References

[1] V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (translated by K. Vogtmann and A. Weinstein), Springer-Verlag, New York 1978.

[2] A. S. Besicovitch, *Sets of fractional dimension (IV): On rational approximation to real numbers*, J. London Math. Soc. 9 (1934), pp. 126–131.

[3] J. D. Bovey and M. M. Dodson, *The fractional dimension of sets whose simultaneous rational approximation have errors with a small product*, Bull. London Math. Soc. 10 (1978), pp. 213–218.

[4] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[5] — *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, 1959.

[6] M. M. Dodson, *A note on the Hausdorff–Besicovitch dimension of systems of linear forms*, Acta Arith. 44 (1984), pp. 87–98.

[7] M. M. Dodson and J. A. G. Vickers, *Exceptional sets in Kolmogorov–Arnol'd–Moser theory*, J. Phys. (in press).

[8] H. G. Eggleston, *Sets of fractional dimension which occur in some problems in number theory*, Proc. London Math. Soc. (2) 54 (1952), pp. 42–93.

[9] V. Jarník, *Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass*, Mat. Sbornik 36 (1929), pp. 371–382.

[10] — *Über die simultanen diophantischen Approximationen*, Math. Zeitschrift 33 (1931), pp. 503–543.

[11] J. F. C. Kingman and S. J. Taylor, *Introduction to Measure and Probability*, Cambridge University Press, 1966.

[12] V. G. Sprindžuk, *Metric Theory of Diophantine Approximations* (translated by R. A. Silverman), John Wiley, 1979.

[13] Kunrui Yu, *Hausdorff dimension and simultaneous rational approximation*, J. London Math. Soc. (2) 24 (1981), pp. 79–84.

COMPUTING LABORATORY
UNIVERSITY OF KENT
CANTERBURY
KENT CT2 7NZ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF YORK
HESLINGTON
YORK YO1 5DD

Received on 6.3.1984
and in revised form on 5.3.1985 (1409)

ACTA ARITHMETICA
XLV (1986)

Локальная предельная теорема для мультипликативных арифметических функций

С. Т. Туляганов (Ташкент)

Одной из основных задач вероятностной теории чисел является изучение локальных предельных законов распределения значений арифметических функций. Локальным предельным теоремам для аддитивных арифметических функций посвящена достаточно обширная литература. В случае мультипликативных функций этот вопрос до 1970 года оставался не изученным, а в последние годы интенсивно исследуется многими авторами (см., например, [4]–[9]).

В 1973 г. Б. В. Левин и А. А. Юдин [3] показали, что для аддитивных функций локальный закон распределения на простых числах индуцирует локальный закон распределения на натуральном ряде. Центральным результатом работы [3], позволяющим точно судить о поведении главного члена, является следующая

Теорема. *Пусть $\psi(n)$ — вещественная аддитивная функция удовлетворяющая условиям:*

1) $\dfrac{1}{\pi(N)}\sum\limits_{p\leqslant N,\psi(p)=\omega} 1 = \tau_\omega + \left(\varepsilon_N(\omega)/(\ln N)^{1+\varepsilon}\right)$, *где* $\varepsilon > 0$, $\sum\limits_{\omega} |\varepsilon_N(\omega)| < < +\infty$ *равномерно по* N;

2) *не существует* $h \geqslant 2$, $h \in N$ *такого, что*

$$\sum_{k\equiv 0 (\mathrm{mod}\, h)} \tau_k = 1 \quad u \quad \sum_{p,\psi(p)\notin Z} 1/p < +\infty;$$

3) $\sigma^2 = \sum\limits_k \tau_k\cdot k^2 < +\infty$.

Тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N,\psi(n)=\theta} 1 = \frac{A(\theta)}{\sigma\sqrt{2\pi\ln_2 N}}\exp\left\{-\frac{(E\ln_2 N-\theta)^2}{2\sigma^2\ln_2 N}\right\} + o\left(\frac{1}{\ln_2 N}\right),$$

где $E = \sum\limits_k \tau_k\cdot k$, $A(\theta)$ *— константа, зависящая от* ψ *и* θ.

Результаты работы [3] тем же методом в [9] были обобщены для мультипликативных функций. Но там аналог вышеприведенной теоремы доказывается за исключением классов функций $M_\beta^0(\alpha)$.

