ACTA ARITHMETICA
XLVI (1985)

О бинарной проблеме Харди–Литтльвуда

А. И. Виноградов (Ленинград)

Памяти академика
Ивана Матвеевича Виноградова

Введение. В сборнике Acta Arithmetica, XXVII, 1975, посвященном памяти Ю. В. Линника, появилась очень важная работа [5], где впервые дано нетривиальное применение эффекта Линника–Дейринга–Хейльбронна к бинарным задачам. Метод Монтгомери–Вона в [5] позволил им получить степенное понижение

$$E_2(N) < N^{1-\delta}$$

в оценке исключительного множества E_2 тех целых $n \leqslant N$, удвоение которых возможно не представимо суммой двух простых:

$$2n = p_1 + p_2. \tag{0.1}$$

В оценке $E_2(N)$ величина $\delta > 0$ — абсолютная эффективная константа. Она определяется константой $c > 4$ Линника–Галлахера [1] и зависит от нее гиперболически:

$$\delta c < 1. \tag{0.2}$$

Этот результат уже сравним с тем, что дает Р. Г. Р.: $\delta = \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Затем И. В. Поляков сделал попытку в [11] получить на этом пути более слабую оценку

$$E_{3/2}(N) < N \cdot \exp(-a\sqrt{\log N}), \quad a > 0$$

для исключительного множества $E_{3/2}$ тех $n \leqslant N$, которые возможно не представимы в виде

$$n = p + x^2, \quad x \in \mathbf{Z}. \tag{0.3}$$

Но эту попытку нельзя назвать удачной, т.к. автор не понял механизма действия эффекта Линника–Дейринга–Хейльбронна в работе [5] и для оправдания этой оценки надо принять эффективизацию теоремы

Зигеля в сильной форме:

$$1-\beta > a_0(\log q)^{-2},$$

где β — зигелевский нуль L-ряда Дирихле для примитивного квадратичного характера модуля q, $a_0 > 0$ — эффективная константа. На самом деле метод работы [5] позволяет получить степенное понижение

$$E_{1+1/k}(N) < N^{1-\delta_k} \tag{0.4}$$

в общем случае для исключительного множества $E_{1+1/k}$ тех $n \leqslant N$, которые возможно не представимы в виде

$$n = p + x^k, \quad x \in \mathbf{Z} \tag{0.5}$$

для любого фиксированного целого $k \geqslant 2$, константа $\delta_k > 0$ в (0.4) зависит от k, начиная с некоторого $k \geqslant k_0$, которое в свою очередь зависит от константы Линника–Галлахера c в (0.2), [1].

Отметим, что с точки зрения кругового метода и эффекта Линника–Дейринга–Хейльбронна все уравнения (0.5) разбиваются на два класса: с четными $k \equiv 0\,(2)$, и с нечетными $k \equiv 1\,(2)$. После такого деления техника счета для всех k одного класса в принципе одинакова. Поэтому чтобы не усложнять техническую сторону дела мы рассмотрим по одному представителю из каждого класса. Из класса четных k возьмем уравнение (0.3), из класса нечетных k — уравнение

$$n = p + x^3, \quad x \in \mathbf{Z},\ x \geqslant 0. \tag{0.6}$$

Причем из этих двух уравнений подробно разберем только уравнение (0.3) и затем в конце работы кратко укажем в чем отличие уравнения (0.6) от (0.3) с точки зрения кругового метода.

Отметим, что оба уравнения и (0.3) и (0.6) являются классическими в том смысле, что они рассмотрены в основополагающей работе Харди и Литтльвуда [2] и для них приведены там гипотетические асимптотики числа решений. Этим и объясняется заголовок работы.

Метод работы [5] позволяет в принципе получить аналогичные оценки и для более общего уравнения

$$n = p_1 + p_2^k, \quad k \geqslant 1. \tag{0.7}$$

Это уравнение объединяет бинарное уравнение Гольдбаха (0.1) и уравнение Харди–Литтльвуда (0.5).

В качестве любопытного арифметического феномена отметим, что если функцию $E_2(N)$ трактовать как исключительное множество тех $n \leqslant N$, для которых возможно не верна гипотетическая асимптотика Харди–Литтльвуда для числа решений (0.1) и последовательность

всех $\{n\}$ сузить до простых $\{p\}$, тогда безусловно справедлива оценка

$$E_2(N) < N^{1/2+\varepsilon}, \tag{0.8}$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало но фиксировано, т.е. результат такой же, как и для всех $n \leqslant N$, но с принятием Р. Г. Р.

Аналогичный эффект верен и для уравнений (0.3) и (0.6)

$$E_{3/2}(N) < N^{2/3+\varepsilon}, \tag{0.9}$$

$$E_{4/3}(N) < N^{5/6+\varepsilon}. \tag{0.10}$$

Оценки (0.9) и (0.10) справедливы для всех $n \leqslant N$ если принять Р. Г. Р. Феномен безусловных оценок (0.8), (0.9) и (0.10) объясняется довольно просто, если заметить, что самые существенные потери на больших дугах метод работы [5] дает на тех q, которые делят n. Но если n — само простое число, тогда у него нет собственных делителей и поэтому нет потерь на больших дугах. На малых дугах среднеквадратичные оценки как с Р. Г. Р., так и без нее — одинаковы.

В отличии от работы [5] мы будем пользоваться здесь языком тэта-функций в духе классических работ Харди–Литтльвуда [2] и Линника [10]. Этот язык более экономен и прост с точки зрения плотностных методов.

1. Вспомогательные леммы. В дальнейшем нам потребуется несколько известных фактов из большого решета и теории тэта-функций, которые мы приведем здесь в виде лемм без доказательств, но с точными ссылками, где можно найти эти доказательства.

Лемма 1.1. *Пусть $q > 1$ — нечетное безквадратное число и χ_2 пробегает значения трех первообразных квадратичных характеров модулей q, $4q$, и $8q$ соответственно, тогда в интервале $4/5 \leqslant \sigma \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{q \leqslant Q\\ q \equiv 1(2)}} \mu^2(q) \sum_{\chi_2} N(\sigma, T, \chi_2) \ll (Q\sqrt{T})^{5(1-\sigma)} \log^{14}(QT),$$

где $Q \geqslant 3$, $T \geqslant 2$, $N(\sigma, T, \chi_2)$ — число нулей $L(s, \chi_2)$ в области $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$.

Эта лемма является следствием теоремы 12.2 главы 12, книги [6].

Следствие 1.1. *Количество тех безквадратных $q \leqslant Q$ для которых хотя бы один из трех $L(s, \chi_2)$ имеет нуль в области*

$$1-\sigma \leqslant 0{,}02, \quad |t| \leqslant 2T; \quad s = \sigma + it \tag{1.1}$$

по своему порядку не больше величины

$$(Q\sqrt{T})^{0,1} \log^{14}(QT) \tag{1.2}$$

для остальных бесквадратных нечетных $q \leqslant Q$ ни один из трех $L(s, \chi_2)$ не имеет нулей в этой области.

Лемма 1.2. *Если $L(s, \chi_2)$ не имеет нулей в области (1.1), тогда в подобласти $1-\sigma \leqslant 0{,}01$, $|t| \leqslant T$ справедливо представление*

$$L(s, \chi_2) = \prod_{p \leqslant \log^c(QT)} \left(1 - \frac{\chi_2(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\theta}{\log q}\right). \tag{1.3}$$

В этой подобласти $\theta \ll 1$, $c \geqslant 400$ — абсолютная константа.

Метод доказательства этой леммы можно найти в работе [9]. Суть этой леммы проста — до границы нулей L-ряд Дирихле хорошо аппроксимируется коротким отрезком эйлеровского произведения.

