eine positive reelle Konstante,* $(\varkappa,\lambda) := (\frac{75}{212},\frac{114}{212})$ *und* $\lambda>\beta\varkappa$, *so gilt für* $y\in\boldsymbol{R},\ y\geqslant 1$

$$\sum_{n\leqslant y}\psi\left(\frac{y^{1+\beta}}{n^\beta}\right)\ll y^{(\varkappa+\lambda)/(\varkappa+1)}=y^{27/41}.$$

Bemerkung. $(\varkappa,\lambda)$ ist ein van der Corput–Philippssches "Exponentenpaar" (vgl. die Definitionen in [2], [4] und [5]). In der Notation von Rankin [5] ist $(\frac{75}{212},\frac{114}{212})=BA^2BABA^3B(0,1)$. Ich werde Hilfssatz 2 dreimal verwenden. Zweimal würde das einfachere Exponentenpaar $(\varkappa,\lambda) := (\frac{11}{30},\frac{16}{30})=BA^3B(0,1)$ ausreichen und wegen

$$\frac{\varkappa+\lambda}{\varkappa+1}=\frac{11+16}{11+30}=\frac{27}{41}$$

zum gleichen Resultat führen. Ich habe $(\varkappa,\lambda)=(\frac{75}{212},\frac{114}{212})$ gewählt, damit in allen drei Awendungen die Voraussetzung $\lambda>\beta\varkappa$ erfüllt ist.

Beweis des Satzes 1. Setzt man in Hilfssatz 2 $y := x^{1/5}$ und mal $\beta := 3/2$, mal $\beta := 2/3$, so erhält man

$$\sum_{n\leqslant x^{1/5}}\left\{\psi\left(\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right)+\psi\left(\sqrt[3]{\frac{x}{n^2}}\right)\right\}\ll x^{(1/5)\cdot(27/41)}=x^{27/205},$$

und Satz 1 folgt aus Hilfssatz 1.

[1] $\#M$ sei die Anzahl der Elemente der Menge M.

Satz 2. *Ist* $x\in\boldsymbol{R},\ x\geqslant 1,\ t+1/2\in N$ *und* $t\leqslant x^{1/11}$, *so gilt*

$$T(x,t)=\frac{1}{2}\zeta(\tfrac{3}{2})\frac{x^{1/2}}{t^2}+\zeta(\tfrac{2}{3})\frac{x^{1/3}}{t}+\zeta(\tfrac{1}{2})\zeta(\tfrac{1}{3})x^{1/6}+O(x^{180/451}t^{-112/41})+ +O(x^{1/2}t^{-4}).$$

Dem Beweise des Satzes 2 schicke ich drei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 3 (vgl. [3], Hilfssatz 2). *Ist* $z\in\boldsymbol{R},\ z\geqslant 1$, *so gilt*

$$\sum_{m^2n^3\leqslant z}(m^2n^3)^{-1/6}=\tfrac{3}{2}\zeta(\tfrac{3}{2})z^{1/3}+2\zeta(\tfrac{2}{3})z^{1/6}+\zeta(\tfrac{1}{3})\zeta(\tfrac{1}{2})+z^{-1/6}\Delta(z)+O(z^{-1/6}).$$

Hilfssatz 4 (vgl. [7], Hilfssatz 4). *Sind* $y,\ \mu,\ \nu\in\boldsymbol{R};\ y\geqslant 1,\ 1\leqslant\mu\leqslant y^{1/4}\leqslant\nu,\ \mu^3\nu=y$, *so gilt*

$$\sum_{y^{1/4}<m\leqslant\nu}\psi\left(\sqrt[3]{\frac{y}{m}}\right)=\sum_{\mu<m\leqslant y^{1/4}}\psi\left(\frac{y}{m^3}\right)+O\left(\frac{y}{\mu^4}\right).$$