Р. Скрабутенасом [6] также изучены локальные законы распределения для мультипликативных функций $g(n)$. Ослабляя условие 1) заменой $1/\ln^{1+\varepsilon}N$ в остаточном члене на $1/\ln^{\varepsilon}N$, но требуя целозначность $\ln|g(n)|$ для $g(n)\neq 0$ и сходимость рядов

$$(*)\qquad \sum_{\omega}|\omega|^3\tau_\omega,\quad \sum_{\omega}|\omega\varepsilon_N(\omega)|,\quad \sum_{p,j\geqslant 2}\sum_{g(p^j)\neq 0}\big|\ln|g(p^j)|\big|/p^j,$$

он доказал локальную предельную теорему с оценкой остаточного члена $O(1/\ln\ln N)$. Усиливая требования (*), там же получено асимптотическое разложение. Отметим, что теорема 3 [6] и следствие из нее содержатся с более точным остаточным членом в основной лемме статьи [11].

Э. Манставичюс [7] для мультипликативных функций, которые принимают положительные ограниченные значения для подавляющего большинства простых чисел и для которых третий ряд в (*) сходится, получил локальную теорему с остаточным членом $O(1/\ln\ln N)$ вместо $o(1/\sqrt{\ln\ln N})$.

В настоящей работе получен аналог, приведенной теоремы из [3] для мультипликативных функций, включая класс функций $M_\beta^0(\alpha)$ (см. [9]). При этом в условии 1) $(\ln N)^{1+\varepsilon}$ заменен на $(\ln\ln N)^{1+\varepsilon}$. Условие 2) также ослаблено. Вместо него в случае аддитивных функций требуется только лишь существование вещественного h такого, что для почти всех простых p, $\psi(p)/h\in\mathbf{Z}$ (см. теорему 2). Явно вычислен коэффициент главного члена. Рассматриваемый в теореме 1 класс функций содержит класс функций из [6]. Аналогичным образом можно ослабить условия других теорем статьи [3] и [9].

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $g(n)$ — вещественная мультипликативная арифметическая функция такая, что*

$$(1)\qquad \frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\leqslant N,\ \ln|g(p)|=\omega}\operatorname{sgn}^k g(p)=\tau_\omega^{(k)}+\big(\varepsilon_N^{(k)}(\omega)/\ln_2^{1+\varepsilon}N\big),\qquad k=0,1,$$

где $\varepsilon>0$, $\sum_{\omega}|\varepsilon_N^{(k)}(\omega)|<+\infty$ *равномерно по* N, $\ln_2 u=\ln\ln u$, $\operatorname{sgn}^k 0=0$, *причем существует вещественное число h (можно считать $h>0$) такое, что из $\tau_\omega^{(0)}\neq 0$ следует $\omega/h\in\mathbf{Z}$, и*

$$0<\sigma^2\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\tau_{hm}^{(0)}m^2<+\infty.$$

Тогда для любого вещественного $\theta\neq 0$ (1)

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N,\ g(n)=\theta}1=\frac{A_g^{(0)}(|\theta|)+A_g^{(1)}(|\theta|)\operatorname{sgn}\theta}{2\sigma\sqrt{2\pi\ln_2 N}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\big(E\ln_2 N-(1/h)\ln|\theta|\big)^2}{2\sigma^2\ln_2 N}\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\right),$$

где $E=\sum_m\tau_{mh}^{(0)}m$, *а* $A_g^{(0)}(|\theta|)$, $A_g^{(1)}(|\theta|)$ *определяются следующим образом:*

а) *если* $\tau^{(k)}(0)=\sum_m\tau_{mh}^{(k)}=1$, *то*

$$A_g^{(k)}(|\theta|)={\sum}'\frac{1}{n}\sum_{d\|n,\ \ln\left|g\left(\frac{n}{d}\right)g(d^*)\right|\equiv\ln|\theta|(\mathrm{mod}\,h)}(-1)^{\nu(d)}\operatorname{sgn}^k g\left(\frac{n}{d}\right)g(d^*),$$

где штрих означает, что суммирование ведется по тем $n\in\mathbf{N}$, для которых из $p^r\|n$ следует

$$\ln|g(p^r)|\not\equiv\ln|g(p^{r-1})|(\mathrm{mod}\,h)\quad\text{или}\quad\operatorname{sgn}^k g(p^r)\neq\operatorname{sgn}^k g(p^{r-1}),$$

$\nu(k)$ — *число простых делителей* k, $d\|n$ *означает, что* $d|n$ *и* $\left(d,\frac{n}{d}\right)=1$, $d^*=d/\prod_{p|d}p$;