Следствие 1.2. *Пусть $n \leqslant N$, $n = d \cdot n_0^2$, где $d > 1$ — бесквадратно, тогда для любого нечетного $q_1 \leqslant N$ с условием $(n, q_1) = 1$ справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{q \leqslant x \\ (q, q_1)=1}} \mu(q) \left(\frac{n}{q}\right) \varphi^{-1}(q) = \tag{1.4}$$

$$= \mathfrak{S}(n) \prod_{p | q_1} \left(1 - \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{p-1}\right)^{-1} + O\left(x^{-\varepsilon} \exp(\sqrt{\log N})\right),$$

где $\left(\frac{n}{q}\right)$ — символ Кронекера,

$$\mathfrak{S}(n) = \Pi(n) L^{-1}(1, \chi_d), \tag{1.5}$$

$$\Pi(n) = \prod_{p \neq 2} \left(1 - \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{p-1}\right) \left(1 - \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{p}\right)^{-1} \prod_{\substack{p | 2n_0 \\ p \nmid d}} \left(1 - \frac{\left(\frac{d}{p}\right)}{p}\right)^{-1},$$

χ_d — квадратичный характер, определенный символом Кронекера $\left(\frac{d}{p}\right)$, $L(s, \chi_d)$ — ряд Дирихле этого характера.

Равенство (1.4) следует из (1.3) стандартным путем через разрывной контурный интеграл, переводящий конечную сумму в полный L-ряд и затем сдвиг контура до границы нулей.

Лемма 1.3. *Тэта-функция Харди–Литтльвуда*

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-zn}, \quad z = 1/N + 2\pi i \alpha$$

в окрестности рациональной точки a/q, $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$ имеет следующее разложение:

$$S\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) = \frac{\mu(q)}{z\varphi(q)} - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{q = q_0 q_1} \mu(q_0) \sum_{\chi_1}^{*} \chi_1(a q_0^{-1}) \bar{\tau}_{\chi_1} S_{\chi_1}(z) + \tag{1.6}$$

$$+ O\left(\tau(q) \log^2 N\right),$$

где $q_0 > 1$ пробегает все бесквадратные делители q с условием, что $(q_0, q_1) = 1$, χ_1 пробегает все примитивные характеры модуля q_1, τ_{χ_1} — сумма Гаусса характера χ_1:

$$\tau_{\chi_1} = \sum_{(l, q_1)=1} \chi_1(l) e^{2\pi i (l/q_1)},$$

$$S_{\chi_1}(z) = \sum_{\varrho} z^{-\varrho} \Gamma(\varrho), \quad z = 1/N + 2\pi i \alpha, \tag{1.7}$$

$$\tau(q) = \sum_{d | q} 1,$$

ϱ пробегает все нули $L(s, \chi_1)$ в критической полосе.

Подробности доказательства этой леммы можно найти в работах [2], [8], [10].

Лемма 1.4. *Тэта-функция Якоби*

$$\vartheta(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-zn^2}, \quad z = 1/N + 2\pi i \alpha$$

в окрестности рациональной точки a/q, $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$ имеет следующее разложение

$$\vartheta\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) = \frac{1}{q\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi^2 \frac{n^2}{q^2 z}\right) g(a, n; q), \tag{1.8}$$

где $z = 1/N + 2\pi i \alpha$, $g(a, n; q)$ — общая сумма Гаусса

$$g(a, n; q) = \sum_{x=1}^{q} \exp\left(2\pi i \frac{ax^2 + nx}{q}\right). \tag{1.9}$$

Это классическая формула Якоби. Подробности ее доказательства можно найти, например, в [7].

Для полноты изложения мы приведем здесь несколько фактов для общих сумм Гаусса. Хотя они являются классическими и восходят еще к Гауссу, но не так-то просто найти ссылки на них в современных книгах или работах.

Лемма 1.5. *Пусть* $g(a,q) = g(a,0;q)$ *в смысле равенства* (1.9), *тогда справедливы следующие равенства в случае* $(a,q)=1$:

1) *если* $n = 2n_1$, *тогда*

$$g(a,n;q) = \exp\left(-2\pi i \frac{a' n_1^2}{q}\right) g(a,q), \qquad aa' \equiv 1\,(q);$$

2) *если* n *и* q *нечетны и* $n+q = 2n_1$, *тогда*

$$g(a,n;q) = \exp\left(-2\pi i \frac{a' n_1^2}{q}\right) g(a,q);$$

3) *если* n — *нечетно,* q — *четно, тогда*

$$g(a,n;q) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\exp\left(-2\pi i \dfrac{a' n^2}{4q}\right) g(a,4q), & q \equiv 2\,(4), \\ 0, \quad \text{если } q \equiv 0\,(4), \ aa' \equiv 1\,(4q). & \end{cases}$$

Лемма 1.5 сводит изучение общих сумм Гаусса к простейшим суммам Гаусса.

Лемма 1.6. 1) *Пусть* $q \geqslant 1$ — *нечетно, тогда*

$$g(a,q) = \left(\frac{a}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}.$$

2) *Пусть* a — *нечетно,* $t \geqslant 1$ *целое, тогда*

$$g(a,2^t) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{a}\right)^t \left[1 + \left(\dfrac{-1}{a}\right) i\right] \sqrt{2^t} = (-1)^{t(a^2-1)/8}(1+i^a)\sqrt{2^t}, & \text{если } t \geqslant 2, \\ 0, \quad \text{если } t = 1. & \end{cases}$$

Следствие 1. *Если* q — *четное положительное,* $(a,q)=1$, *тогда*

$$g(a,q) = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{a}\right)(1+i^a)\sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 0\ (4), \\ 0, \quad \text{если } q \equiv 2\ (4). & \end{cases}$$

Следствие 2. *Если* p — *нечетное простое,* $(a,p)=1$, *тогда*

$$g(a,p) = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) e^{2\pi i \frac{a}{p} x} = \left(\frac{a}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Следствие 3. *Если* $q \geqslant 1$ — *нечетно и* $q = q_1 q_2^2$, *где* q_1 — *бесквадратно, тогда при* $(a,q)=1$,

$$g(a,q) = q_2 g(a,q_1).$$

Следствие 4. *Если* $q = q_1 q_2$, *где* $(q_1,q_2)=1$, $(a,q)=1$ *и* $a = a_1 q_2 + a_2 q_1$, *тогда*

$$g(a,q) = g(a_1,q_1) g(a_2,q_2).$$

Следствие 5. *Пусть* ε_q — *знак суммы Гаусса, определенный равенством:* $g(1,q) = \varepsilon_q \sqrt{q}$, *тогда в обозначениях предыдущего следствия справедливо равенство*

$$\varepsilon_q = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \varepsilon_{q_1} \varepsilon_{q_2}.$$

Этих сведений о суммах Гаусса будет достаточно для дальнейших оценок.

Лемма 1.7. *Если* $q \leqslant \varepsilon\sqrt{N}/\log N$, $|\alpha| \leqslant \varepsilon/q^2 \log N$, *где* $\varepsilon > 0$ — *малая, но фиксированная константа, тогда справедливо асимптотическое равенство:*

$$\vartheta\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) = \frac{1}{q\sqrt{z}} \bar{g}(a,q) + \theta N^{-c}, \tag{1.10}$$

где $\vartheta(\alpha)$ — *функции Якоби из леммы* 1.4, $c = 1/\varepsilon$, $\theta \leqslant 1$, $(a,q)=1$.

