ACTA ARITHMETICA
XLV (1986)

Sur le minimum d'une somme de cosinus

par

J. Bourgain (Bruxelles)

0. Notations. f est un polynôme trigonométrique fixé, t.q. $\hat{f}$ est à valeurs 0,1, $\hat{f}(0) = 0$ et $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$ (donc $\frac{1}{2}f$ est une somme de cosinus). Soit $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$. Le problème consiste à démontrer une minoration

$$\|f^-\|_\infty \geqslant 2^{(\log N)^\varepsilon}$$

où $N = |\mathrm{Spec}\, f|$ et $\varepsilon > 0$ une constante numérique.

Remarquons que

$$\|f\|_1 \leqslant 2\|f^-\|_\infty.$$

En supposant $\|f^-\|_\infty$ „petit" on obtient en même temps une borne sur $\|f\|_1$. Le première partie de la démonstration consistera, pour $\|f^-\|_\infty$ petit, à construire de „grande" mailles

$$\{0, k_1, 2k_1, \ldots, dk_1\} + \ldots + \{0, k_J, 2k_J, \ldots, dk_J\}$$

telles que $\mathrm{Spec}\, f$ en contienne une translatée. Ici d sera numérique et $J \sim (\log N)^{\varepsilon_1}$. On procèdera par induction sur d. Déjà pour $d = 1$, le résultat n'est pas évident. Certaines considérations dans la construction des progressions arithmétiques (qui seront de longueur 5 par après) apparaissent aussi dans [1]. Le point important est la taille de J. Cette partie de la démonstration est assez technique.

Les mailles construites dans $\mathrm{Spec}\, f$ contiendront le spectre de certaines mesures „testes". On usera également d'un lemme de base dans l'article de Roth [2] sur ce problème. C sera une constante numérique arbitraire.

1. Construction des mailles. Nous démontrerons par récurrence sur $d = 0, 1, 2, \ldots$ la propriété suivante

Proposition. *Il existe $0 < \varepsilon, \delta, \delta_0, \delta_1, \delta_2 < 1$ t.q. si F est un polynôme trigonométrique, $\hat{F}$ à valeurs 0, 1 et de la forme*

$$F = F' + F'' + F'''$$

où

(i) $|F'| \leqslant |f|$,

(ii) $\|F''\|_\infty < 2^{(\log N)^{\delta_1}}$,

(iii) $\|F'''\|_1 < 2^{-(\log N)^{\delta_2}}$

et

$$n > 2^{(\log N)^{\delta_0}} \quad \textit{où} \quad n = |\Lambda|,\ \Lambda = \operatorname{Spec} F$$

soit

$$\|f^-\|_\infty > 2^{(\log N)^\varepsilon}$$

soit il existe au moins nM^{-1} (*où* $M = 2^{(\log N)^\delta}$) *entiers* α *t.q.*

$$\bigcap_{s=0}^{d} (\Lambda + s\alpha) \textit{ est de cardinal} > nM^{-1}.$$

Remarque. On peut reformuler le second alternatif en affirmant l'existence d'une suite $k_1 < \ldots < k_J$ d'entiers, $J \sim (\log N)^\varepsilon$, telle que $\{k_j\}$ est un système d-dissocié([1]) et Λ contient une translatée de

$$(*) \qquad \{0, k_1, \ldots, dk_1\} + \ldots + \{0, k_J, \ldots, dk_J\}.$$

Cette construction sera en effet contenue dans la démonstration de la proposition.

Il s'agit là du résultat qui nous intéresse pour $F = f$.

Démonstration de la proposition.

