References

[1] T. M. Apostol and T. H. Vu, *Identities for sums of Dedekind type*, J. Number Theory 14 (1982), pp. 391–396.
[2] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. 3 (1953), pp. 513–522.
[3] R. Dedekind, *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann*, Gesammelte mathematische Werke, Bd. I, S. 159–173, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1930.
[4] L. A. Goldberg, *An elementary proof of the Petersson-Knopp theorem on Dedekind sums*, J. Number Theory 12 (1980), pp. 541–542.
[5] M. I. Knopp, *Hecke operators and an identity for the Dedekind sums*, ibid. 12 (1980), pp. 2–9.
[6] S. Lang, *Introduction to Modular Forms*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
[7] C. Nagasaka, *On generalized Dedekind sums attached to Dirichlet characters*, to appear in J. Number Theory.
[8] L. A. Parson, *Dedekind sums and Hecke operators*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 88 (1980), pp. 11–14.
[9] L. A. Parson and K. H. Rosen, *Hecke operators and Lambert series*, Math. Scand. 49 (1981), pp. 5–14.
[10] H. Rademacher and A. Whiteman, *Theorems on Dedekind sums*, Amer. J. Math. 63 (1941), pp. 377–407.
[11] P. Subrahmanyam, *On sums involving the integer part of* x, Math. Student 45 (1977), pp. 8–12.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
KYUSHU UNIVERSITY 33
Fukuoka 812, Japan

Received on 20. 4. 1983
and in revised form on 7. 9. 1983 (1352)

ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

Über die Verteilung ganzer Zahlen mit ausgezeichneten Eigenschaften der Faktorzerlegung in algebraischen Zahlkörpern*

von

HELMUT WEBER (Marburg)

0. Einleitung und Ergebnisse. Ist K ein algebraischer Zahlkörper mit einer Klassenzahl $h > 1$, so weist die multiplikative Struktur des Ringes O_K der ganzen Zahlen von K wesentliche Unterschiede zum rationalen Fall auf. Beispielsweise ist die Tatsache wohlbekannt, daß für Zahlen aus O_K im allgemeinen keine eindeutige Faktorzerlegung in unzerlegbare Zahlen existiert. Insbesondere sind für $h > 1$ unzerlegbare und prime Zahlen wohl zu unterscheiden. Daher stellt sich unmittelbar die Frage nach dem Anteil und der Verteilung von Primzahlen, unzerlegbaren Zahlen und Zahlen mit eindeutiger Faktorzerlegung in unzerlegbare Zahlen in O_K. In Arbeiten von Rémond [10] (Theorem 2.4.5) und Narkiewicz [5] (Theorem 2) ist das asymptotische Verhalten von Funktionen der Form

$$F(x) = \sum_{N(\omega) < x} 1 \tag{a}$$

wobei über Hauptideale (ω) von O_K mit unzerlegbaren bzw. eindeutig zerlegbaren Zahlen ω als erzeugenden Elementen zu summieren ist, angegeben worden.

Die Untersuchungen von Narkiewicz und Rémond stützen sich dabei wesentlich auf den Taubersatz von Delange–Ikehara und liefern als Ergebnis für unzerlegbare Zahlen:

$$F(x) = (C_0 + o(1))\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{D-1}, \tag{b}$$

sowie für Zahlen mit k-deutiger Faktorzerlegung in unzerlegbare ganze Zahlen:

$$F_k(x) = (C_k + o(1))\frac{x}{(\log x)^{1-1/h}}(\log\log x)^{a_k}. \tag{c}$$

Die in (b) und (c) auftretenden Konstanten D und a_k sind lediglich von der Klassengruppe $H(K)$ des Körpers abhängig. Die Konstante C_0 ist von

* Diese Arbeit wurde am 21. 10. 1982 vom Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg als Dissertation angenommen.

