ACTA ARITHMETICA
XLV (1985)

Carl Ludwig Siegel

Carl Ludwig Siegel, 31.12.1896–4.4.1981

von

MAX DEURING

Diese Schilderung des wissenschaftlichen Werkes von C. L. Siegel, soweit es die Zahlentheorie angeht, soll mit einer kurzen Übersicht über seinen Lebensgang eröffnet werden. Er wurde am 31. Dezember 1896 in Berlin geboren. Sein Interesse für die Mathematik zeigte sich frühzeitig, obwohl, wie wir aus autobiographischen Bemerkungen wissen, der Schulunterricht keine Anregungen bot. Das erste Werk damals moderner mathematischer Literatur, das ihm, mehr zufällig, in die Hände kam, war H. Webers Lehrbuch der Algebra, Band III, ein Buch, das man wohl niemals einem Anfänger zum Studium empfohlen hätte; Siegel begann es zu lesen, und verstand es.

Im Jahre 1915 liess er sich an der Berliner Universität einschreiben, mit der Absicht, Astronomie zu studieren. Astronomie wählte er, um, wie er hoffte, sich weit von den irdischen Dingen entfernen zu können, die ja gerade eine so üble Entwicklung begonnen hatten. Der Zufall fügte es, dass die Astronomie-Vorlesung um zwei Wochen verschoben wurde, und so begann Siegel eine (für die gleiche Zeit wie die Astronomie-Vorlesung angesetzte) Vorlesung von G. Frobenius über Zahlentheorie zu besuchen, obwohl er, wie er gelegentlich erzählte, keine Vorstellung davon hatte, was Zahlentheorie sein könnte. Dies war für ihn, wie er schreibt, ein für seine wissenschaftliche Laufbahn entscheidendes Erlebnis. Obwohl Siegel sich den starken Eindruck, den Frobenius' Vorlesung auf ihn machte, nicht erklären konnte, so scheint mir doch klar, dass es – neben der Faszination des Gegenstandes – Frobenius' souveräner Vortrag war, der diese Wirkung hatte. Sicher hat Siegel sich Frobenius als Vorbild genommen. Ich erwähne diese, weil ich selbst die Vorlesungen und Vorträge von Siegel als von ähnlicher Art in Erinnerung habe. Er konnte z.B. lange und komplizierte Formeln, die über die ganze Tafel reichten, ohne Zögern aus dem Gedächtnis anschreiben. Der Gedankengang des Vortrages war immer klar und eindringlich.

Schon in seinem dritten Semester (1916-1917) kam Siegel in Berührung mit der Thematik eines wesentlichen Teils seiner Publikationen, mit den diophantischen Approximationen. I. Schur erwähnte in einem Seminar über Zahlentheorie den Satz von Thue über die Approximation algebraischer

Zahlen durch rationale; Siegel las die etwas undurchsichtig formulierte Abhandlung Thues und machte sich eine Ausarbeitung. Die Einführung eines neuen Parameters verhalf mir zu einer Verbesserung des Approximationssatzes von Thue – zu meiner Verwunderung – wie Siegel schreibt, I. Schur verkannte die Bedeutung dieser Arbeit, die mit nur vier Seiten viel zu kurz war, um verstanden zu werden. Nach einer Unterbrechung seiner Studien durch Militärdienst machte Siegel zum Glück die Bekanntschaft E. Landaus, der eine 6-seitige Neufassung von Siegels Manuskript mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % für richtig erklärte. Als Siegel seine Studien, diesmal in Göttingen, wieder aufgenommen hatte, schrieb Landau dem nach und nach auf 40 Seiten angewachsenen Beweis 90 % Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit zu und nahm sie als Dissertation [1], [2] an. Nach der Promotion (2. Juni 1920) war Siegel 1920/21 Lehrbeauftragter in Hamburg, danach anderthalb Jahre Assistent von R. Courant in Göttingen, mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verband. Er habilitierte sich in Göttingen (10.12.1921). Schon zum 1.8.1922 wurde er zum o.Professor in Frankfurt ernannt, als Nachfolger von A. Schönflies. Die Jahre in Frankfurt (bis 1938) bezeichnete Siegel als die schönsten seines Lebens, leider wurden sie ab 1933 durch das Schicksal seiner Kollegen Dehn und Hellinger verdunkelt. In diese Zeit fällt eine Gastprofessur in Göttingen (Sommer 1930). In der Vorlesung über analytische Zahlentheorie dieses Semesters habe ich Siegel kennengelernt; ich darf noch einmal den tiefen Eindruck, den sie auf mich machte, mit dem vergleichen, den Siegel von Frobenius' Vorlesungen hatte. 1936 berichtete Siegel auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Oslo über seine analytische Theorie der quadratischen Formen. (Soviel ich weiss, war dies der einzige Kongress, den er besucht hat, wenn ich von seinem Vortrag auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung in Göttingen 1955 absehe).

1935/36 war Siegel Gast am Institute for Advanced Study in Princeton. In Princeton wurden die ersten beiden Teile seiner grossen Arbeit „Über die analytische Theorie der quadratischen Formen" geschrieben, Teil III (1937) in Frankfurt ([20], [22], [26]).