$d = 1$: Soit $G = F' + F'''$. Alors

$$\int |G|^2 \leqslant \|G\|_1^{2/3} \|G\|_4^{4/3}$$

et pour $\|F''\|_\infty \ll n^{1/2}$

$$n \leqslant 2\|f\|_1^{2/3} \|F\|_4^{4/3}, \qquad \int |F|^4 \geqslant \frac{1}{8} \frac{n^3}{\|f\|_1^2}.$$

Pour tout entier α, posons

$$\mathscr{P}_\alpha = \{(r, s) \in \Lambda \times \Lambda;\ s - r = \alpha\}.$$

Donc

$$|\mathscr{P}_\alpha| = |\Lambda \cap (\Lambda + \alpha)|.$$

Aussi

$$\sum |\mathscr{P}_\alpha| \leqslant |\Lambda|^2 \quad \text{et} \quad \int |F|^4 \leqslant \sum |\mathscr{P}_\alpha|^2$$

la minoration de $\int |F|^4$ donne au moins $n/C\|f\|_1^2$ valeurs de α t.q.

$$|\Lambda \cap (\Lambda + \alpha)| > n/C\|f\|_1^2.$$

([1]) n'admettant pas de relations à coefficients dans l'ensemble $\{-d, -d+2, \ldots, d\}$.

En supposant $\|f^-\|_\infty < 2^{(\log N)^\varepsilon}$, on obtient la seconde alternative.

$d \Rightarrow d+1$: On va construire des mailles $(*)$ t.q. Λ contienne au moins n/M' translatées. Fixons $\Gamma_0 \subset \mathbf{Z}$, dont nous bornerons le cardinal par après. Posons $F_0 = F$. Nous allons introduire par récurrence des entiers k_j t.q.

$$(1) \qquad k_{j+1} \notin \{0, -k_1\} + \ldots + \{0, -k_j\} + \Gamma_0$$

et poserons

$$F_j = F_{j-1} * e^{ik_j\theta} F_{j-1} * e^{2ik_j\theta} F_{j-1} * \ldots * e^{dik_j\theta} F_{j-1},$$

$$\Lambda_j = \operatorname{Spec} F_j, \qquad n_j = |\Lambda_j|.$$

La construction montrera qu'on peut en fait obtenir les k_j arbitrairement bien dissociés.

Nous désirons préserver la décomposition pour chaque F_j

$$F_j = G' + G'' + G'''$$

où

$$(2) \qquad |G'| \leqslant |f|,$$

$$(3) \qquad \|G''\|_\infty \leqslant K_j,$$

$$(4) \qquad \|G'''\|_1 \leqslant \varkappa_j.$$

Le but sera de faire décroître n_j et croître K_j, $\varkappa_j$ aussi lentement que possible. Soit $0 < \varepsilon, \delta, \delta_0, \delta_1, \delta_2 < 1$ vérifiant d.

Supposons $F_0 = F$ admettant une décomposition

$$F = F' + F'' + F'''$$

où

$$(5) \qquad |F'| \leqslant |f|,$$

$$(6) \qquad \|F''\|_\infty \leqslant K,$$

$$(7) \qquad \|F'''\|_1 \leqslant \varkappa.$$

Nous allons en particulier borner (a posteriori) K et $\varkappa$ t.q. pour tout j

$$(8) \qquad K_j < 2^{(\log N)^{\delta_1}},$$

$$(9) \qquad \varkappa_j < 2^{-(\log N)^{\delta_2}}.$$

Nous choisirons n suffisamment grand afin de préserver la minoration

$$(10) \qquad n_j > 2^{(\log N)^{\delta_0}}.$$

$Z = \|f^-\|_\infty$ sera supposé suffisamment petit, en particulier $Z < 2^{(\log N)^\varepsilon}$.

Soit $F_1, \ldots, F_j$ obtenus et (8), (9), (10) vérifiés par F_j. Soit $M = 2^{(\log N)^\delta}$.