Rémond angegeben worden (vgl. auch Satz B dieser Arbeit). Bildet man jedoch in (a) die Summe nicht über Hauptideale, sondern summiert über ganze Zahlen in geeigneten endlichen Bereichen, so treten zusätzliche Schwierigkeiten auf, welche vornehmlich durch das Auftreten von nichttrivialen Einheiten verursacht werden. Die vorliegende Arbeit[1] befaßt sich nun mit der folgenden Problemstellung:

Gegeben sei ein algebraischer Zahlkörper K vom Grade $n = r_1 + 2r_2$ über dem rationalen Körper. Dabei bedeute r_1 die Anzahl der reellen und $2r_2$ die Anzahl der nichtreellen konjugierten Körper zu K. Für $\omega \in K$ seien die konjugierten Elemente durch $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)}$ bezeichnet, wo $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(r_1)}$ reelle Zahlen sind, und $\overline{\omega^{(j)}} = \omega^{(j+r_2)}$ für $j = r_1+1, \ldots, r_1+r_2$. Dabei heiße ω totalpositiv ($\omega \gg 0$), falls sämtliche reelle Konjugierte zu ω positiv sind.

Es seien ferner g eine zahlentheoretische Funktion auf O_K,

$$r := r_1 + r_2, \qquad e_j := \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leqslant j \leqslant r_1, \\ 2 & \text{für } r_1 < j \leqslant r \end{cases}$$

und für $x_1, \ldots, x_r > 0$:

$$\text{(d)} \qquad G(x_1, \ldots, x_r) := \sum_{\substack{\omega \in O_K, \omega \gg 0 \\ 0 < |\omega^{(j)}|^{e_j} < x_j \\ j = 1, \ldots, r}} g(\omega).$$

Der erste Abschnitt dieser Arbeit liefert eine asymptotische Darstellung von G mit Restgliedabschätzung, welche auf der Siegelschen Summenformel und zusätzlichen Forderungen an g beruht. Die Aussagen von Lemma 2 bilden in diesem Zusammenhang den analytischen Schwerpunkt dieser Arbeit.

Im zweiten Teil werden sodann gewisse analytische Eigenschaften von Heckeschen Zetafunktionen, die sich als erzeugende Funktionen herausstellen, in für Anwendungen geeigneter Weise zusammengestellt. Schließlich werden als Anwendungen für die folgenden Funktionen asymptotische Beziehungen mit Restgliedabschätzungen hergeleitet:

$$\text{(A)} \qquad P(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\substack{\omega \gg 0 \\ 0 < |\omega^{(j)}|^{e_j} < x_j}} p(\omega)$$

mit

$$p(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\omega) \text{ Primideal}, \\ 0 & \text{sonst}; \end{cases}$$

[1] Herrn Prof. Dr. W. Schaal danke ich für die Anregung dieser Arbeit sowie für seine vielseitige Unterstützung. Ferner danke ich Herrn Priv. Doz. Dr. J. Hinz für zahlreiche Gespräche und Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit.

Für die softwaremäßige Unterstützung beim Schreiben der Arbeit mit einem Textverarbeitungsprogramm bin ich Herrn Dipl.-Math. W. Gross und Herrn Dr. B. Schmitt dankbar.

$$\text{(B)} \qquad U(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\substack{\omega \gg 0 \\ 0 < |\omega^{(j)}|^{e_j} < x_j}} u(\omega)$$

mit

$$u(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ unzerlegbar}, \\ 0 & \text{sonst}; \end{cases}$$

$$\text{(C)} \qquad F_k(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\substack{\omega \gg 0 \\ 0 < |\omega^{(j)}|^{e_j} < x_j}} f_k(\omega)$$

mit

$$f_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \text{ höchstens } k \text{ verschiedene Zerlegungen} \\ & \text{in unzerlegbare ganze Zahlen besitzt}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Im letzten Falle werden zwei Zerlegungen

$$\omega = u_1 \cdots u_s = v_1 \cdots v_t$$

von ω in unzerlegbare Zahlen als gleich angesehen, falls $s = t$ ist und für eine Permutation π der Zahlen $1, \ldots, s$ mit geeigneten Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ gilt:

$$u_j = \varepsilon_j v_{\pi(j)}, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Als Ergebnisse dieser Arbeit erhält man die folgenden Sätze:

Satz A.[2] *Ist $r > 1$, so gilt für $x_1, \ldots, x_r > 0$, $x_1 \cdots x_r \geqslant 2$ mit einem geeigneten $c = c(K) > 0$:*

$$P(x_1, \ldots, x_r) = \frac{w}{2^{r_1} hR} (\log(x_1 \cdots x_r))^{r-1} \int_2^{x_1 \cdots x_r} \frac{du}{(\log u)^r} + O_K\big(x_1 \cdots x_r \exp(-c(\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2})\big),$$

wobei mit w die Anzahl der Einheitswurzeln, mit R der Regulator und mit h die Klassenzahl von K bezeichnet sind.