Damals hatte Siegel wohl daran gedacht, in Amerika zu bleiben, aber er kehrte nach Frankfurt zurück. Aber die Verhältnisse hier wurden unerträglich, so nahm er zum 1.1.1938 einen Ruf nach Göttingen an. Hier war aber der Druck nicht viel weniger zu spüren, und als dann 1939 der Krieg ausbrach, fasste er den Entschluss, Deutschland zu verlassen. Eine Vortragsreise nach Oslo ermöglichte ihm, 1940, kurz vor der Besetzung Norwegens, nach Amerika zu reisen. Er erhielt ein Forschungsstipendium am Institute for Advanced Study (Princeton), später, nach Kriegsende, eine Professur ebenda. Im Winter 1946/47 hielt er eine Vorlesung in Göttingen. Im Herbst 1951 erhielt er wieder eine Professur in Göttingen, 1959 liess er sich vorzeitig emeritieren, setze aber, von amtlichen Verpflichtungen befreit, seine Lehrtätigkeit noch mehrere Jahre fort, ohne sich etwa auf Vorlesungen für fortgeschrittene Semester zu beschränken.

Siegel hat an verschiedenen Orten Vorträge über seine Arbeiten gehalten; viermal war er zu Vorlesungen am Institute for Fundamental Research in Bombay. Ausarbeitungen mehrerer seiner Vorlesungen sind im Druck erschienen.

Die wissenschaftliche Tätigkeit Siegels hörte mit dem Ende seiner Vorlesungstätigkeit keineswegs auf. Die 1966 von H. Maass und K. Chandrasekharan in drei Bänden herausgegebenen Gesammelten Abhandlungen Siegels mussten 1979 durch einen vierten Band ergänzt werden. Die letzte Forschungsarbeit [99] erschien 1975. Seine Kräfte beginnen zu schwinden; er starb am 4. April 1981 in seiner Wohnung in Göttingen.

Im Folgenden soll näher auf die Arbeiten Siegels eingegangen werden, die entweder rein zahlentheoretische Themen behandeln, oder doch mit der Zahlentheorie zusammenhängen. Wir lassen also die mehr funktionentheoretischen Arbeiten und vor Allem die zur Himmelsmechanik ganz beiseite.

Arbeiten über diophantische Approximationen und diophantische Gleichungen: Die schon erwähnte Dissertation behandelt folgende Frage: x sei eine algebraische Zahl vom Grade $n > 1$; gefragt wird nach dem Infimum λ aller positiven l, für die diophantische Ungleichung

$$|x - p/q| < q^{-l}$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen, teilerfremden p, q hat. Thue bewies

$$\lambda \leqslant n/2 + 1;$$

Siegel verschärft das zu

$$\lambda \leqslant \operatorname*{Min}_{\nu=1}^{n} \left(\frac{n}{\nu+1} + \nu \right) < 2\sqrt{n}.$$

Siegel gibt auch eine Verallgemeinerungen für die Approximation einer algebraischen Zahl x, die von einem Grad $n > 1$ über einem algebraischen Zahlkörper k ist, durch Zahlen eben dieses Körpers. In [6] wird der zuerst genannte einfachste Fall (Approximation algebraischer Zahlen durch rationale) noch einmal dargestellt. Aus dem Approximationssatz leitet Siegel Ergebnisse über diophantische Gleichungen her, wie es schon Thue mit seiner schwächeren Aussage gemacht hatte. Sehr viel später ist Siegel noch einmal auf die Arbeit Thue's eingegangen, um die Wege zu verfolgen, die Thue gehen musste, um sein fundamentales Resultat zu erhalten [91].

Die bedeutendste Arbeit Siegels über diophantische Approximationen und Gleichungen ist [16]. In ihr werden zwei Problemkreise in Angriff genommen: Transzendente Zahlen und ganzzahlige Punkte auf algebraischen Kurven. Dass Transzendenzprobleme mit diophantischen Approximationen zu tun haben, war seit Liouvilles Untersuchungen bekannt, das trat ja auch bei den Beweisen für die Transzendenz von e und π in Erscheinung. Eines der Ergebnisse Siegels ist dieses:

$J_0(z)$ bedeute die 0-te Besselsche Funktion, ξ sei eine algebraische Zahl vom Grade m. $g(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ sei $\neq 0$, vom Grade p, und sämtliche Koeffizienten von g seien absolut $\leqslant G$. Dann gibt es eine allein von ξ und p abhängige Zahl $c > 0$, so dass die Ungleichung

$$|g(J_0(\xi), J_0'(\xi))| > cG^{-123p^2m^3}$$

gilt; $J_0(\xi)$ und $J_0'(\xi)$ sind über Q algebraisch unabhängig, insbesondere sind beide Zahlen transzendent. Die hier entwickelte Methode wird noch auf andere Transzendenzenprobleme angewendet.

Das zweite Thema von [16] sind Punkte mit Koordinaten in einem Zahlkörper k auf über k definierten algebraischen Kurven. Das Hauptresultat lautet: Die Anzahl der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in k auf einer über k definierten Kurve C ist endlich, vorausgesetzt, das Geschlecht von C ist > 0. Beim Beweis wird neben diophantischen Approximationen der Mordell–Weilsche Endlichkeitssatz für die Gruppe der über k-rationalen Punkte der Jacobischen Mannigfaltigkeit von C benutzt.

Auf mit elliptischen Funktionen zusammenhängende Transzendenzprobleme geht Siegel in [17] ein. Sind g_2, g_3 die Invarianten der elliptischen Funktionen mit dem Periodengitter $\mathbf{Z}\omega_1 \oplus \mathbf{Z}\omega_2$ (also die Koeffizienten in der Differentialgleichung für die Weierstrassche $\wp$-Funktion), so sind die vier Zahlen ω_1, ω_2, g_2, g_3 nicht sämtlich algebraisch. Man vergleiche auch das Buch [*1*].