Hilfssatz 5 (vgl. [6], Formel (19) und Seite 28, Zeile 11). *Sind* $a,\ b,\ y\in\boldsymbol{R};\ 1\leqslant a<b\leqslant 2a,\ y\geqslant 1$; β *eine positive Konstante und* $(\varkappa,\lambda) := (\frac{11}{30},\frac{16}{30})$; *so gilt*

$$\sum_{a<n\leqslant b}\psi\left(\frac{y}{n^\beta}\right)\ll y^{\varkappa/(1+\varkappa)}a^{(\lambda-\beta\varkappa)/(1+\varkappa)}+y^{-1/2}a^{1+\beta/2}.$$

Beweis des Satzes 2. Wegen $t+\frac{1}{2}\in N$ ist $[t]=t-\frac{1}{2}$, und daher

$$T(x,t)=\sum_{m^2n^3\leqslant xt^{-6}}\ \sum_{t<k\leqslant(xm^{-2}n^{-3})^{1/6}}1=\sum_{m^2n^3\leqslant xt^{-6}}\left(\left[\sqrt[6]{\frac{x}{m^2n^3}}\right]-t+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\sum_{m^2n^3\leqslant xt^{-6}}\left(\frac{x}{m^2n^3}\right)^{1/6}-S-tD\left(\frac{x}{t^6}\right)$$

mit

$$S := \sum_{m^2n^3\leqslant xt^{-6}}\psi\left(\sqrt[6]{\frac{x}{m^2n^3}}\right).$$

Hilfssatz 3 liefert nun

$$T(x,t)=\frac{1}{2}\zeta(\tfrac{3}{2})\frac{x^{1/2}}{t^2}+\zeta(\tfrac{2}{3})\frac{x^{1/3}}{t}+\zeta(\tfrac{1}{3})\zeta(\tfrac{1}{2})x^{1/6}-S+O(t). \tag{3.1}$$

Ich spalte S in drei Teilsummen auf:

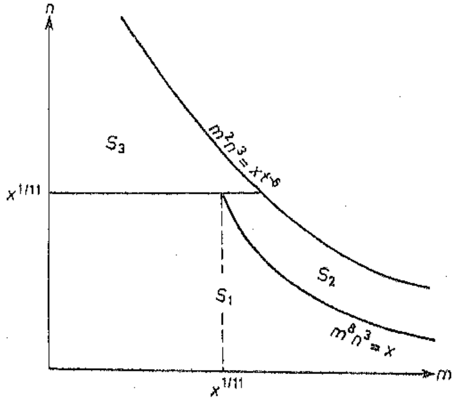
$$S=S_1+S_2+S_3 \tag{3.2}$$

mit

$$S_1 := \sum_{n \leqslant x^{1/11}} \sum_{m \leqslant (x/n^3)^{1/8}} \psi\left(\frac{(x/n^3)^{1/6}}{m^{1/3}}\right),$$

$$S_2 := \sideset{}{'}\sum_{n \leqslant x^{1/11}} \sum_{(x/n^3)^{1/8} < m \leqslant (xn^{-3}t^{-6})^{1/2}} \psi\left(\sqrt[3]{\frac{(x/n^3)^{1/2}}{m}}\right),$$

$$S_3 := \sum_{m \leqslant x^{4/11}t^{-3}} \sum_{x^{1/11} < n \leqslant (xm^{-2}t^{-6})^{1/3}} \psi\left(\frac{(x/m^2)^{1/6}}{n^{1/2}}\right).$$



Zur Abschätzung der inneren Summe in S_1 verwende ich Hilfssatz 2 mit $\beta := \frac{1}{3}$ und $y := (xn^{-3})^{1/8}$ und erhalte

$$(3.3) \qquad S_1 \ll \sum_{n \leqslant x^{1/11}} \left(\frac{x}{n^3}\right)^{\frac{1}{8}\cdot\frac{27}{41}} \ll x^{\frac{1}{11}\left(1+\frac{27}{41}\right)} = x^{68/451}.$$

Ehe ich S_2 abschätze, wende ich auf die innere Summe Hilfssatz 4 mit $y := (xn^{-3})^{1/2}$, $\mu := t$ und $v := (xn^{-3}t^{-6})^{1/2}$ an:

$$S_2 = \sum_{n \leqslant x^{1/11}} \sum_{t < m \leqslant (x/n^3)^{1/8}} \psi\left(\frac{(x/n^3)^{1/2}}{m^3}\right) + O\left(\frac{x^{1/2}}{t^4}\right).$$