Satz B. *Ist $r > 1$, so gilt für $x_1, \ldots, x_r > 0$, $x_1 \cdots x_r \geqslant 3$:*

$$U(x_1, \ldots, x_r) = \frac{wBD}{2^{r_1} Rh^D} \cdot \frac{x_1 \cdots x_r}{\log(x_1 \cdots x_r)} P(\log\log(x_1 \cdots x_r)) + O_K\left(\frac{x_1 \cdots x_r}{(\log(x_1 \cdots x_r))^2} \cdot (\log\log(x_1 \cdots x_r))^{D-1}\right).$$

[2] Satz A ist ein Spezialfall eines Satzes bei Mitsui [4], S. 35. Er wird hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, da die Verteilung der Primzahlen in K die einfachste nichttriviale Anwendung einer im Abschnitt II bewiesenen allgemeinen asymptotischen Formel ist.

Hier sind $D \in \boldsymbol{N}$ und $B \in \boldsymbol{Q}$ gewisse Konstanten der Klassengruppe H von K sowie $P \in \boldsymbol{R}[x]$ ein normiertes Polynom vom Grade $D-1$.(3)

SATZ C. *Sind $r > 1$, $h > 1$, $k \in \boldsymbol{N}$ und $x_1, \ldots, x_r > 0$ mit $x_1 \cdots x_r \geqslant 3$, so gilt:*

$$F_k(x_1, \ldots, x_r) = \frac{wB_k}{2^{r_1} R h^{a_k} \Gamma(1+1/h)} \cdot \frac{x_1 \cdots x_r}{(\log(x_1 \cdots x_r))^{1-1/h}} \times \\ \times P_k(\log\log(x_1 \cdots x_r)) + \\ + O_{K,k}\left(\frac{x_1 \cdots x_r}{(\log(x_1 \cdots x_r))^{2-1/h}} (\log\log(x_1 \cdots x_r))^{a_k}\right).$$

Hierbei sind ebenfalls $a_k \in \boldsymbol{N}$ und $B_k \in \boldsymbol{R}$ gewisse Konstanten, welche außer von $k \in \boldsymbol{N}$ nur noch vom Körper abhängen. P_k ist ein normiertes Polynom über $\boldsymbol{R}$ vom Grade a_k.

Bemerkung. Die O-Konstanten in den Sätzen A und B hängen lediglich vom Körper K ab; in Satz C besteht eine weitere Abhängigkeit von $k \in \boldsymbol{N}$. Die genannten Konstanten in den Hauptterme werden bei der Herleitung dieser Beziehungen im Abschnitt 3 angegeben.

Desweiteren soll bereits an dieser Stelle zum Ausdruck gebracht werden, daß die in dieser Arbeit verwendeten Konstanten $c_0, c_1, \ldots$, vom Körper K abhängig sind.

1. Eine asymptotische Formel. Es seien $\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ voneinander unabhängige totalpositive Einheiten unendlicher Ordnung und ξ eine Erzeugende der Gruppe der Einheitswurzeln von K. Die Ordnung von ξ werde mit w^+ und die von $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ erzeugte Gruppe der totalpositiven Einheiten von K werde mit E^+ bezeichnet.

Zwei Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in O_K$, $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ heißen *assoziiert bezüglich* E^+, falls ihr Quotient in E^+ liegt.