Arbeiten zur Theorie der algebraischen Zahlkörper: In [3] behandelt Siegel die Frage nach der Darstellbarkeit von (total positiven) Zahlen α eines Zahlkörpers k als Summe von Quadraten von Zahlen eben dieses Körpers und beweist insbesondere die Behauptung Hilberts, dass dies stets mit vier Quadraten möglich sei. Ganzzahligkeit der Quadrate wird — auch für total positives α — nicht gefordert. Dann wird noch der Beweis Hilberts für die Waringsche Vermutung auf Zahlkörper übertragen, mit dem Ergebnis: $m \in \mathbf{N}$ sei gegeben. Jede total positive Zahl α von k lässt sich als Summe einer festen, nur von m, nicht von k anhängigen Anzahl von m-ten Potenzen total positiver Zahlen aus k darstellen.

[8] und [14] stellen von Neuem die Frage nach den Darstellungen total positiver Zahlen von k als Summen von Quadratzahlen aus k, diesmal mit ganzen Quadraten. [8] bringt eine asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen einer total positiven Zahl eines reellen quadratischen Körpers k als Summe von n ($\geqslant 5$) ganzzahligen Quadraten aus k.

In [21] beweist Siegel eine als Satz von Siegel bekannte asymptotische

Aussage für den Wert $L_d(1)$ der zu dem quadratischen Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ der Diskriminante d $(\zeta(s, \mathbf{Q}(\sqrt{d})) = \zeta(s) L_d(s))$:

$$\log L_d(1) \underset{|d|\to\infty}{=} o(\log|d|), \tag{1}$$

was im Falle $d < 0$ auf die asymptotische Formel

$$\log h(d) \underset{|d|\to\infty}{\sim} \log\sqrt{|d|}$$

für die Klassenzahl $h(d)$ von $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ hinausläuft. Damit war für das bei Gauss auftretende Problem, $h(d) \to \infty$ für $|d| \to \infty$ zu beweisen, das gerade von H. Heilbronn in positivem Sinne gelöst worden war, eine abschliessende qualitative Aussage erreicht. Leider war sie nicht effektiv, das heisst, dass die Siegel'sche Methode keine Schranken für die in (1) enthaltenen Abschätzungskonstanten ergibt, es war damit noch nicht einmal bewiesen, dass die einzigen Diskriminanten $d < 0$ mit $h(d) = 1$, $-d = 3, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163$ sind. Dies wurde erst 1952 von Heegner(1) bewiesen. Seine schwer verständliche Arbeit wurde zuerst offenbar nicht anerkannt. Erst als Stark(2) einen anderen Beweis fand, wurde klar (Stark(3), Deuring(4)), dass Heegners Arbeit stichhaltig ist. Siegel [85] gab einen weiteren Beweis, der ähnlich wie die von Heegner und Stark auf den Beziehungen beruht, die zwischen den Modulfunktionen und den quadratischen Zahlkörpern besteht.

In den frühen Arbeiten [7] und [13] gibt Siegel neue Beweise für die analytische Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta(s, K)$ eines Zahlkörpers K. Der Beweis in [7] ist eine Verallgemeinerung des Riemannschen Beweises für $\zeta(s)$ $(K = \mathbf{Q})$ mittels des Cauchyschen Integralsatzes, in [13] wird der Beweis geführt, ohne die Kenntnis der genauen Struktur der Einheitengruppe von K zu benutzen (wie es bei Hecke geschieht), was Siegel wünschenswert erschien, weil weder die Definition von $\zeta(s, K)$, noch die Formulierung der Funktionalgleichung diese Kenntnis voraussetzen.

In [44] wird das Waringsche Problem für Zahlkörper K gestellt. Siegel gelingt es, nachdem die Frage präzisiert ist, die Kreismethode von Hardy–Littlewood für das klassische Problem auf beliebige Zahlkörper (anstelle von $\mathbf{Q}$) zu verallgemeinern. Natürlich benutzt er die Winogradoff'sche Vereinfachung der Hardy–Littlewood-Methode, nämlich endliche Exponential-

(1) K. Heegner, *Diophantische Gleichungen und Modulfunktionen*, Math. Zeitschrift 56 (1952), S. 227–253.

(2) H. Stark, *A complete determination of the complex quadratic fields of classnumber one*, Michigan Math. J. 14 (1967), S. 1–27.

(3) H. Stark, *On the "gap" in a theorem of Heegner*, J. Number Theory 1 (1969), S. 16–27.

(4) M. Deuring, *Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl Eins*, Inventiones Math. 5 (1968), S. 169–179.

summen an Stelle der erzeugenden Potenzreihe zu verwenden, die Hauptschwierigkeit war aber die Verallgemeinerung der Farey-Zerschneidung auf Zahlkörper.

Die klassischen Probleme der Riemannschen Zetafunktion waren es wohl, die Siegel veranlassten, Riemann's Nachlass zur analytischen Zahlentheorie herauszugeben [18]. Siegel ist auch später noch auf die Theorie der ζ-Funktion und der L-Reihen eingegangen [51], [66], in weiterem Zusammenhang auch [67], ferner [80].