La propriété d implique l'existence de $n_j M^{-1}$ entiers α t.q.

$$\Big|\bigcap_{s=0}^{d} (A_j+s\alpha)\Big| \geqslant n_j M^{-1}.$$

k_{j+1} sera l'une de ces valeurs α. On peut clairement satisfaire (1) si

$$2^j\, 2^{(\log N)^\delta} |\Gamma_0| \ll n_j. \tag{11}$$

Récrivons F_{j+1} comme

$$(G'+G''+G''')*e^{i\alpha\theta}(G'+G''+G''')*\ldots*e^{id\alpha\theta}(G'+G''+G''')$$

où α est à déterminer.

On a

$$F_{j+1} = (G'+G'')*e^{i\alpha\theta}(G'+G'')*\ldots*e^{id\alpha\theta}(G'+G'')+G_1$$

où

$$\|G_1\|_1 \leqslant d(2Z+K_j+1)^d \varkappa_j. \tag{12}$$

En suite

$$\begin{aligned}&(G'+G'')*e^{i\alpha\theta}(G'+G'')*\ldots*e^{id\alpha\theta}(G'+G'')\\&= G'*e^{i\alpha\theta}G'*\ldots*e^{id\alpha\theta}G'+\\&\quad+\sum\{H_0*e^{i\alpha\theta}H_1*\ldots*e^{id\alpha\theta}H_d;\ H=G',\ G''\ \text{et au moins}\ 2\times G''\}+G_2\end{aligned}$$

où

$$\|G_2\|_\infty \leqslant d(2Z)^d K_j. \tag{13}$$

Analysons le premier terme. Par hypothèse sur G' et puisque $f*f=f$

$$\begin{aligned}|G'*\ldots*e^{id\alpha\theta}G'| &\leqslant |f|*\ldots*|f| = (f+2f^-)*\ldots*(f+2f^-)\\&\leqslant (f*\ldots*f)+2Z\,\|f\|_1^d(d+1) \leqslant |f|+2d(2Z)^{d+1}\end{aligned}$$

d'où

$$G'*\ldots*e^{id\alpha\theta}G' = G_3+G_4,$$

$$|G_3| \leqslant |f|, \tag{14}$$

$$\|G_4\|_\infty \leqslant 2d(2Z)^{d+1}, \tag{15}$$

le terme contenant les H-convolées s'estime en $\|\ \|_1$ par

$$\sum_{0\leqslant a<b\leqslant d} \|e^{ia\alpha\theta}G''*e^{ib\alpha\theta}G''\|_1 (K_j+2Z)^{d-1}.$$

Rappelons que α parcourt un ensemble de $\frac{1}{2}n_j M^{-1}$ éléments. Un argument de moyenne montre que $\alpha = k_{j+1}$ peut être trouvé t.q.

$$\sum_{0\leqslant a<b\leqslant d} \|G''*e^{i(b-a)\alpha\theta}G''\|_1 \leqslant Cd^2 K_j^2 (M/n_j)^{1/2}. \tag{16}$$

En collectant (12), (13), (14), (15), (16), on retrouve une décomposition pour F_{j+1} où maintenant

$$\begin{cases} K_{j+1} \leqslant d(2Z)^d K_j + 2d(2Z)^{d+1},\\ \varkappa_{j+1} \leqslant d(2Z+K_j+1)^d \varkappa_j + Cd^2 K_j^2 (M/n_j)^{1/2}(K_j+2Z)^{d-1},\\ n_{j+1} \geqslant n_j/M. \end{cases} \tag{17}$$

Les inégalités (17) donnent l'évolution de $K_{j'}, \varkappa_{j'}, n_{j'}$ pour $j' \leqslant j+1$, si on suppose (8), (9), (10) satisfait pour $j' \leqslant j$. On obtient en itérant la première inégalité

$$K_{j+1} \leqslant (CdZ^d)^{j+1} K.$$

Soit $\varepsilon' < \varepsilon$ et supposons

$$Z < 2^{(\log N)^{\varepsilon'}}.$$

Fixons $\tau > 0$ (suffisamment petit). Pour $j \leqslant J = (\log N)^\tau$ et $K < 2^{(\log N)^{\delta_1'}}$

$$K_{j+1} < 2^{2(\log N)^{\varepsilon'+\tau}}\, 2^{(\log N)^{\delta_1'}}$$

d'où (8) si

$$\varepsilon'+\tau+\delta_1' < \delta_1. \tag{18}$$

Itération de la troisième inégalité de (17) donne

$$n_{j+1} > M^{-(j+1)} n > 2^{-(\log N)^{\delta_J}} n > 2^{-(\log N)^{\delta+\tau}} n. \tag{19}$$

