classes in $\mathrm{Cl}(K/\Sigma)$, $n(l(c_1)-1)(l(c_2)-1)$ is divisible by 24 if and only if it is divisible by ww_K, and hence Proposition 1 is a generalization of Kersey's result ([3], ch. 11).

Let $\Delta_K(c_0)$ be the subgroup of Δ_K generated by μ_K and all units of the following form:

$$\left(\frac{\delta_K(c_1 c_2)}{\delta_K(c_1)\delta_K(c_2)}\right)^n,$$

with a rational integer n such that $n(l(c_1)-1)(l(c_2)-1) \equiv 0 \pmod{24}$. Then by Proposition 1, $\Delta_K(c_0)$ is contained in $\mu_K E_K^{24h}$. Let n_0 be the least positive rational integer such that $n_0(l(c_1)-1)(l(c_2)-1) \equiv 0 \pmod{24}$ for any pair (c_1, c_2) of the classes in $\mathrm{Cl}(K/\Sigma)$. As can be easily confirmed, $n_0 = 1, 2, 3$ or 6, and $n_0 = \frac{1}{2}(w_K/w)$ or (w_K/w) according to whether w_K is divisible by 8 or not. Moreover by following a procedure similar to one of Kersey ([3], ch. 9, 5), we have $(\Delta_K; \Delta_K(c_0)) = n_0[K; \Sigma]$, and hence Theorem 2.

References

[1] M. Deuring, *Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation*, Enzykl. math., Wiss. 1–2, 2. Aufl., Heft 10, Stuttgart 1958.

[2] D. Kersey, *The index of modular units in complex multiplication*, to appear.

[3] D. Kubert and S. Lang, *Modular Units*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1981.

[4] M. Newman, *Construction and application of a class of modular functions*, Proc. London Math. Soc. 7 (1957), pp. 334–350.

[5] R. Schertz, *L-Reihen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern und ihre Anwendung auf Klassenzahlprobleme bei quadratischen und biquadratischen Zahlkörpern I, II*, J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973), pp. 120–133; 270 (1974), pp. 195–212.

[6] — *Zur Theorie der Ringklassenkörper über imaginärquadratischen Zahlkörpern*, J. Number Theory 10 (1978), pp. 70–82.

[7] C. L. Siegel, *Lectures on advanced analytic number theory*, Tata Institute Lecture Notes, 1961.

[8] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Vol. III, 3-rd Ed., Chelsea, New York 1962.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
KYUSHU-TOUKAI UNIVERSITY
223 Toroku, Ohe-cho, Kumamoto 862
Japan

Received on 14.10.1983 (1377)

ACTA ARITHMETICA
XLV (1985)

Über eine Vermutung von Choi, Erdös und Nathanson

von

JOACHIM ZÖLLNER (Mainz)

Sei N die Menge der natürlichen Zahlen und $N_0 = N \cup \{0\}$. Seien h und $N \in N$. Eine Menge $A \subseteq N_0$ mit $0 \in A$ heißt *Abschnittsbasis* der Ordnung h für N, falls jedes $n \in [1, N] \cap N$ darstellbar ist als Summe von h Elementen aus A.

Nach einem bekannten Satz von Lagrange ist jede natürliche Zahl darstellbar als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen. Daher ist für jedes $N \in N$ die Menge $A = \{a^2 \mid a \in N_0,\ a^2 \leqslant N\}$ Abschnittsbasis der Ordnung 4 für N und es gilt $|A| \leqslant N^{1/2}+1$.

Choi, Erdös und Nathanson [1] haben Abschnittsbasen A der Ordnung 4 für jedes $N \in N$ konstruiert, die ebenfalls nur aus Quadraten bestehen und für die gilt $|A| < (2/\log 2) N^{1/3} \log N$. Andererseits folgt aus kombinatorischen Gründen für eine Abschnittsbasis der Ordnung 4, daß $|A| \geqslant N^{1/4}$. Eine in [1] formulierte Vermutung lautet nun:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $N \geqslant N(\varepsilon)$ existiert eine Abschnittsbasis A der Ordnung 4 für N, die nur aus Quadraten besteht und für die gilt $|A| \leqslant N^{(1/4)+\varepsilon}$.