1935, 1936, 1937 erschienen die drei Teile der grossen Arbeit „Ueber die analytische Theorie der quadratischen Formen" [20], [22], [26]. Sie ist eine eindrucksvolle Fortführung der klassischen Untersuchungen, die mit dem folgenden Satz von Legendre beginnen:

Die diophantische Gleichung

$$ax^2+bxy+cy^2 = d, \qquad a, b, c, d \in Z \tag{2}$$

ist genau dann in rationalen Zahlen x, y lösbar, wenn für jedes $q \in N$ die Kongruenz

$$ax^2+bxy+cy^2 \equiv d \bmod q \tag{3}$$

und ausserdem (2) in $\boldsymbol{R}$ lösbar ist. Dies wurde von H. Hasse folgendermassen verallgemeinert. $S = S^{(m)}$ sei eine m-seitige symmetrische Matrix über $\boldsymbol{Z}$, d.h. $x^t Sx$ eine ganzzahlige quadratische Form in m Variabeln $(x_1, \ldots, x_m) = x$; $T^{(n)}$ entsprechend die Matrix einer solchen Form in n Variabeln $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Gefragt wird nach rationalen Darstellungen der zweiten Form durch die erste, d.h. nach Lösungen der Gleichung

$$X^t SX = T \tag{4}$$

durch rationalzahlige Matrizen $X = X^{(m,n)}$ (m Zeilen und n Spalten). Der Satz von Hasse sagt, dass die genau dann möglich ist, wenn es mit einer reellen Matrix X und für jede Primzahl p mit einer p-adischen Matrix, kurz, wenn es in jeder Komplettierung von $\boldsymbol{Q}$ möglich ist. Für die Zahlentheorie sind aber nicht so sehr wichtig die rationalen Darstellungen von T durch S, wie die ganzzahligen, genauer die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (2). Dazu ist aber zu sagen, dass (2) für indefinites S unendlich viele Lösungen haben kann (z. B. die Pellsche Gleichung $x_1^2-dx_2^2 = 1$ für nichtquadratisches $d \in N$). Zunächst sollen daher S und T definit vorausgesetzt werden, die Anzahl $A(S, T)$ der Lösungen von (2) im ganzen X ist dann endlich. $E(S) = A(S, S)$ bezeichne die Anzahl der Einheiten von S, d.h. der Matrizen X, die S in sich transformieren. Zwei Formen S_1, S_2 heissen (in $\boldsymbol{Z}$) *äquivalent*, wenn S_1 in S_2 und S_2 in S_1 ganzzahlig transformierbar ist, d.h. wenn es eine unimodulare Matrix U in $\boldsymbol{Z}$ und $U^t S_1 U = S_2$ gibt. Offenbar ist $A(S_1, T_1) = A(S_2, T_2)$, wenn S_1 mit S_2 und T_1 mit T_2 äquivalent sind, äquivalente Formen sind für die Frage der Darstellbarkeit einer Form durch eine andere gleichwertig.

S_1 und S_2 heissen *verwandt* (oder: zum gleichen Geschlecht gehörig), wenn sie in $\boldsymbol{R}$ und für jede Primzahl p im Ring $\boldsymbol{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen $\boldsymbol{Q}$ äquivalent sind. Jedes Geschlecht zerfällt in endlich viele Klassen, im allgemeinen in mehr als eine. Der Satz von Legendre und Hasse besagt, dass verwandte Formen für die Frage nach der rationalen Darstellbarkeit von T durch S gleichwertig sind. Für die Frage nach der Darstellbarkeit von T durch S in $\boldsymbol{Z}$ sind sie es nicht (Siegel führt ein einfaches Beispiel an: $x_1^2+55x_2^2$ und $5x_1^2+11x_2^2$ sind verwandt, aber nicht äquivalent, in der Tat ist $x_1^2+55x_2^2 = 1$ ganzzahlig lösbar und $5x_1^2+11x_2^2 = 1$ ist es nicht).

Deswegen sind bei Untersuchungen, die die Lösungszahlen $A(S, T)$ mit den Anzahlen $A_q(S, T)$ der Kongruenzen

$$X'SX \equiv T \bmod q, \qquad q \in N \tag{5}$$

in Zusammenhang bringen sollen, verwandte Formen gemeinsam zu behandeln.

$S_1, \ldots, S_g$ sei ein System von Repräsentanten der Klassen eines Geschlechts. Für die Anzahlen

$$A_{p^\nu}(S, T) \qquad (S = S^{(m)},\ T = T^{(n)},\ p \text{ Primzahl},\ \nu \in N)$$

gilt.

Die Folge

$$A_{p^\nu}(S, T)\, p^{\nu\left(\frac{n(n+1)}{2}-mn\right)}; \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist für hinreichend grosse ν konstant, etwa gleich

$$\alpha_p^*(S, T) \in \boldsymbol{Q}.$$

Die p-adische Lösungsdichte der Gleichung

$$X^t SX = T$$

wird durch

$$\alpha_p(S, T) = \alpha_p^*(S, T), \qquad \text{falls } m > n,$$

$$\alpha_p(S, T) = \tfrac{1}{2}\alpha_p^*(S, T), \qquad \text{wenn } m = n$$

definiert.

Dazu kommt die reelle Lösungsdichte. Die reellen symmetrischen Matrizen $S = S^{(m)}$ werden als Punkte im $(m(m+1)/2)$-dimensionalen Cartesischen Raum $\boldsymbol{R}^{m(m+1)/2}$ aufgefasst, die reellen Matrizen $X = X^{(m,n)}$ als Punkte im $\boldsymbol{R}^{mn}$,

$$X^t SX = T$$

definiert eine offene Abbildung $\boldsymbol{R}^{mn} \to \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$. Das Volumen eines Gebietes G von $\boldsymbol{R}^{mn}$ sei $V(G)$, $V(X(G))$ das Volumen des Bildes $X(G)$ von G in

$R^{n(n+1)/2}$. Für eine Folge von Gebieten G mit dem Durchschnitt T existiert der Limes

$$\lim_{G \to T} \frac{v(G)}{v(X(G))},$$

es werde mit $\alpha_\infty^*(S, T)$ bezeichnet und es werde die reelle Lösungsdichte $\alpha_\infty(S, T)$ von (2) durch

$$\alpha_\infty(S, T) = \alpha_\infty^*(S, T), \qquad \text{falls } m > n+1,$$

$$\alpha_\infty(S, T) = \tfrac{1}{2}\alpha_\infty^*(S, T), \qquad \text{wenn } m = n \text{ oder } = n+1 \text{ ist},$$

definiert.