б) *если* $\tau^{(1)}(0)<\tau^{(0)}(0)=1$ *и для всех* $m\in\mathbf{Z}$ $\tau_{2m}^{(1)}\geqslant 0$, $\tau_{2m+1}^{(1)}\leqslant 0$, *то*

$$A_g^{(1)}(|\theta|)={\sum}''\frac{1}{n}\sum_{d|n,\ \ln\left|g\left(\frac{n}{d}\right)g(d^*)\right|\equiv\ln|\theta|(\mathrm{mod}\,h)}(-1)^{\nu(d)}\operatorname{sgn}g\left(\frac{n}{d}\right)g(d^*),$$

где два штриха означают, что сумма берется по тем $n\in\mathbf{N}$, для которых из $p^r\|n$ следует $\ln|g(p^r)|\not\equiv\ln|g(p^{r-1})|(\mathrm{mod}\,h)$ или, если $\ln|g(p^r)|\equiv\ln|g(p^{r-1})|(\mathrm{mod}\,2h)$, то $\operatorname{sgn}g(p^r)\neq\operatorname{sgn}g(p^{r-1})$, или, если $\ln|g(p^r)|\not\equiv\ln|g(p^{r-1})|(\mathrm{mod}\,2h)$ и $\ln|g(p^r)|\equiv\ln|g(p^{r-1})|(\mathrm{mod}\,h)$, то $\operatorname{sgn}g(p^r)=\operatorname{sgn}g(p^{r-1})$;

в) *для остальных случаев* $A_g^{(k)}(|\theta|)=0$.

Замечание 1. Условие (1) эквивалентно условию

$$(1')\qquad \frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\leqslant N,\ g(p)=\omega}1=\tau_\omega+\big(\varepsilon_N(\omega)/\ln_2^{1+\varepsilon}N\big).$$

Замечание 2. Можно считать, что $d\stackrel{\mathrm{def}}{=}$ н.о.д. $\{m/\tau_{mh}^{(0)}\neq 0\}=1$, ибо, если $d>1$, то заменяя h на $h'=hd$ можем достичь этого.

(1) Случай $\theta=0$ тривиально.

Из теоремы 1, в частности, следует

Теорема 2. *Пусть $\psi(n)$ — вещественная аддитивная функция такая, что*

$$\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\leqslant N,\psi(p)=\omega} 1=\tau_\omega+\left(\varepsilon_N(\omega)/\ln_2^{1+\varepsilon}N\right),$$

где $\varepsilon>0$, $\sum_\omega|\varepsilon_N(\omega)|<+\infty$ равномерно по N.

Если существует вещественное h такое, что

$$\sum_{\omega\equiv 0(\operatorname{mod} h)}\tau_\omega=1,\quad 0<\sigma_1^2=\sum_\omega \tau_\omega\frac{\omega^2}{h^2}<+\infty,$$

то для любого вещественного θ имеет место представление

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N,\psi(n)=\theta}1=\frac{A_\psi(\theta)}{\sigma_1\sqrt{2\pi\ln_2 N}}\exp\left\{-\frac{\left(E_1\ln_2 N-(1/h)\,\theta\right)^2}{2\sigma_1^2\ln_2 N}\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\right),$$

где $E_1=\sum_k\tau_{kh}\cdot k$,

$$A_\psi(\theta)=\sum_{\substack{n=1\\ p^r\|n\to\psi(p^r)\not\equiv\psi(p^{r-1})(\operatorname{mod} h)}}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{d\|n,\psi\left(\frac{n}{d}\right)-\psi(d^*)\equiv\theta(\operatorname{mod} h)}(-1)^{\nu(d)}.$$

Доказательство теоремы 1. Для $\theta\neq 0$ справедливо соотношение

$$d_N(\theta)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N,g(n)=\theta}1= \tag{2}$$

$$=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{1}(\operatorname{sgn}^k\theta)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\xi\ln|\theta|}\sum_{n\leqslant N}e^{i\xi\ln|g(n)|}\operatorname{sgn}^k g(n)\,d\xi.$$

Здесь и далее используются некоторые свойства почти периодических функций из [1].

Из условия (1) следует, что

$$\frac{\ln N}{N}\sum_{p\leqslant N}e^{i\xi\ln|g(p)|}\operatorname{sgn}^k g(p)=\frac{\ln N}{N}\sum_\omega e^{i\xi\omega}\sum_{p\leqslant N,\ln|g(p)|=\omega}\operatorname{sgn}^k g(p)=$$
$$=\tau^{(k)}(\xi)+O(1/\ln_2^{1+\varepsilon}N),$$