Diese Aussage ist offensichtlich äquivalent mit

SATZ 1. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \in N$ existiert eine Abschnittsbasis A der Ordnung 4 für N, die nur aus Quadraten besteht und für die gilt $|A| \leqslant c_1 N^{(1/4)+\varepsilon}$ mit einem $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$.*

Dieser Satz soll im folgenden bewiesen werden. Im Beweis, der in weiten Teilen dem in [1] folgt, wird an entscheidender Stelle folgendes Ergebnis von Erdös und Nathanson [2] verwendet:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge B_ε von Quadraten, so daß jede natürliche Zahl $n \neq 4^s(8t+7)$; $s,\ t \in N_0$ darstellbar ist als Summe von höchstens drei Quadraten aus B_ε und daß gilt

$$B_\varepsilon(x) \leqslant C x^{(1/3)+\varepsilon} \quad \text{für ein } C = C(\varepsilon) > 0.\,(^1)$$

Mit einer kleinen Ergänzung versehen, übernehmen wir dies als

(1) Für eine Menge $M \subseteq N_0$ und $x \in R$ bedeutet $M(x) = |M \cap [1, x]|$.

Satz 2. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Menge* A_ε *von Quadraten mit* $0 \in A_\varepsilon$ *und* $A_\varepsilon(x) \leqslant c_2 x^{(1/3)+\varepsilon}$ *für ein* $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$, *so daß gilt:*

(a) *Jedes* $n \neq 4^s(8t+7)$; $s,\ t \in N_0$ *ist darstellbar als Summe von drei Quadraten aus* A_ε.

(b) *Jedes* $n \in N$ *ist darstellbar als Summe von vier Quadraten aus* A_ε.

Beweis von Satz 2. Sei $A_\varepsilon = B_\varepsilon \cup \{(2^k)^2 \mid k \in N_0\} \cup \{0\}$, wobei B_ε nach dem obigen Ergebnis aus [2] gewählt ist(²). Wegen $0 \in A_\varepsilon$ gelten (a) und (b) für alle $n \neq 4^s(8t+7)$; $s,\ t \in N_0$. Sei also $n = 4^s(8t+7)$ mit $s,\ t \in N_0$. Da $4^s(8t+6) = a^2+b^2+c^2$ mit $a^2,\ b^2,\ c^2 \in B_\varepsilon$, folgt $n = 4^s(8t+7) = a^2+b^2+c^2+(2^s)^2$ mit $a^2,\ b^2,\ c^2,\ (2^s)^2 \in A_\varepsilon$, womit (b) auch für diese n gezeigt ist. Die behauptete Abschätzung für $A_\varepsilon(x)$ ergibt sich aus $B_\varepsilon(x) \leqslant Cx^{(1/3)+\varepsilon}$ und wegen $|\{(2^k)^2 \mid k \in N_0\} \cap [1,\ x]| \leqslant c_3 \log x$.

Beweis von Satz 1. Zu $\varepsilon > 0$ sei A_ε nach Satz 2 gewählt. Es sei ferner

$$A_1 = \{a^2 \in A_\varepsilon \mid 0 \leqslant a^2 \leqslant 5N^{3/4},\ a^2 \leqslant N\},$$

$$A_2 = \{([k^{1/2} N^{3/8}]-j)^2 \mid k \in [5,\ N^{1/4}] \cap N,\ j \in \{0,\ 1\}\}\ (^3),$$

$$A_3 = A_1 \cup A_2.$$

Nach Satz 2 ist $|A_1| \leqslant c_2(5N^{3/4})^{(1/3)+\varepsilon} \leqslant c_4 N^{(1/4)+(3/4)\varepsilon}$. Wegen $k \leqslant N^{1/4}$ und $j \in \{0,\ 1\}$ ist $|A_2| \leqslant 2N^{1/4}$. Damit gilt $|A_3| \leqslant c_5 N^{(1/4)+(3/4)\varepsilon}$.

Zunächst zeigen wir, daß jedes $n \leqslant N$, $n \not\equiv 0 \pmod 4$ darstellbar ist als Summe von vier Quadraten aus A_3. Das folgt für $n \leqslant 5N^{3/4}$ sofort aus Satz 2(b). Sei also $5N^{3/4} < n \leqslant N$. In diesem Fall ist $5 < N^{1/4}$ und damit $A_2 \neq \emptyset$. Wir setzen $k = \left[\dfrac{n}{N^{3/4}}\right]$ und $a = [k^{1/2} N^{3/8}]$. Wegen

$$5 = \left[\frac{5N^{3/4}}{N^{3/4}}\right] \leqslant \left[\frac{n}{N^{3/4}}\right] = k \leqslant \frac{n}{N^{3/4}} \leqslant \frac{N}{N^{3/4}} = N^{1/4}$$

sind a^2 und $(a-1)^2$ aus A_2. Sei $\{b_1,\ b_2\} = \{a,\ a-1\}$, wobei o.B.d.A. b_1 gerade und b_2 ungerade ist.