Die Zahlen e_p und $e_p^{(q)}$, $p = 1, \ldots, r$, $q = 1, \ldots, r-1$ seien durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{r} e_p = 1; \quad \sum_{p=1}^{r-1} e_p \log|\eta_h^{(p)}| = 0, \quad h = 1, \ldots, r-1,$$

$$\sum_{p=1}^{r} e_p^{(q)} = 0; \quad \sum_{p=1}^{r} e_p^{(q)} \log|\eta_h^{(p)}| = \delta_{h,q}; \quad h, q = 1, \ldots, r-1.$$

Hier bezeichne $\delta_{h,q}$ das Kronecker-Symbol.

Die $(r-1) \times r$-Matrix $(e_p^{(q)})$, (q = Zeilen-, p = Spaltenindex) sei im folgenden durch E bezeichnet.

---

(3) Für die Konstante im Hauptterm gilt folgender Zusammenhang mit der entsprechenden Konstanten bei Rémond: $C_0 = B \cdot D/h^D$.

Ferner seien mit $m := (m_1, \ldots, m_{r-1}) \in \boldsymbol{Z} \times \ldots \times \boldsymbol{Z}$ und $\omega \in O_K$, $\omega \neq 0$, definiert:

$$l(\omega) := (\log|\omega^{(1)}|, \ldots, \log|\omega^{(r)}|)^T,$$

$$E_p(m) := \frac{2\pi}{e_p} \sum_{q=1}^{r-1} m_q e_p^{(q)}, \quad p = 1, \ldots, r,$$

$$\lambda_m(\omega) := \exp(2\pi i m E l(\omega)).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt das folgende Lemma.

LEMMA 1 (Siegelsche Summenformel). *Es sei $g\colon O_K \to \boldsymbol{C}$ eine zahlentheoretische Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle $\omega \in O_K$ und $j = 1, \ldots, r-1$ sei $g(\xi\omega) = g(\omega)$, $g(\eta_j\omega) = g(\omega)$.*

(ii) *Für ein $c_0 > 0$ und $\omega \neq 0$ ist $|g(\omega)|\,|N(\omega)|^{-c_0}$ beschränkt auf O_K.*

Setzt man für $m \in \boldsymbol{Z}^{r-1}$:

$$\varphi_m(s) := \sum_{\omega}{}' \frac{g(\omega)}{N(\omega)^s} \lambda_m(\omega), \quad \operatorname{Re} s > c_0 + 1,$$

wobei der Strich am Summenzeichen andeuten möge, daß über ein volles System bzgl. E^+ nichtassoziierter, totalpositiver ganzer Zahlen zu summieren ist, so gilt für $r > 1$, $y_1, \ldots, y_r > 0$ und $\sigma > c_0 + 1$:

$$\int_0^{y_r} \cdots \int_0^{y_1} G(x_1+v_1, \ldots, x_r+v_r)\, dv_1 \cdots dv_r \\ = \frac{w^+}{2\pi i R^+} \sum_{m \in \boldsymbol{Z}^{r-1}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi_m(s) \prod_{p=1}^{r} \frac{(x_p+y_p)^{s+1-iE_p(m)} - x_p^{s+1-iE_p(m)}}{(s-iE_p(m))(s+1-iE_p(m))}\, ds.$$

Hierbei bezeichnet R^+ den Regulator der Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$.

Beweis. Siehe Grotz [1], Satz 2, Korollar 1. (vgl.: Siegel [12], Satz 1 und Schaal [11], Lemma 2).

Bemerkung. Ist zusätzlich $g(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in O_K$, so gilt für $0 < y_j < x_j$, $j = 1, \ldots, r$:

$$\int_0^{y_r} \cdots \int_0^{y_1} G(x_1-y_1+v_1, \ldots, x_r-y_r+v_r)\, dv_1 \cdots dv_r \\ \leqslant y_1 \cdots y_r \cdot G(x_1, \ldots, x_r) \leqslant \int_0^{y_r} \cdots \int_0^{y_1} G(x_1+v_1, \ldots, x_r+v_r)\, dv_1 \cdots dv_r.$$

Beweis. Aufgrund der Nichtnegativität von g ist G monoton wachsend bezüglich aller Variablen. ∎

Im folgenden möge g immer nichtnegativ und für $j = 1, \ldots, r$, $0 < y_j < x_j$ sein.