где

$$\tau^{(k)}(\xi)=\sum_m\tau_{hm}^{(k)}e^{i\xi hm}.$$

Следовательно, функция $f(n)=e^{i\xi\ln|g(n)|}\operatorname{sgn}^k g(n)$ удовлетворяет условиям основной леммы [11] с $g(p)=-f(\bar{p})$, $\tau_g=-\tau_f$, $A_f=A_g=1$, $\eta(x)=h(x)=(\ln_2 x)^{-1-\varepsilon}$. Так как

$$\frac{1-t^{\operatorname{Re}\tau_g-1}}{1-\operatorname{Re}\tau_g}\cdot\frac{1-t^{\operatorname{Re}\tau_f-1}}{1-\operatorname{Re}\tau_f}=O(\ln t)$$

то, взяв в этой лемме $t=\sqrt{\ln_2^{1+\varepsilon}x/\log_3 x}$ получим (²)

$$\sum_{n\leqslant N}e^{i\xi\ln|g(n)|}\operatorname{sgn}^k g(n)=$$
$$=a^{(k)}(\xi)N\ln^{\tau^{(k)}(\xi)-1}N+O\left(\frac{N}{\ln_2^{\varepsilon}N}\ln^{\operatorname{Re}\tau^{(k)}(\xi)-1}N\right)+O\left(N\sqrt{\ln_3 N/\ln_2^{1+\varepsilon}N}\right)$$

равномерно по ξ, $-\infty<\xi<+\infty$, где

$$a^{(k)}(\xi)=\frac{1}{\Gamma\left(\tau^{(k)}(\xi)\right)}\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|g(p^r)|^{i\xi}}{p^r}\operatorname{sgn}^k g(p^r)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau^{(k)}(\xi)}.$$

Поэтому

$$d_N(\theta)=\tfrac12\sum_{k=0}^{1}(\operatorname{sgn}^k\theta)\lim_{T\to\infty}\int_0^T\Big(a^{(k)}(\xi)(\ln^{\tau^{(k)}(\xi)-1}N)e^{-i\xi\ln|\theta|}+$$
$$+O(\ln^{\operatorname{Re}\tau^{(k)}(\xi)-1}N/\ln_2^{\varepsilon}N)\Big)d\xi+O\left(\sqrt{\ln_3 N/\ln_2^{1+\varepsilon}N}\right)=$$
$$=\tfrac12\sum_{k=0}^{1}I_k\operatorname{sgn}^k\theta+O\left(\sqrt{\ln_3 N/\ln_2^{1+\varepsilon}N}\right),$$

где (здесь и далее, для упрощения записи мы обозначаем $b=\frac{2\pi}{h}$)

$$I_k=\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{Th}\int_0^{[Th/2\pi]}\left(a^{(k)}(b\xi)(\ln^{\tau^{(k)}(b\xi)-1}N)e^{-i\xi\ln|\theta|}+O\left(\frac{\ln^{\operatorname{Re}\tau^{(k)}(b\xi)-1}N}{\ln_2^{\varepsilon}N}\right)\right)d\xi.$$

Вычисляем I_0. Ввиду периодичности $\tau^{(k)}(b\xi)$, имеем

$$I_0=\int_{-1/2}^{1/2}(\ln N)^{\tau^{(0)}(b\xi)-1}e^{-bi\xi\ln|\theta|}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{Th}\sum_{m=0}^{[Th/2\pi]}a^{(0)}\left(b(\xi+m)\right)+e^{-bim\ln|\theta|}+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{(\ln N)^{\operatorname{Re}\tau^{(0)}(b\xi)-1}}{\ln_2^{\varepsilon}N}\right)\right)d\xi. \tag{4}$$

(²) При этом учтен множитель t^{A_f} пропущенный в последнем остаточном члене основной леммы. В соответствующей корректировке нуждаются и следствия, вытекающие из нее.

Если $\tau^{(0)}(0)<1$, то интегралы I_0, I_1 можно оценить тривиально и теорема в этом случае очевидна. Поэтому в дальнейшем будем считать $\tau^{(0)}(0)=1$. Поскольку н.о.д. $\{m/\tau_{hm}^{(0)}\neq 0\}=1$ (см. замечание 2), то $\tau^{(0)}(b\xi)$ в интервале $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ только в точке $\xi=0$ обращается в единицу. В окрестности $\xi=0$ находим асимптотику предела, входящего в (4). Можно проверить, что $a^{(0)}(\xi)$ равномерно почти периодическая функция. Действительно, рассуждая точно так же, как при доказательстве леммы 3 [3], равномерная почти-периодичность $a^{(k)}(\xi)$ сводится к доказательству равномерной сходимости ряда

$$\sum_p \frac{1}{p}\left(e^{i\xi\ln|g(p)|}\operatorname{sgn}^k g(p)-\tau^{(k)}(\xi)\right).$$