Der Hauptsatz von [20] ist: $S = S^{(m)}$ sei positiv definit, $T = T^{(n)}$, $n \leqslant m$. $S_1, \ldots, S_g$ seien Repräsentanten der g Klassen von mit S verwandten Formen. $A(S, T)$ ist endlich, und es gilt

$$\sum_{\nu=1}^{g} \frac{A(S_\nu, T)}{E(S_\nu)} \Big/ \sum_{\nu=1}^{g} \frac{1}{E(S_\nu)} = \alpha_\infty(S, T) \prod_p \alpha_p(S, T).$$

(Die Werte $\alpha_p(S, T)$ und $\alpha_p(S, T)$ hängen offenbar nur von der Klasse von S ab.) $M(S) = \sum_{\nu=1}^{g} 1/E(S_\nu)$ heisst dass Mass des Geschlechtes von S. Dieser Satz wird an mehreren Beispielen erläutert. Es gibt unmittelbar $A(S, T)$, wenn das Geschlecht von S nur eine Klasse enthält. Das ist z.B. für die Einsmatrix $S = 1_m$ für $2 \leqslant m \leqslant 8$ der Fall und man hat klassische Sätze von Lagrange, Gauss, Jacobi, Eisenstein, Smith und Jacobi für die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl t als Summe von m Quadraten, $2 \leqslant m \leqslant 8$. In [22] wird dieser Hauptsatz in geeigneter Form für indefinite Formen aufgestellt und bewiesen. Die $\alpha_p(S, T)$ haben für indefinites S auch einen Sinn, $\alpha_\infty(S, T)$ aber nicht im Allgemeinen, ferner sind $A(S, T)$ und $E(S)$ unendlich (i.A.). Es ist also nötig, die Bildungen $E(S)$, $A(S, T)$ und $\alpha_\infty(S, T)$ durch geeignete Grössen zu ersetzen, dann lässt sich der Hauptsatz auch für indefinite Formen in der gleichen Form wie für definite aussprechen und beweisen. [26] bringt schliesslich die Verallgemeinerung für quadratische Formen in einem Zahlkörper. Der Inhalt der drei Arbeiten [20], [22], [26] ist aber mit dem Hauptsatz nicht erschöpft.

Im zweiten Teil von [20] wird für den Hauptsatz eine funktionentheoretische Deutung gegeben. Sei zuerst $m > 4$, $n = 1$. Die Thetareihe

$$f(S, \tau) = \sum_{x \in Z^m} e^{\pi i \tau x' S x}$$

ist in $\operatorname{Im} \tau > 0$ holomorph, sie ist offensichtlich eine Invariante der Klasse

von S, die Linearkombination

$$F(S, \tau) = \frac{1}{M(S)} \sum_{\nu=1}^{g} \frac{f(S_\nu, \tau)}{E(S_\nu)}$$

ist eine Invariante des Geschlechtes von S.

Siegel zeigt nun, dass der Hauptsatz (im Falle $m > 4$, $n = 1$) mit einer Partialbruchentwicklung (Eisenstein-Reihe) für $F(S, \tau)$ gleichbedeutend ist:

$$F(S, \tau) = 1 + \sum_{a,b} H(S, a/b)(b\tau - a)^{-m/2}.$$

Dabei durchläuft $a, b \in \mathbf{Z}^2$ alle Paare mit $b > 0$, $(a, b) = 1$, falls S gerade ist, d.h. alle Diagonalelemente vor S gerade sind, wenn S ungerade ist, so wird $b > 0$, $(a, b) = 1$, $2|ab$ gefordert. $H(S, a/b)$ ist im Wesentlichen eine Gauss'sche Summe:

$$H\left(S, \frac{a}{b}\right) = \left(\frac{i}{b}\right)^{m/2} (\det S)^{-1/2} \sum_{x \in \mathbf{Z}^n \bmod b} e^{\pi i \frac{a}{b} x' S x}.$$

Diese Eisensteinentwicklung der Modulform $F(S, \tau)$ war in Spezialfällen bekannt, z.B. für $S = 1_m$, $4 < m \leqslant 8$ (in diesen Fällen hat das Geschlecht von S nur eine Klasse) durch Hardy. Aber Siegel gelingt es, sie auf den allgemeinen Fall zu verallgemeinern, ein Ansatz, der grosse Entwicklungen in der Funktionentheorie auslöste.

Zunächst werden die Thetafunktionen für eine definite Form $S = S^{(m)}$ über Z folgendermassen definiert: Als Variable erscheint eine n-reihige ($n \leqslant m$) symmetrische komplexe Matrix

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(n)} = \mathfrak{Y} + i\mathfrak{Z}$$

mit positiv definitem Imaginärteil, also ein Punkt von Siegels verallgemeinerter oberer Halbebene n-ter Ordnung $\mathfrak{H}_n$. Es wird definiert (Klasseninvariante)

$$f_n(S, \mathfrak{X}) = \sum_C e^{\pi i \operatorname{Sp}(C' S C \mathfrak{X})}, \tag{6}$$

wo $C = C^{(m,n)}$ alle (m, n)-Matrizen über $\mathbf{Z}$ durchläuft. Da die Reihe ersichtlich in $\mathfrak{H}_n$ kompakt konvergent ist, so ist $f_n(S, \mathfrak{X})$ in $\mathfrak{H}_n$ holomorph, und das Gleiche gilt für die Invariante des Geschlechts von S