Es sei nun für $m \in Z^{r-1}$ und $t \in R$

$$\tau(t, m) := \prod_{p=1}^{r} (3+|t-E_p(m)|)$$

sowie für $0 < A \leqslant 1$:

$$\Omega_A(m) := \left\{\sigma+it\colon\ 1-\frac{A}{\log(\tau(t, m))} < \sigma < 4,\ t \in R\right\}.$$

Im Falle $m = (0, \ldots, 0)$ sei der längs der reellen Achse von $1 - A\log^{-1}(\tau(0, 0))$ bis einschließlich 1 aufgeschnittene Bereich $\Omega_A(0)$ mit $\Omega_A^*(0)$ bezeichnet.

Lemma 2. *Es existiere ein $A \in (0, 1]$ derart, daß für alle $m \in Z^{r-1}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *φ_m ist holomorph auf $\Omega_A(m)$ und stetig auf dessen Abschluß falls $m \neq (0, \ldots, 0)$.*

(ii) *Es gibt ein $a \in [0, 1)$, ein $b \in N$ ($b \geqslant 1$) und Funktionen $f, f_0, f_1, \ldots, f_b$, welche holomorph auf $\Omega_A(0)$ und stetig auf dessen Abschluß sind, so daß für alle $s \in \Omega_A^*(0)$ gilt:*

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{(s-1)^a} \sum_{j=0}^{b} f_j(s)\left(\log\left(\frac{1}{s-1}\right)\right)^j + f(s).$$

Dabei sind die Zahlen $f_0(1), \ldots, f_b(1)$ reell und insbesondere ist $f_b(1) \neq 0$.

(iii) *Es gibt Konstanten $M > 0$, $\varrho \in [0, 1/2]$ und $c_1 = c_1(\varrho) > 0$ derart, daß für alle $m \neq 0$ und alle $s \in \overline{\Omega_A(m)}$ gilt:*

$$|\varphi_m(s)| \leqslant c_1 \log^M(\tau(t, m))(\tau(t, m))^{\varrho}:$$

Für $m = 0$ sei dies mit der Einschränkung $|s-1| \geqslant A(r\log 3)^{-1}$ gegeben.

Dann gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 1 und unter Annahme der Beschränktheit von g für $x_1 \cdots x_r \geqslant 2$:

Es gibt $P_j \in R[x]$, $j = 0, 1, \ldots, b$, mit

$$\operatorname{grad}(P_j) = \begin{cases} j, & \text{falls } a \neq 0, \\ j-1, & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

und den Leitkoeffizienten

$$c(P_j) = \begin{cases} \sin(\pi a), & \text{falls } a \neq 0, \\ \pi j, & \text{falls } a = 0 \end{cases},$$

so daß gilt:

$$G(x_1, \ldots, x_r) = \frac{w^+}{\pi R^+} \sum_{j=0}^{b} \int_{1-A_1}^{1} \frac{(x_1 \cdots x_r)^\sigma}{\sigma^r(1-\sigma)^a} f_j(\sigma) P_j\left(\log\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)\right) d\sigma +$$
$$+ O\left(x_1 \cdots x_r \exp\{-c_2(\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\}\right).$$

Hierbei ist c_2 eine positive Konstante und $A_1 := A(r\log 3)^{-1}$. Die O-Konstante hängt von K, A, M, a, b, ϱ und den Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_b$ ab.

Beweis. In Lemma 1 läßt sich der Integrationsweg auf den jeweiligen linksseitigen Rand der Gebiete $\Omega_A(m)$ für $m \neq (0, \ldots, 0)$ bzw. $\Omega_A^*(0)$ für $m = (0, \ldots, 0)$ verschieben.

Für $m \in Z^{r-1}$ seien hierzu die Wege W_m durch:

$$s_m(t) := \sigma_m(t) + it, \qquad -\infty < t < +\infty,$$

mit

$$\sigma_m(t) := 1 - A\left(\log(\tau(t, m))\right)^{-1}$$

definiert.