Fall 1: $n \not\equiv 3 \pmod 4$. Dann ist $n-b_1^2 \not\equiv 3 \pmod 4$ und $n-b_1^2 \not\equiv 0 \pmod 4$, da auch $n \not\equiv 0 \pmod 4$ vorausgesetzt war. Damit ist $n-b_1^2 \neq 4^s(8t+7)$ für alle $s,\ t \in N_0$.

Fall 2: $n \equiv 3 \pmod 4$. Dann ist $n-b_2^2 \equiv 2 \pmod 4$.

Also gibt es in beiden Fällen ein $b^2 \in A_2$, so daß gilt $n-b^2 \neq 4^s(8t+7)$ für alle $s,\ t \in N_0$. Nach Satz 2(a) gibt es $a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2 \in A_\varepsilon$ mit $n-b^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2$. Um nachzuweisen, daß diese drei Quadrate in A_1 enthalten sind, ist $0 \leqslant n-b^2 \leqslant 5N^{3/4}$ zu zeigen:

(²) Man kann auch leicht zeigen, daß bereits $\{(2^k)^2 \mid k \in N_0\} \subseteq B_\varepsilon$ gelten muß.

(³) $[x]$ bezeichnet die größte ganze Zahl $\leqslant x$.

Aus $k = \left[\dfrac{n}{N^{3/4}}\right]$ folgt $kN^{3/4} \leqslant n < (k+1)N^{3/4}$ und aus $a = [k^{1/2} N^{3/8}]$ folgt $a \leqslant k^{1/2} N^{3/8} < a+1$. Damit ist

$$n-b^2 \geqslant n-a^2 \geqslant kN^{3/4} - kN^{3/4} = 0.$$

Wegen $b \geqslant a-1 \geqslant [5^{1/2}]-1 > 0$ gilt

$$\begin{aligned} n-b^2 \leqslant n-(a-1)^2 &< (k+1)N^{3/4} - (k^{1/2} N^{3/8} - 2)^2 \\ &< kN^{3/4} + N^{3/4} - kN^{3/4} + 4k^{1/2} N^{3/8} \\ &\leqslant N^{3/4} + 4N^{1/8} N^{3/8}, \quad \text{da } k \leqslant N^{1/4} \\ &\leqslant 5N^{3/4}. \end{aligned}$$

Also gilt $a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2 \in A_1$.

Damit ist $n = a_1^2+a_2^2+a_3^2+b^2$ als Summe von vier Quadraten aus $A_3 = A_1 \cup A_2$ darstellbar.

Sei $A := \{(2^r a)^2 \mid a^2 \in A_3,\ 0 \leqslant (2^r a)^2 \leqslant N,\ r \in N_0\}$. Es gilt $A_3 \subseteq A$. Daher ist nur noch für die $n \leqslant N$ mit $n \equiv 0 \pmod 4$ eine Darstellung mit vier Quadraten aus A nachzuweisen.

Für $n > 0$ gibt es dann positive ganze Zahlen r und n' mit $n = 4^r n'$ und $n' \not\equiv 0 \pmod 4$. Nach dem zuvor Bewiesenen gilt

$$n' = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2, \quad x_i^2 \in A_3 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$n = 4^r n' = (2^r x_1)^2+(2^r x_2)^2+(2^r x_3)^2+(2^r x_4)^2, \quad (2^r x_i)^2 \in A.$$

Es verbleibt noch die Abschätzung von $|A|$. Für $a > 0$ ist $4^r \leqslant (2^r a)^2 \leqslant N$, also $r \leqslant \log N/\log 4$. Wie eingangs gezeigt, ist $|A_3| \leqslant c_5 N^{(1/4)+(3/4)\varepsilon}$. In Abhängigkeit von ε erhalten wir für geeignete $c_6,\ c_1 > 0$, daß

$$|A| \leqslant 1+\left(\frac{\log N}{\log 4}+1\right)|A_3| \leqslant c_6 N^{(1/4)+(3/4)\varepsilon} \log N \leqslant c_1 N^{(1/4)+\varepsilon}.$$

Literaturverzeichnis

[1] S. L. G. Choi, P. Erdös, M. B. Nathanson, *Lagrange's theorem with $N^{1/3}$ squares*, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), S. 203–205.

[2] P. Erdös, M. B. Nathanson, *Lagrange's theorem and thin subsequences of squares*, in: J. Gani, V. K. Rohatgi (eds.), *Contributions to probability*, Academic Press, N. Y., 1981, S. 3–9.

Eingegangen am 15.11.1983 (1383)