Эта лемма является следствием равенства (1.8). Она показывает, что при малых q по сравнению с большим параметром N и в достаточно малой окрестности точки a/q нулевой коэффициент Фурье в (1.8) является главным членом правой части (1.8).

2. Оценки на малых дугах. По соображениям технического характера удобнее рассматривать взвешенное уравнение (0.3):

$$P_{3/2}(n) = \sum_{n=m+x^2} \Lambda(m), \tag{2.1}$$

где Λ — функция Мангольдта.

Сумму (2.1) можно записать через круговой интеграл

$$P_{3/2}(n) = e^{n/N} \int_{1/\tau}^{1+1/\tau} S(\alpha)\vartheta(\alpha) e^{2\pi i \alpha n}\, d\alpha \tag{2.2}$$

где $\tau > 1$ — некоторый большой параметр, N — большой параметр, определяющий границу абсолютной сходимости тэта-функций $S(\alpha)$ и $\vartheta(\alpha)$. В дальнейшем мы будем изучать уравнение (2.1) в интервале

$$N/2 < n \leqslant N. \tag{2.3}$$

Теперь возьмем дуги Фарея по следующему правилу: параметр τ определим равенством

$$\tau = N^{1-\delta}, \tag{2.4}$$

где $\delta > 0$ мало, но фиксировано, $\delta < 1/4$, точным значением параметра δ мы распорядимся в дальнейшем и он будет определяться как и в работе [5] константой Линника–Галлахера c из условия (0.2). Разобъем интервал $(1/\tau,\ 1+1/\tau)$ рациональными точками a/q, $1 \leqslant q \leqslant \tau$, $(a, q) = 1$, $1 \leqslant a \leqslant q$, на дуги Фарея

(2.5) $$\frac{a}{q} \pm \frac{\theta}{q\tau}, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Для того, чтобы разбить эти дуги на большие и малые, введем еще один параметр t из условия

(2.6) $$t \cdot \tau = N$$

и все дуги (2.5) с условием

(2.7) $$1 \leqslant q \leqslant t^{1-\varepsilon_0} = \tau_0$$

объявим большими дугами, а дуги (2.5) с условием

(2.8) $$\tau_0 < q \leqslant \tau$$

объявим малыми дугами. Величина $\varepsilon_0 > 0$ мала, но фиксирована, $\varepsilon_0 < 1/4$.

Для того, чтобы параметру θ в (2.5) придать полную определенность зададим его условием

(2.9) $$\theta = 1, \quad \text{если} \quad q \leqslant \tau/2.$$

В этом случае параметр $\theta = \theta(a, q)$ для оставшейся половины $q \in (\tau/2, \tau]$ однозначно определяется по принципу дополнения до единичного интервала. Причем на этом интервале справедлива оценка

(2.10) $$|\theta| = |\theta(a, q)| \leqslant 1.$$

Пусть теперь M — множество всех больших дуг Фарея с условием (2.7), m — множество всех малых дуг с условием (2.8) тогда равенство (2.2) можно переписать в форме

(2.11) $$e^{-n/N} P_{3/2}(n) = P_0(n) + P_1(n),$$

где

(2.12) $$P_0(n) = \int_M T(\alpha) e^{2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

(2.13) $$P_1(n) = \int_m T(\alpha) e^{2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

(2.14) $$T(\alpha) = S(\alpha)\vartheta(\alpha).$$

Исследуем поведение среднеквадратичного

(2.15) $$P(N) = \sum_{n=0}^{\infty} |P_1(n)|^2 e^{-n/N}.$$

Из неравенства Парсеваля для него следует оценка:

$$P(N) \leqslant \int_m |T(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Отсюда с учетом (2.14) получаем:

(2.16) $$P(N) \leqslant \int_m |S(\alpha)|^2 |\vartheta(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Но на малых дугах из (1.8) следует оценка:

(2.17) $$|\vartheta(\alpha)|^2 \ll \tau t^{\varepsilon_0}, \quad \alpha \in m.$$

Подставляя ее в (2.16), получаем

(2.18) $$P(N) \ll \tau t^{\varepsilon_0} \int_m |S(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Теперь осталось заметить, что

(2.19) $$\int_m |S(\alpha)|^2 d\alpha \leqslant \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^2(n) e^{-2n/N}.$$

Сумма в правой части (2.19) по своему порядку не больше величины $N \log N$, поэтому из (2.18) и (2.19) получаем оценку среднеквадратичного на малых дугах:

(2.20) $$P(N) \ll N\tau t^{\varepsilon_0} \log N.$$

Из оценки (2.20) получаем такое утверждение

Лемма 2.1. *Количество целых n в интервале $N/2 < n \leqslant N$ для которых выполняется оценка*

(2.21) $$|P_1(n)| > n^{1/2-\varepsilon_1}$$

не превосходит по своему порядку величины

(2.22) $$N^{2\varepsilon_1} \tau t^{\varepsilon_0} \log N.$$

Эти числа назовем исключительными. Для всех остальных $n \in (N/2, N]$ справедлива оценка

(2.23) $$|P_1(n)| \leqslant n^{1/2-\varepsilon_1},$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — мало но фиксировано, точным значением этого малого параметра мы распорядимся в конце работы.

Числа n с условием (2.23) назовем нормальными.

Следствие 2.1. *Для нормальных* $n \in (N/2, N]$ *справедливо равенство*

$$P_{3/2}(n) = e^{n/N} P_0(n) + \theta n^{1/2-\varepsilon_1}, \tag{2.24}$$

где $\theta \ll 1$.

3. Оценки на больших дугах. Полюсной член в правой части (1.6) вместе с равенством (1.10) дают главный член $P_0(n)$. Причем условия леммы 1.7 для справедливости (.10) на больших дугах выполнены. Поэтому после несложных вычислений с использованием Леммы 1.6, пункт 1) и ее следствий 2, 4, 5 получаем равенство:

$$P_0(n) = 2e^{-n/N} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{q \leqslant \tau_0, q \equiv 1(2)} \mu(q) \left(\frac{n}{q}\right) \varphi^{-1}(q) - \int_M S_1(\alpha) \vartheta(\alpha) e^{2\pi i \alpha n} d\alpha + \theta \sqrt{n}\, t^{-1,5\varepsilon_0}, \tag{3.1}$$

где $S_1(\alpha)$ — центральная сумма в правой части (1.6) по примитивным характерам и нулям:

$$S_1\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{q = q_0 q_1} \mu(q_0) \sum_{\chi_1}^{*} \chi_1(a q_0^{-1}) \bar{\tau}_{\chi_1} S_{\chi_1}(z). \tag{3.2}$$

Все параметры в (3.2) определены в (1.6) и (1.7). Отметим, что сумма по $q \leqslant \tau_0$ в (3.1) является суммой из следствия 1.2 с равенством (1.4) и параметром $q_1 = 1$.

В качестве модуля характера $\left(\frac{n}{q}\right)$ выступает представимое число n и длина суммы τ_0 мала по сравнению с n. Поэтому для справедливости равенства (1.4) нужен квазиримановский сдвиг нулей соответствующего L-ряда. Это место принципиально важно, поэтому мы остановимся на нем подробнее.

Каждое целое $n \geqslant 1$ можно однозначно представить в виде:

$$n = d n_0^2, \tag{3.3}$$

где d — бесквадратная часть n. Чистые квадраты мы исключим из рассмотрения, т.е.

$$d > 1.$$

Поэтому символ Кронекера $\left(\frac{n}{q}\right)$ в (3.1) является произведением

главного характера модуля n_0 и примитивного квадратичного характера модуля d если $d \equiv 1\ (4)$, либо модуля $4d$, если $d \equiv 3\ (4)$ или $d = 2d_1$, и т. к. d бесквадратно, то этими случаями исчерпываются все возможные варианты.