Im Falle $m = (0, \ldots, 0)$ seien für $0 < \varepsilon < A_1$ die Wege W_0^-, W_0^+, C_ε^-, C_ε^+ und K_ε durch:

W_0^-: $s_0^-(t) := \sigma_0(t) + it$, $-\infty < t \leqslant 0$,
W_0^+: $s_0^+(t) := \sigma_0(t) + it$, $0 \leqslant t < \infty$,
C_ε^-: $s_\varepsilon^-(t) := \sigma$, $1 - A_1 \leqslant \sigma \leqslant 1-\varepsilon$,
C_ε^+: $s_\varepsilon^+(t) := 1-\sigma$, $\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant A_1$,
K_ε: $s_\varepsilon(\vartheta) := 1 + \varepsilon \cdot e^{i\vartheta}$, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$,

gegeben. Hierbei sind C_ε^- bzw. C_ε^+ als Wege auf dem unteren bzw. oberen Ufer des Schnittes in $\Omega_A(0)$ zu verstehen.

Demzufolge gilt nach Lemma 1:

$$(1) \quad \int_0^{y_r} \cdots \int_0^{y_1} G(x_1+v_1, \ldots, x_r+v_r)\, dv_1 \cdots dv_r$$
$$= \frac{w^+}{2\pi i R^+}\left\{\int_{W_0^-} + \int_{C_\varepsilon^-} + \int_{K_\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon^+} + \int_{W_0^+}\right\}\left\{\varphi_0(s) \prod_{p=1}^{r} \frac{(x_p+y_p)^{s+1} - x_p^{s+1}}{s(s+1)}\, ds\right\} +$$
$$+ \frac{w^+}{2\pi i R^+} \sum_{m \neq (0, \ldots, 0)} \int_{W_m} \varphi_m(s) \prod_{p=1}^{r} \frac{(x_p+y_p)^{s+1-iE_p(m)} - x_p^{s+1-iE_p(m)}}{(s-iE_p(m))(s+1-iE_p(m))}\, ds.$$

Im Falle $m = (0, \ldots, 0)$ stellen sich die Integrale über W_0^- und W_0^+ als

$$O\left(\exp\{-c_3(\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\} \prod_{p=1}^{r} (x_p+y_p)^2\right)$$

heraus, wenn man berücksichtigt, daß sich der Nenner im Integranden für $\sigma \geqslant 1/2$ und alle $m \in Z^{r-1}$ jeweils mittels

$$(2) \qquad \left|\prod_{p=1}^{r} (s+1-iE_p(m))(s-iE_p(m))\right| \geqslant c_4(\tau(t, m))^2$$

nach unten abschätzen läßt.

Ferner kann man den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchführen, da die entsprechenden uneigentlichen Integrale existieren. Insbesondere verschwindet das Integral über K_ε für $\varepsilon \to 0$.

Die Integrale über C_0^- und C_0^+ $(\varepsilon = 0)$ lassen sich durch Einsetzen von φ_0 aus (ii) auswerten:

Man erhält das Ergebnis

$$(3)\qquad I := \frac{w^+}{2\pi i R^+} \int_{C_0^- \cup C_0^+} \cdots$$

$$= \frac{w^+}{\pi R^+} \sum_{j=0}^{b} \int_{1-A_1}^{1} \frac{f_j(\sigma)}{(1-\sigma)^a} P_j\left(\log\frac{1}{1-\sigma}\right) \prod_{p=1}^{r} \frac{(x_p+y_p)^{\sigma+1} - x_p^{\sigma+1}}{\sigma(\sigma+1)}\, d\sigma,$$

wobei gilt:

$$(4)\qquad P_j(x) := \sum_{k=0}^{j} c_{j,k} x^k$$

mit

$$c_{j,k} := \binom{j}{k} \pi^{j-k} \cdot \begin{cases} (-1)^{(j-k)/2} \sin(\pi a), & \text{falls } j-k \text{ gerade,} \\ (-1)^{(j-k-1)/2} \cos(\pi a), & \text{falls } j-k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Summe der Integrale über W_m mit $m \neq (0, \ldots, 0)$ in (1) ergibt sich nach etwas längerer Rechnung (geeignete Aufspaltung von Summe und Integral) ebenfalls als

$$(5)\qquad O\left(\exp\{-c_4(\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\} \prod_{p=1}^{r} (x_p+y_p)^2\right)$$

mit einer positiven Konstanten c_4.