$$F_n(S, \mathfrak{X}) = \frac{1}{M(S)} \sum_{\nu=1}^{g} f_n(S_\nu, \mathfrak{X})/E(S_\nu).$$

f_n und F_n haben Fourierentwicklungen, deren Koeffizienten sich in einfacher Weise durch Darstellungsanzahlen ausdrücken lassen. Die $C = C^{(m,n)}$ in (6) werden nach ihrem Rang r ($0 \leqslant r \leqslant n$) geordnet. Alle C vom Range r erhält man in eindeutig bestimmter Form

$$C = BQ'$$

wo Q ein volles System nicht rechtsassoziierter primitiver Z-Matrizen $Q = Q^{(n,r)}$ und B alle ganzen (m, r)-Matrizen vom Range r durchläuft. Wir setzen

$$g_n(S, \mathfrak{X}) = \sum_{C, r=n}' e^{\pi \mathrm{Sp}(C'SC\mathfrak{X})},$$

wo nur über die C vom Range n summiert wird. Die Fourierentwicklung von $g_n(S, \mathfrak{X})$ ist

$$g_n(S, \mathfrak{X}) = \sum_T A(S, T)\, e^{\pi i \mathrm{Sp}(T\mathfrak{X})}$$

wo über alle positiven symmetrischen $T = T^{(n)}$ summiert wird. Es ist

$$f_n(S, \mathfrak{X}) = \sum_Q g_n(S, Q'\mathfrak{X}Q).$$

Damit wird die Fourierkoeffizienten von $f_n(S, \mathfrak{X})$ und von $F_n(S, \mathfrak{X})$ durch die Darstellungsanzahlen $A(S, T)$ für alle positiven symmetrischen $T = T^{(r)}$, $1 \leqslant r \leqslant n$, ausgedrückt. Andererseits, und das ist die analytische Formulierung des Hauptsatzes, hat $F_n(S, \mathfrak{X})$ auch eine Darstellung als „Eisensteinsche" Reihe

$$F_n(S, \mathfrak{X}) = \sum_{(A,B)} H(S, A, B) \det (A\mathfrak{X} - B)^{-m/2} \tag{7}$$

wobei $m > 2n^2 + n + 1$ vorauszusetzen ist, um die Konvergenz der auftretenden Reihen zu sichern.

Es soll die Bedeutung von (A, B) und $A\mathfrak{X} - B$ genau erklärt werden: $A = A^{(n)}$, $B = B^{(n)}$ sind (n, n)-Matrizen über Z. Das Paar (A, B) heisst symmetrisch, wenn $AB' = BA'$ ist, es heisst teilerfremd, wenn A und B keinen gemeinsamen Linksteiler (ausser unimodularen Matrizen) haben. Zwei Paare A, B, A_1, B_1 heissen assoziiert (eigentlich assoziiert) wenn es eine (eigentlich) unimodulare Matrix U mit

$$A_1 = UA, \quad B_1 = UB$$

gibt.

(A, B) bezeichnet immer die Assoziationsklasse des teilerfremden Paares A, B. Der Rang r von A ist offenbar eine Invariante der Klasse (A, B).

In jeder Klasse (A, B) vom Range r gibt es zu A, B eigentlich assoziierte Paare der Form

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U', \quad \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{bmatrix} U^{-1}$$

mit eigentlich unimodularem U und $A_1 = A_1^{(r)}$, also $\det A_1 \neq 0$. $\det A_1$ ist eine Invariante der Klasse (A, B). (A, B) heisse positiv, wenn $\det A_1 > 0$ ist.

Wir definieren

$$H(S, A, B) = i^{mr/2} \det S^{-r/2} \det A_1^{-m/2} \sum_{C \bmod A_1} e^{\pi i \mathrm{Sp}(C'SCA_1^{-1}B_1)}$$

wo C ein volles System von modulo A_1 inkongruenten ganzen (m, r)-Matrizen durchläuft. Es ist leicht einzusehen, dass $H(S, A, B)$ eine Invariante der Klasse (A, B) ist, im Wesentlichen eine Gauss'sche Summe. Es ist $H(S, A, B) = 0$, wenn A, B der – auch nur von der Klasse (A, B) abhängigen – Bedingung genügt, dass $\mathrm{Sp}(G'SGB_1A_1')$ für gewisse ganze Matrizen $G = G^{(m,n)}$ ungerade wird. In (7) wird über alle positiven Klassen (A, B) summiert, für r die $\mathrm{Sp}(G'SGB_1A_1')$ gerade ist, wenn G eine beliebige ganze (m, n)-Matrix bedeutet.

Die Eisenstein-Entwicklungen (7) der Thetafunktionen $F_n(S, \mathfrak{X})$ waren für Siegel der Anstoss, die Theorie der „Modulfunktionen n-ten Grades" (heute: Siegelsche Modulfunktionen) zu entwickeln ([20], § 13). Das soll erläutert werden.

Eine ganzzahlige Matrix

$$M = M^{(2n)} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad A = A^{(n)},\ B = B^{(n)},\ C = C^{(n)},\ D = D^{(n)}$$

heisst kanonisch, wenn A, B und C, D zwei symmetrische Matrizenpaare sind und wenn

$$AD' - BC' = 1_n$$

gilt, die beiden Paare A, B und C, D sind dann teilerfremd. Die kanonischen Matrizen M bilden eine multiplikative Gruppe, die homogene Modulgruppe n-ten Grades. Eine kanonische Matrix M definiert die gebrochene lineare Transformation

$$\mathfrak{X} \mapsto M(\mathfrak{X}) = (A\mathfrak{X} + B)(C\mathfrak{X} + D)^{-1}$$

von $\mathfrak{H}^{(n)}$ in sich und

$$M \mapsto (\mathfrak{X} \mapsto M(\mathfrak{X}))$$

ist ein Homomorphismus der homogenen Modulgruppe auf die Gruppe der linearen Abbildungen $\mathfrak{X} \mapsto M(\mathfrak{X})$, die Modulgruppen n-ten Grades $\Gamma^{(n)}$ bilden; der Kern des Homomorphismus ist $\{1_{2n}, -1_{2n}\}$. $\Gamma^{(n)}$ ist eigentlich diskontinuierlich in $\mathfrak{H}^{(n)}$ und hat einen einfach zu beschreibenden Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^{(n)}$, der dem Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^{(1)}$ der klassischen Modulgruppe $\Gamma^{(1)}$ ganz analog ist.