Кроме того, по условию $n \leqslant N$, поэтому $d \leqslant N$ и следовательно в этом случае применима лемма 1.1 и следствие 1.1 с условиями, что $Q = N$, $T = N$. Поэтому число исключительных L-рядов из следствия 1.1 будет величиной порядка

$$N^{0,15} \log^{14} N. \tag{3.4}$$

Из равенства (3.3) следует, что на каждое исключительное d падает не более чем $\sqrt{N}$ квадратов n_0^2. Поэтому с учетом оценки (3.4) получаем, что число всех исключительных n, для которых возможно не выполняется следствие 1.1 не больше чем

$$N^{0,65} \log^{14} N. \tag{3.5}$$

Объединяя это множество n со множеством (2.22) исключительных в смысле леммы 2.1 и следствия 2.1 получаем, что общее множество не больше величины порядка

$$(N^{2\varepsilon_1} \tau t^{\varepsilon_0} + N^{0,65}) \log^{14} N. \tag{3.6}$$

Для всех остальных $n \in (N/2, N]$ можно считать выполненными одновременно как условия следствия 1.1, так и 2.1. Кроме того, для таких n выполнено и условие леммы 1.2 при $T = N$. Поэтому для $L^{-1}(1, \chi_d)$ из (1.4) справедлива оценка снизу

$$L^{-1}(1, \chi_d) \gg (\log\log n)^{-1}. \tag{3.7}$$

Из определения $\Pi(n)$ в (1.5) следует оценка

$$\Pi(n) \gg (\log\log n)^{-1}.$$

Поэтому для особого ряда проблемы $\mathfrak{S}(n)$ получаем оценку снизу:

$$\mathfrak{S}(n) = \frac{\Pi(n)}{L(1, \chi_d)} \gg (\log\log n)^{-2}. \tag{3.8}$$

Длина суммы x из следствия 1.2 в случае суммы (3.1) равна $t^{1-\varepsilon_0} \geqslant N^{3\delta/4}$, т. е. является некоторой фиксированной степенью N, поэтому остаток в (1.4) имеет степенное понижение по сравнению с главным членом ввиду оценки (3.8).

Оценим второе слагаемое в правой части (3.1):

$$I_1(n) = \int_M S_1(\alpha) \vartheta(\alpha) e^{2\pi i \alpha n} d\alpha. \tag{3.9}$$

Для этого разобъем сумму $S_1(a)$ из (3.2) на две:

$$S_1(a) = S_2(a) + S_3(a), \tag{3.10}$$

где $S_2(a)$ имеет тот же вид, что и правая часть (3.2), но с дополнительным условием

$$q_1 \leqslant t^{1-2\varepsilon_0} = \tau_1 \tag{3.11}$$

а $S_3(a)$ — определяется дополнительным условием

$$\tau_1 < q_1 \leqslant \tau_0. \tag{3.12}$$

Если q_1 с условием (3.11) или (3.12) нет, тогда соответствующую сумму объявляем пустой и тогда дополнительная сумма совпадает с $S_1(a)$. Такое разбиение надо сделать по следующей причине. Суммирование по $q_0 \leqslant \tau_0/q_1$ в (3.2) обеспечивает нам особый ряд проблемы только в том случае, если длина этой суммы τ_0/q_1 не меньше некоторой фиксированной степени N. Условие (3.11) обеспечивает нам такой степенной запас. Поэтому эту часть суммы (3.2) можно оценить стандартным путем.

Условие (3.12) сводит этот запас на нет и стандартный путь здесь не применим. Но ограничение q_1 снизу в (3.12) позволяет отправить в остаток эту часть суммы (3.2) по тем же причинам, что и малые дуги ранее, но с привлечением более сложной техники работы [10].

Для этого в соответствии с равенством (3.10) представим интеграл (3.9) в виде суммы двух интегралов

$$I_1(n) = I_2(n) + I_3(n) \tag{3.13}$$

и рассмотрим квадратичное среднее

$$P_3(N) = \sum_{n=0}^{\infty} |I_3(n)|^2 e^{-n/N}. \tag{3.14}$$

Действуя аналогично как и со средним (2.14) получаем оценку:

$$P_3(N) \ll \tau t^{2\varepsilon_0} \int_M |S_3(a)|^2 da. \tag{3.15}$$

Затем используя явный вид $S_3(a)$ из (3.2) с условием (3.12) и действуя в духе Линниковских оценок из работы [10], но с современными плотностными теоремами большого решета из книги [6], получаем оценку

$$\int_M |S_3(a)|^2 da \ll N \log^{14} N.$$

Эта оценка вместе с (3.15) приводит к окончательной оценке (3.14):

$$P_3(N) \ll N\tau t^{2\varepsilon_0} \log^{14} N. \tag{3.16}$$

Из (3.16) по аналогии с леммой 2.1 получаем:

Лемма 3.1. *Количество $n \in (N/2, N]$ для которых выполняется оценка*

$$|I_3(n)| > \sqrt{n}\, n^{-\varepsilon_1}$$

не превосходит по своему порядку величины

$$N^{2\varepsilon_1} \tau t^{2\varepsilon_0} \log^{14} N. \tag{3.17}$$

Эти числа назовем исключительными. Для всех остальных справедлива оценка

$$|I_3(n)| \leqslant n^{1/2-\varepsilon_1}. \tag{3.18}$$

Эти числа назовем нормальными. $\varepsilon_1 > 0$ мало но фиксировано и совпадает с аналогичным параметром из леммы 2.1.

Следствие 3.1. *Для нормальных $n \in (N/2, N]$ справедливо равенство:*

$$I_1(n) = I_2(n) + \theta n^{1/2-\varepsilon_1}, \tag{3.19}$$

где $\theta \ll 1$.

Объединяя исключительное множество n с мерой (3.17) с аналогичным множеством, имеющим меру (3.6), получаем, что общее множество исключительных $n \in (N/2, N]$ имеет порядок не больше величины

$$(N^{2\varepsilon_1} \tau t^{2\varepsilon_0} + N^{0,65}) \log^{14} N. \tag{3.20}$$

Подставляя (3.19) в (3.1) получаем:

$$P_0(n) = 2e^{-n/N} \sqrt{n/\pi}\, \mathfrak{S}(n) - I_2(n) + \theta n^{1/2-\varepsilon_2}, \tag{3.21}$$

где $\varepsilon_2 > 0$ малое но фиксированное число, определенное остатками в (3.1) и в (1.4).

4. Оценка интеграла $I_2(n)$. Исходя из определения суммы $S_2(a/q + a)$ в (3.2) с условием (3.11) выпишем точное значение интеграла $I_2(n)$ из (3.13). Для этого прежде всего воспользуемся равенством (1.10) из леммы 1.7. Затем представим вычет a модуля q в форме

$$a = a_1 q_0 + a_0 q_1 \tag{4.1}$$

используя разложение $q = q_0 q_1$, $(q_0, q_1) = 1$ из леммы 1.3, равенство (1.6). Причем в (4.1) a_0 пробегает приведенную систему вычетов модуля q_0, a_1 — модуля q_1.