Pour

$$n > 2^{(\log N)^{\delta_0'}}$$

on voit que (10) sera vérifié si

$$\delta+\tau < 1, \quad \delta_0' > \max\left(\frac{1+\delta_0}{2}, \frac{1+\delta+\tau}{2}\right). \tag{20}$$

Examinons les $\varkappa_{j'}$ ($j' \leqslant j+1$). Il découle de (8), (19) et la deuxième inégalité de (17) que

$$\varkappa_{j+1} \leqslant 2^{2d(\log N)^{\delta_1}} \varkappa_j + 2^{4d(\log N)^{\delta_1}}\, 2^{(\log N)^\delta}\, 2^{(\log N)^{\delta+\tau}}\, 2^{-1/2(\log N)^{\delta_0'}}.$$

Si également

$$\delta_0' > (1+\delta_1)/2 \tag{21}$$

on a

$$\varkappa_{j+1} \leqslant 2^{2d(\log N)^{\delta_1}} \varkappa_j + 2^{-1/4(\log N)^{\delta_0'}}$$

d'où, en itérant

$$\varkappa_{j+1} \leqslant 2^{2dJ(\log N)^{\delta_1}} \varkappa + 2^{4dJ(\log N)^{\delta_1} - 1/4(\log N)^{\delta'_0}}.$$

Pour $\varkappa < 2^{-(\log N)^{\delta'_2}}$ et

$$(22)\qquad \begin{cases} \delta_1 + \tau < 1, \\ \delta'_2 > \max\big((1+\delta_1+\tau)/2,\ (1+\delta_2)/2\big), \\ \delta'_0 > \max\big((1+\delta_1+\tau)/2,\ (1+\delta_2)/2\big) \end{cases}$$

on voit que (9) sera satisfait.

(18), (20), (21), (22) expriment des conditions sur τ, ε', δ'_0, δ'_1, δ'_2.

Les J itérations de ce procédé donne un système (dissocié) $\{k_j\}_{j=1}^{J}$ t.q.

$$k_{j+1} \notin \{0, -k_1\} + \ldots + \{0, -k_j\} + \Gamma_0$$

et (19)

$$\bigcap_{\substack{k=\sum \nu_j k_j \\ \nu_j = 0,1,\ldots,d}} (\Lambda + k) = \Lambda'$$

est de cardinal $> 2^{-(\log N)^{\delta+\tau}} n$.

La condition (11) sur Γ_0 devient

$$|\Gamma_0|\, 2^{(\log N)^{\tau} + (\log N)^{\delta} + (\log N)^{\delta+\tau}} \ll n$$

et il suffira que

$$|\Gamma_0| < 2^{-(\log N)^{\delta'_0}} n.$$

Rappelons que $\|F\|_1 \leqslant \|f\|_1 + K + 1 \leqslant 2^{(\log N)^{\varepsilon'}} + 2^{(\log N)^{\delta'_1}} + 1$. Donc

$$\|F\|_1 < 2^{(\log N)^{2/3\tau}}$$

si

$$(23)\qquad \varepsilon' + \delta'_1 < \tau/2.$$

Aussi $J = (\log N)^{\tau}$. En usant d'un même argument que dans [1],(2) on voit que pour tout $l \in \Lambda'$, il existe des parties disjointes $A(l) \neq \emptyset$, $B(l)$ de $\{1, \ldots, J\}$ t.q.

$$l - d \sum_{\substack{j \notin A(l) \\ j \notin B(l)}} k_j - (d+1) \sum_{j \in A(l)} k_j - (d-1) \sum_{j \in B(l)} k_j \in \Lambda.$$

Par construction (1),

$$\sum_{j \in A(l)} k_j \notin \Gamma_0.$$

(2) Voir le lemme 5.