Eine in $\mathfrak{H}^{(n)}$ meromorphe Funktion $f(\mathfrak{X})$ heisst Modulfunktion n-ten Grades, wenn sie durch $\Gamma^{(n)}$ in sich transformiert wird

$$f(M(\mathfrak{X})) = f(\mathfrak{X})$$

für alle kanonischen Matrizen M. Die Meromorphie im Unendlichen ist dabei noch geeignet zu definieren; als Vorbild dient der klassische Fall $n = 1$. Da die Translationen

$$\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}+B, \quad B \text{ symmetrisch ganzzahlig,} \tag{8}$$

kanonisch sind, so hat eine Modulfunktion $f(\mathfrak{X})$ eine Fourierentwicklung

$$f(\mathfrak{X}) = \sum_T \alpha(T)\, e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\mathfrak{X})} \tag{9}$$

wo T die symmetrischen Matrizen durchläuft, für welche die quadratischen Form

$$\mathfrak{x}'T\mathfrak{x} = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\nu\nu} x_\nu^2 + 2 \sum_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} t_{\nu\mu} x_\nu x_\mu$$

ganze Koeffizienten hat (halbganze Matrizen), gültig für det $\mathfrak{Y} > \text{const}$.

Wenn $f(\mathfrak{X})$ in einem Bereich det $\mathfrak{Y} \geqslant \text{const}$. beschränkt ist, so ist $\alpha(T) = 0$, wenn die quadratische Form $\mathfrak{x}'T\mathfrak{x}$ für reelle Werte von $\mathfrak{x}$ auch negativ werden kann, ist das nicht der Fall, so heisst T semidefinit, in Zeichen $T \geqslant 0$.

Wenn die Modulfunktion $f(\mathfrak{X})$ in $\mathfrak{H}^{(n)}$ nicht beschränkt ist (und das muss der Fall sein, wenn f in $\mathfrak{H}^{(n)}$ holomorph ist), so verlangen wir, dass f für det $\mathfrak{Y} > \text{const}$. als Quotient zweier Reihen der Form

$$\sum_{T \geqslant 0} \alpha(T)\, e^{2\pi i \operatorname{Sp}(T\mathfrak{X})} \tag{10}$$

darstellbar sei. Für gewöhnliche Modulfunktionen ($n = 1$) bedeutet das offenbar, dass f im unendlichen eine Entwicklung nach der Ortsuniformisierenden $q = e^{2\pi i z}$ von der Form

$$f(z) = \sum_{n \geqslant l} \alpha(n)\, e^{2\pi i n z}, \quad l \in \mathbf{Z}$$

hat.

Eine in $\mathfrak{H}^{(n)}$ holomorphe Funktion $\varphi(\mathfrak{X})$, die sich bei kanonischen Transformationen folgendermassen transformiert

$$\varphi\big((A\mathfrak{X}+B)(C\mathfrak{X}+D)^{-1}\big) = \det(C\mathfrak{X}+D)^{2r}\, \varphi(\mathfrak{X}) \quad (r \in N) \tag{11}$$

heisst eine Modulform vom Gewicht $2r$, wobei noch gefordert wird, dass $\varphi(\mathfrak{X})$ in det $\mathfrak{X} \geqslant \text{const}$. eine Fourier-Entwicklung der Form (10) hat, kurz, dass φ im Unendlichen meromorph sei. (Da für Translationen (8)

$$\varphi(\mathfrak{X}+B) = \varphi(\mathfrak{X})$$

gilt, so hat φ eine Entwicklung der Form (9) in det $\mathfrak{X} \geqslant \text{const}$.)

Der Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts ist eine Modulfunktion.

Modulformen lassen sich leicht konstruieren: Die Eisenstein-Reihe

$$\varphi_r(\mathfrak{X}) = \sum_{(A,B)} \det(A\mathfrak{X}+B)^{-2r}, \quad r \in N,$$

(zu summieren über alle Klassen (A, B) teilerfremder symmetrischer Paare A, B) ist für $r > \frac{1}{2}n(n+1)$ in $\mathfrak{H}^{(n)}$ kompakt konvergent, $\varphi_r(\mathfrak{X})$ ist somit in $\mathfrak{H}^{(n)}$ holomorph und genügt auch der Gleichung (11) für $\varphi = \varphi_r$. Zudem ist φ_r im Unendlichen meromorph. In

$$f_{r,s}(\mathfrak{X}) = \varphi_r^s \varphi_s^{-r}$$

haben wir also Modulfunktionen. Siegel erwähnt in [20], ohne den Beweis auszuführen, dass es unter den $f_{r,s}$ ein System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ analytisch unabhängigen Funktionen gibt, und dass die Modulfunktionen n-ter Ordnung einen algebraischen Funktionenkörper von $\frac{1}{2}n(n+1)$ Variabeln bilden.