В этом случае в сумме (3.2) для характера $\chi_1(aq_0^{-1})$ получаем значение

$$\chi_1(aq_0^{-1}) = \chi_1(a_1). \tag{4.2}$$

Кроме того, на основе следствия 4, леммы 1.6 из § 1 получаем равенство

$$g(a, q) = g(a_0, q_0)g(a_1, q_1). \tag{4.3}$$

В силу следствия 1, леммы 1.6, § 1 модуль q_0 должен делиться на степень двойки не меньше второй, чтобы была отлична от нуля сумма $g(a_0, q_0)$, если q_0 четно. Но в сумме (3.2) присутствует $\mu(q_0)$ — функция Мебиуса, которая в этом случае равна нулю. Поэтому q_0 нечетно и бесквадратно. Следствием этого факта и равенства 1) леммы 1.6, § 1 получаем равенство:

$$\bar g(a_0, q_0) = \bar\varepsilon_{q_0}\cdot\left(\frac{a_0}{q_0}\right)\sqrt{q_0}. \tag{4.4}$$

Из этого равенства и следствия 2 леммы 1.6, § 1 получаем:

$$\sum_{(a_0,q_0)=1}\bar g(a_0, q_0)\exp\left(2\pi i\frac{a_0}{q_0}n\right) = \left(\frac{n}{q_0}\right)q_0. \tag{4.5}$$

Причем это равенство справедливо как для случая $(n, q_0) = 1$, так и для случая $(n, q_0) > 1$. В последнем случае справа и слева в равенстве (4.5) стоят нули, т.е. равенство сохраняется.

Подставляя (4.1)–(4.5) в сумму $S_2(a/q+\alpha)$ и выполняя отдельные суммирования по a_0, $(a_0, q_0) = 1$ и a_1, $(a_1, q_1) = 1$ получаем:

$$I_2(n) = \sum_{1<q_1\leqslant\tau_1}\frac{1}{q_1\varphi(q_1)}\sum_{\chi_1}{}^{*}\bar\tau_{\chi_1}G_n(q_1, \chi_1)\times \tag{4.6}$$
$$\times\sum_{q_0\leqslant\tau_0 q_1^{-1}}\mu(q_0)\left(\frac{n}{q_0}\right)\varphi^{-1}(q_0)I_{\chi_1}(n)+\theta N^{-c},$$

где

$$G_n(q_1, \chi_1) = \sum_{(a_1,q_1)=1}\bar g(a_1, q_1)\chi_1(a_1)\exp\left(2\pi i\frac{a_1}{q_1}n\right), \tag{4.7}$$

$$I_{\chi_1}(n) = \int_{-1/q\tau}^{1/q\tau}S_{\chi_1}(z)\frac{e^{2\pi i\alpha n}}{\sqrt{z}}\,d\alpha. \tag{4.8}$$

Сумма $S_{\chi_1}(z)$ определена в (1.7), $c\geqslant 1$ — константа. Поведение суммы $G_n(q_1, \chi_1)$ управляет арифметическими тонкостями проблемы.

Чтобы понять это, упростим ситуацию и будем считать q_1 — нечетными и бесквадратными. Тогда по лемме 1.6 пункт 1), справедливо равенство

$$\bar g(a_1, q_1) = \bar\varepsilon_{q_1}\cdot\left(\frac{a_1}{q_1}\right)\sqrt{q_1}.$$

Подставляя это равенство в (4.7), получаем:

$$G_n(q_1, \chi_1) = \bar\varepsilon_{q_1}\sqrt{q_1}\sum_{(a_1,q_1)=1}\left(\frac{a_1}{q_1}\right)\chi_1(a_1)\exp\left(2\pi i\frac{a_1}{q_1}n\right). \tag{4.9}$$

Из этого равенства видно, что самая неприятная ситуация для нас возникает когда $q_1|n$ и $\chi_1(a_1) = \left(\frac{a_1}{q_1}\right)$. В этом случае

$$G_n(q_1, \chi_1) = \bar\varepsilon_{q_1}\varphi(q_1)\sqrt{q_1}.$$

Поэтому

$$\bar\tau_{\chi_1}G_n(q_1, \chi_1) = \varepsilon_{q_1}^2 q_1\varphi(q_1). \tag{4.10}$$

Если $\varepsilon_{q_1}^2 = \pm 1$ и q_1 — зигелевский модуль, тогда после подстановки (4.10) в (4.6) с учетом того, что сумма по q_0 дает особый ряд проблемы по следствию 1.2, получаем почти-главный член с обратным знаком. Это самое тонкое место работы и в нем мы разберемся подробно в следующих параграфах.

5. Выделение особого ряда. Для выделения особого ряда по $q_0\leqslant\tau_0 q_1^{-1}$ в (4.6) необходимо избавиться от зависимости интеграла $I_{\chi_1}(n)$ от q_0. Эта зависимость слабая и от нее легко освободиться. Подставляя определение $S_{\chi_1}(z)$ из (1.7) в (4.8) и производя замену переменной

$$\alpha\to n/N+2\pi i\alpha n = z$$

получаем:

$$I_{\chi_1}(n) = e^{-n/N}\sum_{\varrho}n^{\varrho-1/2}I_0(\varrho)\Gamma(\varrho), \tag{5.1}$$

где

$$I_0(\varrho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar z_0}^{z_0}z^{-1/2-\varrho}e^{z}\,dz, \tag{5.2}$$
$$\varrho = \sigma+i\gamma,\quad z_0 = \frac{n}{N}+2\pi i\frac{n}{q\tau}.$$

Контур интегрирования в (5.2) — прямая соединяющая точки $\bar z_0$ и z_0. Зависимость $I_0(\varrho)$ от q_0 идет через $\bar z_0, z_0$ — пределы интегрирования, т. к. по определению $q = q_0q_1$. Для того, чтобы избавиться от нее, раздвинем пределы интегрирования до точек $\bar z_1$ и z_1, где

$$z_1 = \frac{n}{N}+2\pi i\frac{n}{q_1\tau} \tag{5.3}$$

и затем вычтем лишние куски:

$$I_0(\varrho) = I_1(\varrho) - I_\varrho(z_0, z_1) - I_\varrho(\bar z_1, \bar z_0), \tag{5.4}$$

где

$$I_1(\varrho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar z_1}^{z_1} z^{-1/2-\varrho} e^z dz, \tag{5.5}$$

$$I_\varrho(z_0, z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_1} z^{-1/2-\varrho} e^z dz. \tag{5.6}$$

Интеграл (5.6) — типичный интеграл из метода перевала, поэтому когда $\gamma = \operatorname{Im}\varrho$ велико:

$$|\gamma| \geqslant \tfrac{1}{2}|z_0|$$

тогда этим методом получаем оценку

$$I_\varrho(z_0, z_1) \ll |\gamma|^{-\sigma}\exp\left[|\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{|z_1|}\right)\right]. \tag{5.7}$$

Если γ мало:

$$|\gamma| \leqslant \tfrac{1}{2}|z_0|$$

тогда используя монотонность и первую производную получаем оценку:

$$I_\varrho(z_0, z_1) \ll |z_0|^{-\sigma}\exp\left[|\gamma|\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{|z_1|}\right)\right]. \tag{5.8}$$

Поэтому с учетом оценки для $\Gamma(\varrho)$ по формуле Стирлинга:

$$\Gamma(\varrho) \ll (|\gamma|+1)^{\sigma-1/2}e^{-\pi|\gamma|/2}$$

получаем общую оценку для любых γ:

$$\Gamma(\varrho)I_\varrho(z_0, z_1) \ll \frac{1}{\sqrt{|z_0|}}\exp\left(-\frac{|\gamma|}{|z_1|}\right), \quad \sigma \geqslant 1/2. \tag{5.9}$$

Если $\sigma < 1/2$, то вклад всех таких нулей в правую часть (4.6) оценивается тривиально величиной

$$\tau_0\sqrt{N/\tau} < N^{3\delta/2}.$$

Используя определение z_0 в (5.2) и z_1 в (5.3) и учитывая, что $n \in (N/2, N]$, перепишем оценку (5.9) в виде:

$$\Gamma(\varrho)I_\varrho(z_0, z_1) \ll \sqrt{\frac{q\cdot\tau}{N}}\exp\left(-|\gamma|\frac{q_1\cdot\tau}{N}\right). \tag{5.10}$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла $I_\varrho(\bar z_1, \bar z_0)$.