Pour au moins $4^{-J}|\Lambda'|$ valeurs de $l \in \Lambda'$, on obtiendra une même pair d'éléments $\bar{k}$, $\bar{k}$ t.q.

$$\bar{k} \notin \Gamma_0,$$

$$l + \bar{k} \in \bigcap_{s=0}^{d+1} (\Lambda + s\bar{k}), \qquad \text{d'où} \qquad \Big|\bigcap_{s=0}^{d+1} (\Lambda + s\bar{k})\Big| > 4^{-J}|\Lambda'|.$$

On a

$$4^{-J}|\Lambda'| > 4^{-(\log N)^{\tau}}\, 2^{-(\log N)^{\delta+\tau}} n.$$

La restriction sur $|\Gamma_0|$ permet de trouver au moins $2^{-(\log N)^{\delta'_0}} n$ éléments $\bar{k}$ qui vérifient la propriété précédente. Il suffira donc de poser

$$\delta' = \delta'_0.$$

2. Sommes de cosinus. Pour ε suffisamment petit et $\|f^-\|_\infty < 2^{(\log N)^{\varepsilon}}$, la remarque (voir p. 382) appliquée pour $d = 4$ donne une suite dissociée

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_J$$

t.q. Spec $f = \Lambda$ contienne une translatée de la maille

$$\Omega = \{-2k_1, -k_1, 0, k_1, 2k_1\} + \ldots + \{-2k_J, \ldots, 2k_J\}$$

où $J \sim (\log N)^{\varepsilon}$. Supposons $n_0 + \Omega \subset \Lambda$.

La fonction

$$\varphi(\theta) = \tfrac{3}{4} - \cos\theta + \tfrac{1}{4}\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$$

est positive. Donc pour tout n

$$(1)\qquad \int_{\pi} \varphi(n\theta) \prod_{j=1}^{J} [1 + \cos k_j\theta]\, f(\theta) \geqslant -2\|f^-\|_\infty.$$

Posons

$$A_m = \int e^{im\theta} \prod_{j=1}^{J} [1 + \cos k_j\theta]\, f(\theta).$$

Clairement

$$A_m = A_{-m} \quad \text{et} \quad |A_m| \leqslant 2^J.$$

On récrit (1)

$$(2)\qquad \tfrac{3}{4} 2^J - A_n + \tfrac{1}{4} A_{2n} \geqslant -2\|f^-\|_\infty.$$

Par hypothèse, on a en particulier

$$(3)\qquad A_{n_0} = 2^J.$$

En usant de (2), on voit que

$$A_{2n_0} \geqslant 2^J - 8\|f^-\|_\infty,$$
$$A_{4n_0} \geqslant 2^J - 40\|f^-\|_\infty,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{2^s n_0} \geqslant 2^J - \sigma(s)\|f^-\|_\infty$$

où

$$\sigma(s+1) = 4\sigma(s) + 8.$$

Pour s suffisamment grand, $A_{2^s n_0} = 0$.

Considérons la plus petite valeur s t.q.

$$A_{2^{s+1} n_0} < \tfrac{1}{2} 2^J.$$

Donc

$$A_{2^s n_0} \geqslant \tfrac{1}{2} 2^J \tag{4}$$

et l'inégalité (2) montre que

$$\tfrac{3}{4} 2^J - A_{2^s n_0} + \tfrac{1}{8} 2^J > -2\|f^-\|_\infty$$

d'où

$$A_{2^s n_0} < \tfrac{9}{10} 2^J \tag{5}$$

(en supposant $\|f^-\|_\infty$ petit par rapport à 2^J).