Zerlegt man in der üblichen Weise das Summationsintervall der inneren Summe in Teilintervalle $(t, 2t]$, $(2t, 4t]$, $(4t, 8t]$, ... und wendet auf die Teilsummen Hilfssatz 5 mit $y := (xn^{-3})^{1/2}$ und $\beta := 3$ an, so ergibt sich wegen $t \leqslant x^{1/11}$

$$(3.4) \qquad S_2 \ll \sum_{n \leqslant x^{1/11}} \left\{\left(\frac{x}{n^3}\right)^{11/82} t^{-17/41} + \left(\frac{x}{n^3}\right)^{1/16}\right\} + \frac{x^{1/2}}{t^4}$$
$$\ll x^{85/451} t^{-17/41} + \frac{x^{1/2}}{t^4}.$$

Die innere Summe in S_3 schätze ich nach geeigneter Aufspaltung direkt durch Hilfssatz 5 ab, indem ich dort $y := (xm^{-2})^{1/6}$ und $\beta := \frac{1}{2}$ setze:

$$(3.5) \qquad S_3 \ll \sum_{m \leqslant x^{4/11}t^{-3}} \left\{\left(\frac{x}{m^2}\right)^{11/246} \left(\frac{x}{m^2 t^6}\right)^{7/82} + \left(\frac{x}{m^2}\right)^{-1/12} \left(\frac{x}{m^2 t^6}\right)^{5/12}\right\}$$
$$\ll x^{180/451} t^{-112/41} + x^{5/11} t^{-7/2}.$$

Wegen $t \leqslant x^{1/11}$ ergeben (3.2)–(3.5)

$$S \ll x^{180/451} t^{-112/41} + x^{1/2} t^{-4},$$

und Satz 2 folgt aus (3.1).

4. Beweis des Hauptsatzes. Da sich jede quadratvolle Zahl q eindeutig in der Form $q = m^2 r^3$ mit quadratfreiem r schreiben läßt, gilt

$$Q(x) = \sum_{m^2 r^3 \leqslant x} \mu^2(r) = \sum_{m^2 r^3 \leqslant x} \sum_{nk^2 = r} \mu(k) = \sum_{m^2 n^3 k^6 \leqslant x} \mu(k).$$

Setzt man $t := [x^{1/11}] - \frac{1}{2}$,

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{x < m^2 n^3 k^6 \leqslant x+h \\ k \leqslant t}} \mu(k), \qquad \Sigma_2 := \sum_{\substack{x < m^2 n^3 k^6 \leqslant x+h \\ k > t}} \mu(k),$$

so gilt

$$(4.1) \qquad Q(x+h) - Q(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Wegen $1 \leqslant h \leqslant x^{2/3}$ und obiger Wahl von t liefert Satz 1

$$(4.2) \qquad \Sigma_1 = \sum_{k \leqslant t} \mu(k) \sum_{x/k^6 < m^2 n^3 \leqslant (x+h)/k^6} 1 = \sum_{k \leqslant t} \mu(k) \left\{D\left(\frac{x+h}{k^6}\right) - D\left(\frac{x}{k^6}\right)\right\}$$
$$= \sum_{k \leqslant t} \mu(k) \left(\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{k^3} + O\left\{\frac{hx^{-2/3}}{k^2} + \left(\frac{x}{k^6}\right)^{27/205}\right\}\right)$$
$$= \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \frac{h}{2\sqrt{x}} + O(x^{68/451})$$

und Satz 2

$$(4.3) \qquad |\Sigma_2| \leqslant T(x+h, t) - T(x, t) \ll x^{68/451}.$$

Der Hauptsatz folgt nun aus (4.1)–(4.3).