Die wesentliche Idee dieser Abschätzung besteht darin, daß man zunächst den Nenner des Integranden mit (2) abschätzt, dann $s = \sigma_m + i(u+E_r(m))$ setzt und ausnutzt, daß die Anzahl der ganzrationalen Lösungen $m = (m_1, \ldots, m_{r-1})$ des Ungleichungssystems

$$b_p \leqslant \left| \sum_{q=1}^{r-1} (u-m_q) 2\pi \left(\frac{e_p^{(q)}}{e_p} - \frac{e_r^{(q)}}{e_r} \right) \right| \leqslant b_p + 1, \qquad p = 1, \ldots, r-1,$$

worin die b_p feste, aber beliebige nichtnegative ganze Zahlen bezeichnen und $u \in \boldsymbol{R}$ ebenfalls fest aber beliebig ist, durch eine nur vom Körper abhängige Konstante beschränkt ist (vgl.: Grotz [1], Beweis von Hilfssatz 7).

Man erhält somit aus den bisherigen Abschätzungen für $0 < y_j < x_j$, $j = 1, \ldots, r$ und mit $c_5 := \min\{c_3, c_4\}$:

$$(6)\qquad \frac{1}{y_1 \cdots y_r} \int_0^{y_r} \cdots \int_0^{y_1} G(x_1+v_1, \ldots, x_r+v_r)\, dv_1 \cdots dv_r$$

$$= \frac{w^+}{\pi R^+ y_1 \cdots y_r} \sum_{j=0}^{b} \int_{1-A_1}^{1} \frac{f_j(\sigma)}{(1-\sigma)^a} P_j\left(\log\frac{1}{1-\sigma}\right) \prod_{p=1}^{r} \frac{(x_p+y_p)^{\sigma+1} - x_p^{\sigma+1}}{\sigma(\sigma+1)}\, d\sigma +$$

$$+ O\left(\frac{(x_1 \cdots x_r)^2}{y_1 \cdots y_r} \exp\{-c_5(\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\}\right).$$

Berücksichtigt man nun, daß wegen $0 < y_j < x_j$, $j = 1, \ldots, r$ gilt:

$$\prod_{p=1}^{r} \frac{x_p^{\sigma+1}}{y_p} \cdot \frac{(1+(y_p/x_p))^{\sigma+1} - 1}{\sigma(\sigma+1)} = \frac{(x_1 \cdots x_r)^\sigma}{\sigma^r} \prod_{p=1}^{r} \left(1 + O\left(\frac{y_p}{x_p}\right)\right),$$

so ergibt sich aus (6):

$$(7)\qquad \frac{1}{y_1 \cdots y_r} \int_0^{y_r} \cdots \int_0^{y_1} G(x_1+v_1, \ldots, x_r+v_r)\, dv_1 \cdots dv_r$$

$$= \frac{w^+}{\pi R^+} \sum_{j=0}^{b} \int_{1-A_1}^{1} \frac{(x_1 \cdots x_r)^\sigma}{\sigma^r (1-\sigma)^a} f_j(s) P_j\left(\log\frac{1}{1-\sigma}\right) ds \cdot \prod_{p=1}^{r} \left(1 + O\left(\frac{y_p}{x_p}\right)\right) +$$

$$+ O\left(\frac{(x_1 \cdots x_r)^2}{y_1 \cdots y_r} \exp\{-c_5(\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\}\right).$$

Durch zur bisherigen Beweisführung von Lemma 2 analoge Schritte $(x_p \to x_p - y_p)$ erhält man ebenfalls:

$$(8)\qquad \frac{1}{y_1 \cdots y_r} \int_0^{y_r} \cdots \int_0^{y_1} G(x_1-y_1+v_1, \ldots, x_r-y_r+v_r)\, dv_1 \cdots dv_r$$

$$= \frac{w^+}{\pi R^+} \sum_{j=0}^{b} \int_{1-A_1}^{1} \frac{(x_1 \cdots x_r)^\sigma}{\sigma^r (1-\sigma)^a} f_j(\sigma) P_j\left(\log\frac{1}{1-\sigma}\right) d\sigma \cdot \prod_{p=1}^{r} \left(1 + O\left(\frac{y_p}{x_p}\right)\right) +$$

$$+ O\left(\frac{(x_1 \cdots x_r)^2}{y_1 \cdots y_r} \exp\{-c_6(\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\}\right),$$

worin c_6 eine geeignete positive Konstante ist.