Posons $n = 2^s n_0$. Soit $S = \operatorname{Spec} \Pi[1+\cos k_j\theta]$. On vérifie que (4), (5) entraîne l'existence de parties

$$X \subset S, \quad Y \subset S \quad \text{et} \quad |X| = |Y| = \tfrac{1}{10} 2^J \tag{6}$$

t.q.

$$X + n \subset \Lambda \quad \text{et} \quad (Y+n) \cap \Lambda = \emptyset. \tag{7}$$

Nous allons maintenant user d'une méthode utilisée dans l'article de Roth [2].

D'abord, par (7) (en intégrant par rapport à la mesure normalisée sur Π)

$$\int_\Pi \Big(\sum_{k\in X} e^{ik\theta} - \sum_{k\in Y} e^{ik\theta}\Big) e^{in\theta} f(\theta) = |X|$$

et, en usant de Cauchy–Schwartz, on peut majorer le membre gauche par

$$\Big\{\int \Big|\sum_{k\in X} - \sum_{k\in Y}\Big|^2 |f|\Big\}^{1/2} \|f\|_1^{1/2} = \sqrt{2}\,\Big\{\int \Big|\sum_{k\in X} - \sum_{k\in Y}\Big|^2 (f + 2\|f^-\|_\infty)\Big\}^{1/2} \|f^-\|_\infty^{1/2}. \tag{8}$$

Aussi

$$\int_\Pi \Big|\sum_{k\in X} e^{ik\theta} - \sum_{k\in Y} e^{ik\theta}\Big|^2 (f(\theta) + 2\|f^-\|_\infty) \leqslant 4|X|\,\|f^-\|_\infty + 2|X|^2 - 2\sum_{\substack{k\in X\\ l\in Y}} \hat{f}(k-l). \tag{9}$$

Puisque $X, Y \subset S$

$$\sum_{\substack{k\in X\\ l\in Y}} \hat{f}(k-l) \geqslant |X|^2 - \Big(|S|^2 - \sum_{k,l\in S} \hat{f}(k-l)\Big). \tag{10}$$

(8), (9), (10) entraîne

$$\frac{|X|^2}{2\|f^-\|_\infty} \leqslant 4\|f^-\|_\infty |X| + 2|S|^2 - 2\sum_{k,l\in S} \hat{f}(k-l). \tag{11}$$

Clairement

$$S - S \subset \Omega, \quad (S-S) \pm n_0 \subset \Lambda.$$

Donc

$$-2\|f^-\|_\infty |S| \leqslant \int \Big|\sum_{k\in S} e^{ik\theta}\Big|^2 \varphi(n_0\theta) f(\theta) \leqslant \tfrac{3}{4}\sum_{k,l\in S} \hat{f}(k-l) - |S|^2 + \tfrac{1}{4}|S|^2$$

d'où

$$\sum_{k,l\in S} \hat{f}(k-l) \geqslant |S|^2 - \tfrac{8}{3}\|f^-\|_\infty |S|. \tag{12}$$

Substitution de (12) dans (11) montre que

$$\frac{|X|^2}{2\|f^-\|_\infty} \leqslant 4\|f^-\|_\infty |X| + \frac{16}{3}\|f^-\|_\infty |S|, \qquad \|f^-\|_\infty^2 \geqslant \frac{|X|^2}{20|S|}$$

et en usant (6)

$$\|f^-\|_\infty \geqslant \frac{1}{50}\,\frac{2^J}{\sqrt{3}^J} > 2^{(\log N)^{\varepsilon/2}},$$

ce qui termine la démonstration.

References

[1] J. Bourgain, *Translation invariant complemented subspaces of L^p*, Studia Math. 75 (1982), p. 95–101.

[2] K. F. Roth, *On cosine polynomials corresponding to sets of integers*, Acta Arith. 24 (1973), p. 87–98.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL
Pleinlaan 2, F7
1050 Bruxelles

Reçu le 12.7.1983 (1367)