В [3] равномерная сходимость аналогичного ряда выводится из условия 1) вышеприведенной теоремы из [3]. Но в нашем случае условие (1) также обеспечивает равномерную сходимость последнего ряда. Отсюда выводится равномерная почти-периодичность функции (см. [3], стр. 242–243)

$$a_\theta^{(0)}(\xi)\overset{\text{def}}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{Th}\sum_{m=0}^{[Th/2\pi]}e^{-bim\ln|\theta|}a^{(0)}\big(b(\xi+m)\big). \tag{5}$$

Следовательно,

$$a_\theta^{(0)}(\xi)=a_\theta^{(0)}(0)+\delta_1^{(0)}(\xi),$$

где $\delta_1^{(0)}(\xi)\to 0$ при $\xi\to 0$.

Вычислим $a_\theta^{(0)}(0)$. Имеет место равенство

$$a^{(0)}(bm)=\sum{}'\frac{1}{n}|g(n)|^{ibm}\sum_{d\|n}|g(d)|^{-ibm}|g(d^*)|^{ibm}(-1)^{\nu(d)}\operatorname{sgn}^{(0)}g\left(\frac{n}{d}\right)g(d^*)$$

так как ряд абсолютно сходится, где $\sum'$ означает ту же сумму, что и в формулировке теоремы. Подставляя полученное соотношение в (5) и меняя порядок суммирования находим, что $a_\theta^{(0)}(0)=A_g^{(0)}(|\theta|)$, т.е.

$$a_\theta^{(0)}(\xi)=A_g^{(0)}(|\theta|)+\delta_1^{(0)}(\xi).$$

Тогда согласно (4) I_0 можно представить в виде

$$I_0=A_g^{(0)}(|\theta|)\int_{-1/2}^{1/2}(\ln N)^{\tau^{(0)}(b\xi)-1}e^{-bi\xi\ln|\theta|}d\xi+ \tag{6}$$
$$+\int_{-1/2}^{1/2}\left((\ln N)^{\tau^{(0)}(b\xi)-1}e^{-b\xi\ln|\theta|}\delta_1^{(0)}(\xi)+O\left(\frac{(\ln N)^{\operatorname{Re}\tau^{(0)}(b\xi)-1}}{\ln_2^\varepsilon N}\right)\right)d\xi=$$
$$=I_0'+I_0''.$$

Пусть $u=\ln\ln N$. Очевидно, что

$$I_0''\ll\left(\sup_{|\xi|\leqslant\varrho_0(u)/\sqrt{u}}\delta_1^{(0)}(\xi)+\frac{1}{\ln_2^\varepsilon N}\right)\int_{|\xi|\leqslant\varrho_0(u)/\sqrt{u}}\exp\{u(\operatorname{Re}\tau^{(0)}(b\xi)-1)\}d\xi+$$
$$+\int_{\varrho_0(u)/\sqrt{u}\leqslant|\xi|\leqslant 1/2}\exp\{u(\operatorname{Re}\tau^{(0)}(b\xi)-1)\}\left(|\delta_1^{(0)}(\xi)|+\frac{1}{\ln_2^\varepsilon N}\right)d\xi,$$

где $\varrho_0(u)$ будет выбрано позднее. Применяя к второму интегралу лемму 3 [9], а первый интеграл оценивая тривиально, получим

$$I_0''=O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\varrho_0(u)\Big(\sup_{0\leqslant|\xi|\leqslant\varrho(u)/\sqrt{u}}\delta_1^{(0)}(\xi)+\ln_2^{-\varepsilon}N\Big)\right)+O\left(\frac{e^{-c_1\varrho_0^2(u)}}{\sqrt{u}}\right),\quad c_1>0. \tag{7}$$

Теперь вычислим интеграл I_0'. Пользуясь опять леммой 3 [9], находим

$$I_0'=A_g^{(0)}(|\theta|)\int_{-1/2}^{1/2}(\ln N)^{\tau^{(0)}(b\xi)-1}e^{-bi\xi\ln|\theta|}d\xi= \tag{8}$$
$$=A_g^{(0)}(|\theta|)\int_{|\xi|\leqslant\varrho_0(u)/\sqrt{u}}(\ln N)^{\tau^{(0)}(b\xi)-1}e^{-bi\xi\ln|\theta|}d\xi+O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}e^{-c_2\varrho_0^2(u)}\right),$$
$$c_2>0.$$