Die Bedeutung von (7) in diesem Zusammenhang ist, dass die Thetareihe $F_n(S, \mathfrak{X})^4$ eine Modulform n-ten Grades vom Gewichte $2m$ ist, allerdings nicht zur vollen Modulgruppe $\Gamma^{(n)}$, sondern zu einer Kongruenzuntergruppe der Stufe $2 \det S$. Der Koeffizient $H(S, A, B)$ in (7) hängt nur von der Restklasse von (A, B) modulo $4 \det S$ ab, $F_n(S, \mathfrak{X})$ ist also eine Linearkombination der Eisensteinreihen

$$\sum_{(A,B) \equiv (A_0,B_0) \bmod 4 \det S} \det(A\mathfrak{X}+B)^{-m/2}, \quad A_0,\ B_0 \text{ modulo } 4 \det S.$$

Damit ist die Thetareihe $F_n(\mathfrak{X}, S)$ als Modulform n-ten Grades der Stufe $4 \det S$ erkannt.

In [22] zeigt Siegel, dass es auch für indefinite S eine „analytische Fassung" des Hauptsatzes gibt. Dazu ist es nötig, zunächst die Definition der Thetareihen $f_n(\mathfrak{X}, S)$ und $F_n(\mathfrak{X}, S)$ in geeigneter Weise zu übertragen. (7) gilt dann in unveränderter Form mit Koeffizienten $H(S, A, B)$, die wieder im Wesentlichen Gauss'sche Summen sind. $F_n(\mathfrak{X}, S)$ erweist sich so durch seine Eisensteinentwicklung als Modulform, für $f_n(\mathfrak{X}, S)$ ist das nicht ersichtlich. Jedenfalls hat man eine neue Methode zur Konstruktion von Modulformen mit Hilfe von Thetareihen indefiniter Formen, was für Modulformen einer Variabeln in speziellen Fällen schon von Hecke gezeigt wurde. Als Beispiel zeigt Siegel, dass für die quaternäre Form

$$S(y_1, \ldots, y_4) = 2(y_1 y_4 - y_2 y_3),$$

$$F(S, x) = \frac{12}{\pi i} \frac{\eta'(x)}{\eta(x)}$$

wird, η die Dedekindsche η-Funktion.

Auch die weitere Verallgemeinerung auf quadratische Formen über algebraischen Zahlkörpern wird (in [26]) in Angriff genommen; hier kann nicht näher darauf eingegangen werden. Es soll nur erwähnt werden, dass Siegel in [26] kurz auf die Möglichkeit eingeht, den Hauptsatz für quadratische Formen über einem Zahlkörper K zu verwenden, um Aussagen über die Werte $\zeta_K(2n)$ der Dedekind'schen Zetafunktion ζ_K von K für $n \in N$ zu gewinnen. Auf diese Frage und verwandte ist Siegel auch viel später eingegangen (vgl. [89]).

Die analytische Theorie der quadratischen Formen führte Siegel zur Entdeckung der Modulfunktionen n-ten Grades. In [32] gibt er eine mehr funktionentheoretisch orientierte Einführung in die Theorie dieser Funktionen.

Der Zusammenhang zwischen Thetafunktionen und Eisensteinschen Reihen, auch für den Fall indefiniter quadratischer Formen, regte Siegel an, Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen zu untersuchen, wobei es auf die richtige Definition dieser Funktionen ankommt, die Zetafunktionen sind meromorph und genügen Funktionalgleichungen.

Das hier gezeichnete Bild von Siegels Arbeiten zur Zahlentheorie ist gewiss unvollständig. Es sei nur noch auf seine Beiträge zur Geometrie der Zahlen eingegangen ([4], [19], [50]). Die elegante Verschärfung des bekannten Satzes von Minkowski über Gitterpunkte in konvexen Körpern werde hier formuliert:

K sei ein um den Nullpunkt symmetrischer konvexer Körper vom Volumen V im $\boldsymbol{R}^n$, der ausser dem Nullpunkt keinen Gitterpunkt enthält. Dann ist

$$2^n - V = V^{-1} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n=-\infty}^{+\infty} \left|\int_K e^{\pi i \sum_{l=1}^{n} \nu_l x_l}\, dx_1 \dots dx_n\right|^2$$

zu summieren, ist über die Gitterpunkte $(\nu_1, \dots, \nu_n) \neq (0, \dots, 0)$. Das ist nichts weiter als die Vollständigkeitsrelation für die Fourierentwicklung der in allen Variabeln periodischer Funktion $f(x) = \sum_g \varphi(2x-2g)$, $\varphi(x)$ die charakteristische Funktion von K, g durchläuft alle Gitterpunkte.

Auf die vielen anderen Arbeiten Siegels zur Zahlentheorie, über diophantische Gleichungen ([15], [24], [28], [96]) über spezielle Fragen aus der Theorie der algebraischen Zahlen ([46], [48], [49], [84], [88], [97]) soll nicht weiter eingegangen werden.

An den beschriebenen Höhepunkten beweist sich die grossartige Erfindungskraft Siegels, und man kann auch die Arbeit ermessen, die nötig war, um die vielen neuen Gedanken auszuführen. Siegel war mit der klassischen mathematischen Literatur wohl vertraut. Die Wahl der Themen seiner Arbeit und die Art der Ausführung lässt erkennen, dass Siegel ein Klassiker war, durchaus abhold manchen neueren Entwicklungen, bei denen neue

Begriffe und Techniken wesentlich sind. Diese Abneigung hat ihn manchmal zu ungerechten Urteilen verführt.

Siegels Einfluss auf die Entwicklung in vielen Gebieten der Mathematik kann nicht hoch genug eingeschätzt werden.

Eingegangen am 2.3.1984 (1407)