5. Schlußbemerkungen. Ohne Beweis sei vermerkt: Mit der Rankinschen Optimierung [5] der van der Corput-Methode zur Abschätzung eindimensionaler Exponentialsummen kann man den Exponenten $27/205 = 0.131\,7073\ldots$ im Fehlerglied des Satzes 1 zu

$$(6+4\alpha)/(47+26\alpha) + \varepsilon = 0.131\,6919\ldots$$

und den Exponenten $68/451 = 0.1507760\ldots$ im Fehlerglied des Hauptsatzes zu

$$(1+2\alpha)/11+\varepsilon = 0.1507311\ldots$$

verbessern. Hierin ist $\alpha = 0.3290213\ldots$ das Infimum von $\varkappa+\lambda-\frac{1}{2}$, wenn $(\varkappa, \lambda)$ alle Exponentenpaare durchläft, die sich durch die Rankinschen Prozesse A und B aus dem trivialen Paar $(0, 1)$ gewinnen lassen (vgl. [5], insbesondere Abschätzung (4), S. 150).

Darüber hinausgehende Verschärfungen des Hauptsatzes werden m. E. den Einsatz von Abschätzungen mehrdimensionaler Exponentialsummen erfordern.

Literaturverzeichnis

[1] P. T. Bateman and E. Grosswald, *On a theorem of Erdös and Szekeres*, Illinois J. Math. 2 (1958), S. 88–98.
[2] J. G. van der Corput, *Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem*, Math. Ann. 84 (1921), S. 53–79.
[3] E. Krätzel, *Teilerprobleme in drei Dimensionen*, Math. Nachrichten 42 (1969), S. 275–288.
[4] E. Philipps, *The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method*, Quart. J. Math. (Oxford) 4 (1933), S. 209–225.
[5] R. A. Rankin, *Van der Corput's method and the theory of exponent-pairs*, ibid. (2) 6 (1955), S. 147–153.
[6] H. E. Richert, *Über die Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung I*, Math. Z. 56 (1952), S. 21–32.
[7] P. G. Schmidt, *Zur Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung*, J. Reine Angew. Math. 229 (1968), S. 34–42.
[8] P. Shiu, *On square-full integers in a short interval*, Glasgow Math. J. 25 (1984), S. 127–134.

FACHBEREICH MATHEMATIK DER PHILIPPS-UNIVERSITÄT
LAHNBERGE
D-3550 MARBURG

Eingegangen am 19. 11. 1984 (1472)

ACTA ARITHMETICA
XLVI (1986)

Sur les fonctions multiplicatives à valeurs entières

par

HUBERT DELANGE (Orsay)

1. Introduction. f étant une fonction arithmétique à valeurs entières, autrement dit une application de N^* dans Z, un des problèmes que l'on peut se poser à son sujet est le suivant:

Etant donné k entier > 1 et l entier quelconque, étudier l'ensemble des $n \in N^*$ pour lesquels $f(n) \equiv l (\bmod k)$.

Si, k étant fixé, cet ensemble possède une densité pour tout l, on peut dire que f possède une distribution limite modulo k. S'il possède pour tout l une densité égale à $1/k$, ce qu'on peut exprimer en disant qu'asymptotiquement les valeurs de f se répartissent également entre les différentes classes modulo k, on peut dire que f possède une distribution limite uniforme modulo k, ou qu'elle est distribuée uniformément modulo k.

Ainsi, $\Omega(n)$ étant le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers, Pillai [8] avait démontré en 1940 que la fonction Ω est distribuée uniformément modulo k pour tout $k > 1$.

Dans un article paru en 1969 [2] nous avons démontré que toute fonction arithmétique additive à valeurs entières possède une distribution limite modulo k pour tout k, et nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les valeurs de la fonction pour les nombres premiers et les puissances de 2, pour que cette distribution limite soit uniforme pour un k donné, ou pour tout $k > 1$.

Nous nous proposons ici d'étudier le cas des fonctions multiplicatives à valeurs entières.

Pour ces fonctions comme pour les fonctions additives, l'existence d'une distribution limite modulo k peut se déduire d'un théorème général de Ruzsa ([9], théorème 2). Mais notre méthode est simple et nous obtenons des précisions que ne donne pas le théorème de Ruzsa.

Les résultats que nous allons établir ont été énoncés sans démonstration en 1976 et 1977 ([3] et [4]).

Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, les lettres p et q désigneront toujours des nombres premiers, et les lettres n, d, i, j désigneront des entiers > 0.