Вторая производная $(\tau^{(0)}(\xi))''$ непрерывна в точке $\xi=0$, поэтому

$$\tau^{(0)}(b\xi)=1+2\pi iE\xi-2\pi^2\sigma^2\xi^2+\delta_2^{(0)}(\xi)\xi^2,$$

где $\delta_2^{(0)}(\xi)\to 0$ при $\xi\to 0$. Следовательно,

$$\int_{|\xi|\leqslant\varrho_0(u)/\sqrt{u}}(\ln N)^{\tau^{(0)}(b\xi)-1}e^{-bi\xi\ln|\theta|}d\xi=\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{u}}\int_{-2\pi\sigma\varrho_0(u)}^{2\pi\sigma\varrho_0(u)}e^{-z^2/2}\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{uE-(\ln|\theta|)/h}{\sigma\sqrt{u}}z\right\}dz+O\left(\frac{\varrho_0(u)}{\sqrt{u}}\sup_{|\xi|\leqslant\varrho_0(u)/\sqrt{u}}e^{-2\pi^2\sigma^2u\xi^2}|\delta_2^{(0)}(\xi)|\xi^2\right).$$

Производя интегрирование в последнем интеграле в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и учтя при этом допускаемую погрешность, а затем применяя формулу обращения и полученный результат вместе с (7) и (8) подставив в (6), находим

$$I_0=\frac{A_g^{(0)}(|\theta|)}{\sigma\sqrt{2\pi u}}\exp\left\{-\frac{(uE-(\ln|\theta|)/h)^2}{2\sigma^2u}\right\}+O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}e^{-c_3\varrho_0^2(u)}\right)+ \tag{9}$$
$$+O\left(\frac{\varrho_0(u)}{\sqrt{u}}\delta_0\left(\frac{\varrho_0(u)}{\sqrt{u}}\right)\right),$$

где

$$\delta_0\left(\frac{\varrho_0(u)}{\sqrt{u}}\right)=\sup_{|\xi|\leqslant\varrho_0(u)/\sqrt{u}}\left(|\delta_1^{(0)}(\xi)|,\ \xi^2e^{-2\pi^2\sigma^2u\xi}|\delta_2^{(0)}(\xi)|,\ \ln_2^{-\varepsilon}N\right).$$

Изучим теперь I_1. Существуют следующие возможности:

1) Для всех $m\in\boldsymbol{Z}$ $\tau_{mh}^{(1)}=\tau_{mh}^{(0)}$, т.е. $\tau^{(1)}(\xi)\equiv\tau^{(0)}(\xi)$. Тогда, дословно повторяя вышеприведенные рассуждения для I_1 получим выражение, аналогичное (9) соответственно с коэффициентом $A_g^{(1)}(|\theta|)$;

2) Существует $m_0\in\boldsymbol{Z}$, такое, что $|\tau_{hm_0}^{(1)}|<\tau_{hm_0}^{(0)}$. Тогда

$$\operatorname{Re}\tau^{(1)}(b\xi)\leqslant 1-(\tau_{hm_0}^{(0)}-|\tau_{hm_0}^{(1)}|)$$

и I_1 включается в остаточном члене;

3) Для всех $m\in\boldsymbol{Z}$ $|\tau_{hm}^{(1)}|=\tau_{hm}^{(0)}$ и $\tau^{(1)}(0)<\tau^{(0)}(0)=1$.

Здесь необходимо отличить два случая:

а) для всех $m\in\boldsymbol{Z}$ $\tau_{h2m}^{(1)}\geqslant 0$ и $\tau_{h(2m+1)}^{(1)}\leqslant 0$ (в [9] классы таких функций обозначены через $M_\beta^{(0)}(a)$);

б) когда а) не выполнено.

В случае б), согласно лемме 4 [9], существует $\varepsilon_1>0$ такое, что $\operatorname{Re}\tau^{(1)}(b\xi)\leqslant 1-\varepsilon_1$ и тогда I_1 входит в остаточный член.

Рассмотрим случай а). I_1 представим в следующем виде

(10)

$$I_1=\int_0^1(\ln N)^{\tau^{(1)}(b\xi)-1}e^{-bi(\xi-1/2)\ln|\theta|}\times$$
$$\times\left(\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{Th}\sum_{m=0}^{[Th/2\pi]}a^{(1)}\big(b(\xi+m)\big)e^{-bi(m+1/2)\ln|\theta|}+O\left(\frac{(\ln N)^{\operatorname{Re}\tau^{(1)}(b\xi)-1}}{\ln_2^{\varepsilon}N}\right)\right)d\xi.$$