Оценка (5.10) вместе с плотностной теоремой 12.2 из [6] показывает, что вклад двух последних интегралов из правой части (5.4) в (4.6) не превосходит величины

$$\sqrt{n}\,\tau_0^{-0,5s_0}. \tag{5.11}$$

Интеграл $I_1(\varrho)$ из (5.4) уже не зависит от q_0, поэтому при подстановке его в (4.6) мы можем выделить особый ряд проблемы на основе равенства (1.4). Отметим, что интеграл $I_1(\varrho)$ из (5.4) так же является типичным интегралом метода перевала и для него справедлива оценка, аналогичная (5.7). Вместе с оценкой для $\Gamma(\varrho)$ получаем:

$$\Gamma(\varrho)I_1(\varrho) \ll (|\gamma|+1)^{-1/2}\exp\left(-|\gamma|\frac{q_1\tau}{N}\right). \tag{5.12}$$

Остается последняя техническая тонкость, связанная с присутствием лишнего множителя по делителям q_1 в особом ряде на основе равенства (1.4). В пересчете на сумму из (4.6) это означает, что у нас вместе с особым рядом будет стоять множитель

$$\prod_{p|q_1, p\nmid n}\left(1 - \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{p-1}\right)^{-1}. \tag{5.13}$$

Для того, чтобы нейтрализовать его, обратимся снова к сумме G_n из (4.7). Разобъем q_1 на два взаимнопростых множителя:

$$q_1 = q_2q_3, \quad (q_2, q_3) = 1, \tag{5.14}$$

где $(q_3, n) = 1$, а все простые множители q_2 делят n. Тогда произведение (5.13) является фактически произведением

$$\prod_{p|q_3}\left(1 - \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{p-1}\right)^{-1}, \quad p > 2. \tag{5.15}$$

Кроме того, на основе (5.14) характер χ_1 распадается на два:

$$\chi_1 = \chi_2\chi_3,$$

где χ_2 — первообразный характер модуля q_2, χ_3 — первообразный характер модуля q_3. В соответствии с этим получаем:

$$G_n(q_1, \chi_1) = \chi_2(q_3)\chi_3(q_2)G_n(q_2, \chi_2)G_n(q_3, \chi_3). \tag{5.16}$$

В связи с условием взаимной простоты $(n, q_3) = 1$ для суммы $G_n(q_3, \chi_3)$ справедлива оценка:

$$|G_n(q_3, \chi_3)| \leqslant q_3.$$

Если для $G_n(q_2, \chi_2)$ воспользоваться тривиальной оценкой:

$$|G_n(q_2, \chi_2)| \leqslant \varphi(q_2)\sqrt{q_2}$$

тогда получаем общую оценку:

$$\frac{|\bar{\tau}_{\chi_1} G_n(q_1, \chi_1)|}{q_1\varphi(q_1)} \leqslant \frac{\sqrt{q_3}}{\varphi(q_3)}. \tag{5.17}$$

Поэтому перед особым рядом в (4.6) на самом деле будет стоять не само произведение (5.15), а величина по модулю не большая чем

$$\frac{\sqrt{q_3}}{\varphi(q_3)} \prod_{p|q_3} \left(1 - \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{p-1}\right)^{-1}. \tag{5.18}$$

Ясно, что при $q_3 \to \infty$ эта величина стремится к 0, поэтому при любом нечетном q_3 она $\ll 1$. Вместе с теоремой Линника–Галлахера [6] этого достаточно для нетривиальной оценки (4.6) при отсутствии зигелевского нуля.

Отметим, что если $(n, q_1) = 1$ тогда $q_3 = q_1$ и левая часть (5.17) имеет порядок не выше чем

$$\frac{q_1}{\varphi(q_1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{q_1}}.$$

Вместе с оценкой (5.12) это обеспечивает запас сходимости порядка

$$\frac{q_1}{\varphi(q_1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{q_1|\varrho|}} \tag{5.19}$$

для всех q_1 взаимнопростых с n. Но если n — само простое число, тогда все $q_1 \leqslant \tau_0$ взаимнопросты с n. Поэтому для простых n запас сходимости (5.19) вместе с плотностными теоремами большого решета в форме [6] обеспечивает оценку (0.9), о которой говорилось во введении. Аналогичный эффект верен и для бинарной проблемы Гольдбаха (0.8).

6. Эффект Линника–Дейринга–Хейльброниа. Остался самый важный случай, когда есть зигелевский модуль $q_1 \leqslant \tau_1$, или другими словами, когда $L(s, \chi_1)$ имеет реальный нуль β с условием

$$\beta > 1 - \frac{a_1}{\log \tau_1}, \tag{6.1}$$

где χ_1 — примитивный квадратичный характер модуля q_1, $a_1 > 0$ — абсолютная константа, определяющая общую границу всех нулей ϱ

всех L рядов модулей $q_1 \leqslant \tau_1$ и $|\mathrm{Im}\,\varrho| \leqslant \tau_1^{c_1}$ где $c_1 \geqslant 1$ — абсолютная константа [1].

Обход этой трудности и составляет самую тонкую часть работы [5]. Этот зигелевский ноль будет обязательно один. Потому что если бы их было два или больше, они бы начали „мешать" друг другу по эффекту Линника–Дейринга–Хейльбронна [3].

С этой точки зрения основное отличие особого ряда бинарной задачи Гольдбаха (0.1) от бинарной задачи Харди–Литтльвуда (0.3) состоит в том, что первый из них монотонно растет с ростом числа простых делителей n, в то время как особый ряд задачи (0.3) колеблется в пределах от $(\log\log n)^{-2}$ до $(\log\log n)^{+2}$. Этим и объясняется скрупулезное выписывание явного вида $I_2(n)$ в (4.6).

В случае зигелевского нуля (6.1) нам уже не обойтись оценкой (5.17) и поведением величины (5.18) при $q_3 \to \infty$, нужно точно знать, что модуль величины

$$W = \frac{\bar{\tau}_{\chi_1} G_n(q_1, \chi_1)}{q_1\varphi(q_1)} \prod_{p|q_3} \left(1 - \frac{\left(\frac{n}{p}\right)}{p-1}\right)^{-1} \tag{6.2}$$

всегда $\leqslant 1$.

Мы уже видели выше, что эта оценка справедлива, когда $q_1|n$, $q_1 \equiv 1\ (2)$ и q_1 — бесквадратно. Теперь надо доказать, что эта оценка справедлива в общем случае модуля q_1 примитивного квадратичного характера χ_1. Но модуль примитивного квадратичного характера может быть:

1) либо нечетен и бесквадратен, тогда

$$\chi_1(a_1) = \left(\frac{a_1}{q_1}\right),$$

2) либо $q_1 = 4q$, где q — нечетно и бесквадратно, тогда

а) $\chi_1(a) = \left(\frac{q}{a}\right)$, если $q \equiv 3\ (4)$, $\chi_1(-1) = -1$ или

в) $\chi_1(a) = \chi_4(a)\left(\frac{a}{q}\right)$, если $q \equiv 1\ (4)$, $\chi_1(-1) = +1$,

3) либо $q_1 = 8q$, где q — нечетно и бесквадратно, тогда

а) $\chi_1(a) = \left(\frac{2q}{a}\right)$, если $q \equiv 3\ (4)$, $\chi_1(-1) = +1$ или

в) $\chi_1(a) = \chi_4(a)\left(\frac{2q}{a}\right)$, если $q \equiv 1\ (4)$, $\chi_1(-1) = -1$.

Этими случаями исчерпываются все модули q_1 с первообразными квадратичными характерами для них.

Рассмотрим оценку (6.2) для случая 1, когда $q_3 \geqslant 1$ в (5.14). Тогда (5.16) принимает вид

$$G_n(q_1, \chi_1) = \left(\frac{q_2}{q_3}\right)\left(\frac{q_3}{q_2}\right) G_n(q_2, \chi_2) G_n(q_3, \chi_3),$$

где

$$G_n(q_2, \chi_2) = \bar{\varepsilon}_{q_2}\varphi(q_2)\sqrt{q_2},$$

$$G_n(q_3, \chi_3) = \bar{\varepsilon}_{q_3}\mu(q_3)\sqrt{q_3}.$$

Кроме того, на основе следствия 5, леммы 1.6

$$\bar{\tau}_{\chi_1} = \left(\frac{q_2}{q_3}\right)\left(\frac{q_3}{q_2}\right)\bar{\varepsilon}_{q_2}\bar{\varepsilon}_{q_3}\sqrt{q_2 q_3}.$$

Поэтому в случае 1

$$W = \varepsilon_{q_1}^2 \mu(q_3) \prod_{p|q_3} \left(p - \left(\frac{n}{p}\right) - 1\right)^{-1}. \tag{6.3}$$

По условию 1) и (5.14) q_1 — нечетно, поэтому правая часть (6.3) по модулю $\leqslant 1$, т.е. нужная оценка выполняется.

Кроме того, из (6.3) следует, что если $q_3 \geqslant 3$, тогда справедлива оценка:

$$|W| \leqslant 1/3 \tag{6.4}$$

если $q_3 \geqslant 5$, $q_3 \equiv 1\ (2)$, либо $q_3 = 3$ и $\left(\frac{n}{3}\right) = -1$.

Случай 2а. В этом случае

$$\tau_{\chi_1} = \chi_4(q)\tau_{\chi_4}\tau_{\chi_q},$$

$$G_n(4q, \chi_1) = -G_n(4, \chi_4)\cdot G_n(q, \chi_q), \tag{6.5}$$

где

$$\chi_4(a) = (-1)^{(a-1)/2}, \quad \chi_q(a) = \left(\frac{a}{q}\right), \quad a \equiv 1\ (2).$$

Поэтому этот случай сводится к произведению бесквадратного нечетного модуля и модуля 4. Но случай нечетного модуля q мы уже рассмотрели выше и получили равенство (6.3). Осталось рассмотреть

модуль 4. Из леммы 1.6, пункт 2) легко следует равенство

$$\frac{\bar{\tau}_{\chi_4} G_n(4, \chi_4)}{4\varphi(4)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \equiv 0, 1\ (4), \\ -1, & \text{если} \quad n \equiv 2, 3\ (4). \end{cases} \tag{6.6}$$

Модуль правой части (6.6) равен 1.

Случай 2в. В этом случае в системе равенств (6.5) правая часть второго равенства меняет знак:

$$G_n(4q, \chi_1) = G_n(4, \chi_4)\, G_n(q, \chi_q).$$

Поэтому в равенстве (6.6) в этом случае правая часть также изменит знак, но по модулю она снова будет равна 1.

Случай 3а. В этом случае

$$\tau_{\chi_1} = \chi_4(q)\tau_{\chi_8}\tau_{\chi_q},$$

$$G_n(8q, \chi_1) = G_n(8, \chi_8)\, G_n(q, \chi_q), \tag{6.7}$$

где

$$\chi_8(a) = \chi_4(a)\left(\frac{2}{a}\right), \quad \chi_q(a) = \left(\frac{a}{q}\right), \quad a \equiv 1(2).$$

Поэтому случай 3а сводится к произведению случая с нечетным бесквадратным модулем и модулем 8. Снова по лемме 1.6 пункт 2) получаем равенство

$$\frac{\bar{\tau}_{\chi_8} G_n(8, \chi_8)}{8\varphi(8)} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно, т.е. } n \equiv 1\ (2), \\ 1, & \text{если } n = 2n_1,\ n_1 \equiv 0, 1\ (4), \\ -1, & \text{если } n = 2n_1,\ n_1 \equiv 2, 3\ (4). \end{cases} \tag{6.8}$$

В этом случае справедлива оценка

$$|W| \leqslant 1. \tag{6.9}$$

Случай 3в аналогичен случаю 3а с теми же равенствами (6.7), (6.8) и оценкой (6.9). Разница состоит в том, что в первом случае мы имеем дело с нечетным характером, а во втором — с четным. Это сказывается только на знаке сомножителя с нечетным модулем q.

Теперь осталось заметить, что для зигелевского нуля β с условием (6.1) интеграл $I_1(\beta)$ из (5.5) явно вычисляется:

$$e^{-n/N}\cdot I_1(\beta) = n^{\beta-1/2}\left[\frac{\sin\pi(\beta-\frac{1}{2})}{\pi(\beta-\frac{1}{2})}\Gamma(\beta-\tfrac{1}{2}) + \theta\tau_0^{-\varepsilon_0}\right]. \tag{6.10}$$

Из вычислений этого параграфа, в частности, из оценки (6.4), видно, что если зигелевский модуль $q_1 = 2^m q$, где $m = 0, 2, 3$, $q \equiv 1\ (2)$, тогда не тривиальным является случай когда q делит $3n$. Причем если $3 \nmid n$

тогда должно быть $\left(\frac{n}{3}\right) = +1$ и $q_3 = 3$ либо если $3 \mid n$, тогда $q_3 = 1$ в смысле разложения (5.14). В этом случае величина (6.2) может принимать только три значения: 0, ± 1. Это следует из равенств (6.3), (6.6) и (6.8). Значения 0, -1 являются тривиальными в том смысле, что в этих случаях зигелевский ноль либо не дает вклада в (3.21), либо этот вклад положительный. Не тривиальным является случай когда $W = +1$. Подставляя в этом случае (6.10) в (3.21) и пользуясь теоремой Линника–Галлахера [1] и эффектом Линника–Дейринга–Хейльбронна [4], [3] для всех остальных нулей, получаем оценку снизу:

$$P_{3/2}(n) > G(n)\sqrt{n/\pi}(1-n^{\beta-1}) + \theta\cdot n^{1/2-\varepsilon}, \tag{6.11}$$

где $\varepsilon > 0$ определяется остатками в равенствах (1.4), (2.24), (3.1) и (4.23).

Если зигелевский ноль β удовлетворяет условию

$$(1-\beta)\log n \geqslant 1,$$

тогда правая часть (6.11) сразу же обеспечивает нам разрешимость уравнения (0.3).