Нетрудно убедиться, что только в точке $\xi=1/2$ из интервала $[0,1]$ $\tau^{(1)}(b\xi)=1$ (см. доказательство леммы 4 [9]). Поэтому основной вклад в I_1 вносит часть интеграла в малой окрестности $\xi=1/2$. В окрестности этой точки оценим подинтегральную функцию. Функция

$$a_\theta^{(1)}(\xi)\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{Th}\sum_{m=0}^{[Th/2\pi]}a^{(1)}\big(b(\xi+m)\big)e^{-bi(m+1/2)\ln|\theta|}$$

равномерно почти-периодическая, поэтому

(11) $\quad a_\theta^{(1)}(\xi)=a_\theta^{(1)}(\tfrac12)+\delta_1^{(1)}(\xi-\tfrac12),\qquad$ где $\quad\delta_1^{(1)}(\xi)\to 0$ при $\xi\to 0$.

Из формулы для $a^{(1)}(\xi)$, перемножая бесконечное произведение, получаем

$$a^{(1)}\big(b(m+\tfrac12)\big)={\sum}''\frac1n|g(n)|^{ib(m+1/2)}\sum_{d\|n}|g(d)|^{-ib(m+1/2)}\times$$
$$\times|g(d^*)|^{ib(m+1/2)}\operatorname{sgn}g\left(\frac nd\right)g(d^*),$$

где $\sum''$ определена в формулировке теоремы 1. Эта операция обосновывается тем, что последний ряд абсолютно сходится. Из последнего соотношения следует, что

(12) $$a_\theta^{(1)}(\tfrac12)=A_g^{(1)}(|\theta|).$$

Далее, по предположению имеем

(13) $$\tau^{(1)}(b\xi)=\tau^{(1)}(\pi/h)+2\pi i\sum_m\tau_{hm}^{(1)}\cdot me^{i\pi m}(\xi-\tfrac12)-2\pi^2\sum_m m^2\tau_{hm}^{(1)}\times$$
$$\times e^{i\pi m}(\xi-\tfrac12)^2+\delta_2^{(1)}(\xi-\tfrac12)\xi^2=$$
$$=1+2\pi iE(\xi-\tfrac12)-2\pi^2\sigma^2(\xi-\tfrac12)^2+\delta_2^{(1)}(\xi-\tfrac12)(\xi-\tfrac12)^2,$$

где $\delta_2^{(1)}(\xi)\to 0$ при $\xi\to 0$.

Кроме того, точно так же, как и лемму 3 [9], можно доказать, что существует $\varepsilon_2>0$ такое, что для всех $\xi\in[0,1]$

(14) $$1-\operatorname{Re}\tau^{(1)}(b\xi)\geqslant\varepsilon_2(\xi-\tfrac12)^2.$$

Интеграл I_1 разбиваем на две части:

(15) $$I_1=\int\limits_{|\xi-1/2|\leqslant\varrho_1(u)/\sqrt{u}}+\int\limits_{\varrho_1(u)/\sqrt{u}\leqslant|\xi-1/2|\leqslant 1/2}=I_1'+I_1''.$$

Так как $a_\theta^{(1)}(\xi)$ ограничена, то воспользовавшись (14), имеем

(16) $$I_1''=O\Bigg(\int\limits_{\varrho_1(u)/\sqrt{u}\leqslant|\xi-1/2|\leqslant 1/2}e^{-u\varepsilon_2(\xi-1/2)^2}d\xi\Bigg)=O\left(\frac{e^{-c_4\varrho_1^2(u)}}{\sqrt{u}}\right),$$

где $c_4>0$.

Вычислим I_1'. Согласно (11)–(13) находим

(17) $$I_1'=A_g^{(1)}(|\theta|)\int\limits_{|\xi-1/2|\leqslant\varrho_1(u)/\sqrt{u}}\exp\left\{u\big(\tau^{(1)}(b\xi)-1\big)-ib(\xi-\tfrac12)\ln|\theta|\right\}d\xi+$$
$$+\int\limits_{|\xi-1/2|\leqslant\varrho_1(u)/\sqrt{u}}\Bigg(\exp\left\{u\big(\tau^{(1)}(b\xi)-1\big)-ib(\xi-\tfrac12)\ln|\theta|\right\}\delta_1^{(1)}(\xi-\tfrac12)+$$
$$+O\left(\frac{(\ln N)^{\operatorname{Re}\tau^{(1)}(b\xi)-1}}{\ln_2^{\varepsilon}N}\right)\Bigg)d\xi=$$
$$=A_g^{(1)}(|\theta|)\int\limits_{|\xi-1/2|\leqslant\varrho_1(u)/\sqrt{u}}\exp\{2\pi i(\xi-\tfrac12)(Eu-\ln|\theta|/h)\}\times$$
$$\times\exp\{-2\pi^2\sigma^2u(\xi-\tfrac12)^2+\delta_2^{(1)}(\xi-\tfrac12)(\xi-\tfrac12)^2\}d\xi+$$
$$+O\left(\frac{\varrho_1(u)}{\sqrt{u}}\left(\sup_{0\leqslant|\xi|\leqslant\varrho_1(u)/\sqrt{u}}\delta_1^{(1)}(\xi)+\frac{1}{\ln_2^{\varepsilon}N}\right)\right)=$$
$$=\frac{A_g^{(1)}(|\theta|)}{\sigma\sqrt{2\pi u}}\exp\{-(uE-(\ln|\theta|)/h)^2/2\sigma^2u\}+$$
$$+O\left(\frac{e^{-c_5\varrho_1^2(u)}}{\sqrt{u}}\right)+O\left(\frac{\varrho_1(u)}{\sqrt{u}}\delta_1\left(\frac{\varrho_1(u)}{\sqrt{u}}\right)\right),$$