Если β удовлетворяет условию

$$(1-\beta)\log n < 1$$

тогда правая часть (6.11) вместе с теоремой Пейджа обеспечивает разрешимость (0.3) эффективно для малых q_1, лежащих в интервале

$$q_1 \leqslant n^{\varepsilon}. \tag{6.12}$$

Если q_1 лежит в интервале

$$n^{\varepsilon} < q_1 \leqslant \tau_1, \tag{6.13}$$

тогда разрешимость (0.3) обеспечивается оценкой (6.11) с помощью неэффективной теоремы Зигеля. Здесь мы воспользовались теоремой Зигеля для упрощения техники счета. На самом деле, усложнив доказательство, можно получить эффективную разрешимость и для интервала (6.13). Для того, чтобы завершить доказательство оценки (0.4) при $k = 2$, осталось заметить, что множество исключительных $n \leqslant N$ мы оценили величиной (3.20). Вместе с равенствами (2.4) и (2.6) величина (3.20) равна

$$[N^{1-\delta(1-2\varepsilon_0)+2\varepsilon_1} + N^{0,65}]\log^{15} N. \tag{6.14}$$

Полагая $\varepsilon_0 = 1/8$, $\varepsilon_1 = \delta/8$ и выбирая δ из условия (0.2), получаем, что (6.14) по своему порядку не больше величины

$$N^{1-0,5\delta}\log^{15} N.$$

Это завершает доказательство оценки (0.4) при $k = 2$.

7. Заключение. Случай оценки (0.4) при $k = 3$ аналогичен случаю $k = 2$ вплоть до § 5 включительно. Различия наступают в § 6. В случае $k = 3$ он становится тривиальным в смысле зигелевского нуля. Это связано с тем, что сумма $G_n(q_1, \chi_1)$, определенная равенством (4.7), при $k = 3$ имеет в качестве составляющей кубическую сумму Гаусса

$$g(a_1, q_1) = \sum_{x=1}^{q_1} \exp\left(2\pi i \frac{a_1}{q_1} x^3\right). \tag{7.1}$$

Эта сумма не тривиальна только на простых делителях $p \mid q_1$ с условием

$$p \equiv 1\,(3). \tag{7.2}$$

Поэтому для прояснения ситуации можно считать, что q_1 само простое число вида (7.2). В этом случае

$$g(a_1, q_1) = \left[\varepsilon_{q_1}\cdot\left(\frac{a_1}{q_1}\right)_3 + \bar{\varepsilon}_{q_1}\cdot\left(\frac{\bar{a}_1}{q_1}\right)_3\right]\sqrt{q_1}, \tag{7.3}$$

где $\left(\frac{a_1}{q_1}\right)_3$ — кубический символ степенного вычета, ε_{q_1} — знак суммы Гаусса кубического характера.

Поэтому если $\chi_1(a_1)$ — квадратичный характер модуля q_1, т. е. $\chi_1(a_1) = \left(\frac{a_1}{q_1}\right)_2$, тогда нетривиальная часть суммы $G_n(q_1, \chi_1)$ сводится к сумме

$$\sum_{(a_1,q_1)=1} \left(\frac{a_1}{q_1}\right)_3 \left(\frac{a_1}{q_1}\right)_2 \exp\left(2\pi i \frac{a_1}{q_1} n\right).$$

Это сумма Гаусса характера 6-ой степени. Поэтому вся сумма в этом случае имеет оценку

$$|G_n(q_1, \chi_1)| \leqslant 2q_1$$

и величина типа (6.2) в этом случае имеет порядок $q_1^{-1/2}$. Поэтому вклад от зигелевского нуля в этом случае уходит в остаток по тривиальной причине.

„Опасными" с точки зрения оценки величины типа (6.2) в случае $k=3$ являются кубические характеры $\chi_1(a_1)$. Но L-ряды с кубическими характерами не имеют зигелевских нулей. Поэтому в случае $k=3$ достаточно теоремы Линника–Галлахера [1] без эффекта Линника–Дейринга–Хейльбронна [3], [4].

Все эти замечания характерны для любого нечетного k.

Уравнение (0.7) отличается от уравнения (0.5) с точки зрения кругового метода, тем, что на малых дугах надо использовать оценки тригонометрических сумм И. М. Виноградова для полиномов от простых чисел.

К этому же кругу идей относятся уравнения

$$n=p_1^2+p_2^2+p_3^2 \quad \text{и} \quad n=p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$$

потому что два простых квадрата ведут себя как одно простое число с точки зрения метода большого решета.

Литература

[1] P. X. Gallagher, *A large sieve density estimate near* $\sigma=1$, Invent. Math 11 (1970), pp. 320–339.

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum' (V) A further contribution to the study of Goldbach's problem*, Proc. London Math. Soc. (2) 22 (1924), pp. 46–56.

[3] M. Jutila, *On Linnik's constant*, Math. Scand. 41 (1977), pp. 45–62.

[4] Yu. V. Linnik, *On the least prime in an arithmetic progression, I, II*, Mat. Sb. (N. S.) 15 (1944), pp. 139–178, 347–367.

[5] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *The exceptional set in Goldbach's problem*, Acta Arith. 27 (1975), pp. 353–370.

[6] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes in Mathematics 227, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[7] L. A. Takhtajan and A. I. Vinogradov, *The Gauss–Hasse hypothesis on real quadratic fields with class number one*, J. Reine Angew. Math. 335 (1982), pp. 40–87.

[8] А. И. Виноградов, *Об одной почти бинарной задаче*, Изв. АН СССР, серия матем., 20(1956), стр. 713–750.

[9] — *О числе классов идеалов и группе классов дивизоров*, Изв. АН СССР, серия матем., 27(3)(1963), стр. 561–576.

[10] Ю. В. Линник, *Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха*, Изв. АН СССР, серия матем., 16(1952), стр. 347–368.

[11] И. В. Поляков, *Об исключительном множестве суммы простого и квадрата целого*, Изв. АН СССР, серия матем., 45(6)(1981), стр. 1391–1423.

Поступило 26.01.1984
и в исправленной форме 7.12.1984 (1395)

ACTA ARITHMETICA
XLVI (1985)

A congruence for the index of a unit of a real abelian number field

by

KENNETH S. WILLIAMS* and KENNETH HARDY** (Ottawa, Ont., Canada)

1. Introduction. Let K be a real abelian extension of the rational number field Q. As K is abelian, by the Kronecker–Weber theorem, K is contained in a cyclotomic field $Q(\zeta_n)$, where $\zeta_n=\exp(2\pi i/n)$, $n\not\equiv 2 \pmod 4$. We let $Q(\zeta_n)$ be the smallest such field containing K, so that n is the conductor of K. The ring of integers of $Q(\zeta_n)$ is

$$R=\Big\{\sum_{j=0}^{\varphi(n)-1} a_j\zeta_n^j\colon\ a_j\in Z\ \ (0\leqslant j\leqslant \varphi(n)-1)\Big\},$$

where φ denotes Euler's totient function and Z denotes the domain of rational integers.

Now let p be a prime $\equiv 1 \pmod n$, say, $p=nf+1$. Let g be a fixed primitive root modulo p. The cyclotomic polynomial of index n has $\varphi(n)$ distinct roots modulo p. One of these roots is g^f. Thus, by Kummer's theorem, the ideal

$$P=pR+(\zeta_n-g^f)R$$

of R is a prime ideal of norm p which divides pR. Thus the canonical homomorphism

$$\lambda\colon\ R\to R/p \xrightarrow{\sim} Z/pZ \tag{1.1}$$

maps ζ_n onto $g^f \pmod p$. We have thus shown that for any given primitive root $g \pmod p$ there is a unique homomorphism $\lambda\colon R\to Z/pZ$ satisfying $\lambda(\zeta_n)\equiv g^f \pmod p$. This homomorphism is central to the rest of this paper.

For any integer a not divisible by p, the least non-negative integer b such that $a\equiv g^b \pmod p$ is called the *index of a with respect to g* and is denoted by $\operatorname{ind} a$. (We re-emphasize that g is regarded as fixed.) The purpose

* Research supported by Natural Sciences and Engineering Research Council Canada Grant A-7233.

** Research supported by Natural Sciences and Engineering Research Council Canada Grant A-8049.