где

$$\delta_1\left(\frac{\varrho_1(u)}{\sqrt{u}}\right) = \sup_{|\xi|\leqslant\varrho_1(u)/\sqrt{u}} \left(|\delta_1^{(1)}(\xi)|,\ \xi^2 e^{-2\pi^2\sigma^2 u\xi}|\delta_2^{(1)}(\xi)|,\ \ln_2^{-\varepsilon} N\right).$$

Осталось (16) и (17) подставить в (15) и полученный результат вместе с (9) в свою очередь подставить в (3), а затем, аналогично [3], стр. 246, $\varrho_0(u)$ и $\varrho_1(u)$ выбрать так (например, $\varrho_i(u) = \min\left(\delta_i^{-1/2}(u^{-1/4}), u^{1/4}\right)$, чтобы все остаточные члены дали $o(1/\sqrt{u})$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Помимо условий теоремы* 1, *если* $g(n) \geqslant 0$, *то для* $\theta > 0$

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N, g(n)=\theta} 1 = \frac{A_g^{(0)}(\theta)}{\sigma\sqrt{2\pi\ln_2 N}}\exp\left\{-\frac{(E\ln_2 N-(1/h)\ln\theta)^2}{2\sigma^2\ln_2 N}\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\right).$$

Следствие 2. *Если* $|uE-(1/h)\ln|\theta|| = \lambda\sigma\sqrt{u}+o(\sqrt{u})$, *где* $u = \ln_2 N$, *то*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N, g(n)=\theta} 1 = \frac{A_g^{(0)}(|\theta|)+A_g^{(1)}(|\theta|)\operatorname{sgn}\theta}{2\sigma\sqrt{2\pi\ln_2 N}}\cdot e^{-\lambda^2/2}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\right).$$

Литература

[1] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Москва 1953.

[2] J. Kubilius, *On local theorems for number-theoretic functions*, In: *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Errinerung an Edmund Landau (1877-1938)*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968, стр. 173–191.

[3] Б. В. Левин и А. А. Юдин, *Локальные предельные теоремы для аддитивных арифметических функций*, Acta Arith. 22 (1973), стр. 233–247.

[4] А. С. Файнлейб, *Локальные теоремы с остаточным членом для одного класса арифметических функций*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 21 (1970), стр. 271–281.

[5] Э. Манставичюс, *Применение метода производящих рядов Дирихле в теории распределения значений арифметических функций*, Литов. мат. сб. 14.1 (1974), стр. 99–111.

[6] Р. Скрабутенас, *О распределении значений мультипликативных арифметических функций*, ibid. 18.2 (1978), стр. 129–138.

[7] Э. Манставичюс, *Локальная теорема для мультипликативных функций*, ibid. 19.3 (1979), стр. 105–106.

[8] Р. Скрабутенас, *О расширении одного класса арифметических функций*, ibid. 20.3 (1980), стр. 144–145.

[9] С. Т. Туляганов, *Локальные предельные теоремы для мультипликативных функций*, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 17.3 (1973), стр. 26–33.

[10] С. Т. Туляганов, *Асимптотические формулы для сумм мультипликативных арифметических функций*, Докл. АН УзССР 1 (1975), стр. 7–9.

[11] — *Оценка остаточных членов теорем о суммировании мультипликативных функций*, Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук 6 (1977), стр. 25–33.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
ИМ. В. И. РОМАНОВСКОГО АН УзССР
ТАШКЕНТ

Поступило 13.3.1984
и в исправленной форме 13.7.1984 (1413)