Nach (7), (8) und der Bemerkung im Anschluß an Lemma 1 gilt nun mit $c_7 := \min\{c_5, c_6\}$:

$$G(x_1, \ldots, x_r)$$
$$= \frac{w^+}{\pi R^+} \sum_{j=0}^{b} \int_{1-A_1}^{1} \frac{(x_1 \cdots x_r)^\sigma}{\sigma^r (1-\sigma)^a} f_j(\sigma) P_j\left(\log \frac{1}{1-\sigma}\right) d\sigma \cdot \prod_{p=1}^{r} \left(1 + O\left(\frac{y_p}{x_p}\right)\right) +$$
$$+ O\left(\frac{(x_1 \cdots x_r)^2}{y_1 \cdots y_r} \exp\{-c_{11} (\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\}\right).$$

Wählt man nun für $p = 1, \ldots, r$:

$$y_p = x_p \exp\left\{-\frac{c_7}{2r} (\log(x_1 \cdots x_r))^{1/2}\right\},$$

so ergibt sich hieraus mit $c_2 := c_7/2r$ die Behauptung des Lemmas. ∎

Die Aussage von Lemma 2 ist nun insoweit unbefriedigend, als im Allgemeinen im Integranden des Hauptgliedes nichtkonstante Funktionen f_j, $j = 0, \ldots, b$ auftreten.

Daher wird es sich anbieten in erster Näherung diese Funktionen durch ihre Werte an der Stelle $s = 1$ zu ersetzen und dann die Integrale direkt auszuwerten.

Dabei wird sich allerdings die oben erhaltene Restgliedabschätzung nicht aufrechterhalten lassen.

Lemma 3. *Unter der Voraussetzungen der Lemmata* 1 *und* 2 *gilt die folgende Aussage*:

Es gibt ein Polynom

$$Q \in \boldsymbol{R}[x] \quad \textit{mit} \quad \operatorname{grad}(Q) = \begin{cases} b, & \textit{falls } a \neq 0, \\ b-1, & \textit{falls } a = 0 \end{cases}$$

und dem Leitkoeffizienten

$$C_Q = f_b(1) \cdot \begin{cases} a \cdot (\Gamma(1+a))^{-1}, & \textit{falls } a \neq 0, \\ b, & \textit{falls } a = 0 \end{cases}$$

derart, daß für $x_1 \cdots x_r \geqslant 3$ *gilt*:

$$G(x_1, \ldots, x_r) = \frac{w^+}{R^+} \cdot \frac{x_1 \cdots x_r}{(\log(x_1 \cdots x_r))^{1-a}} Q(\log\log(x_1 \cdots x_r)) +$$
$$+ O\left(\frac{x_1 \cdots x_r \cdot (\log\log(x_1 \cdots x_r))^{\operatorname{grad}(Q)}}{(\log(x_1 \cdots x_r))^{2-a}}\right).$$

Die O-*Konstante hängt hier von* K, A, M, a, b, ϱ, $f_0, f_1, \ldots, f_b$ *ab*.

Beweis. Für $1 - A_1 \leqslant \sigma \leqslant 1$ gilt mit einer geeigneten Konstanten $M_1 = M_1(f_0, f_1, \ldots, f_b, b, A_1)$ nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$|f_j(\sigma) - f_j(1)| \leqslant M_1 (1-\sigma), \quad j = 0, 1, \ldots, b.$$

Mit der Abkürzung $X := x_1 \cdots x_r$ erhält man für $j = 0, 1, \ldots, b$ und

$$I_j := \int_{1-A_1}^{1} \frac{X^\sigma}{\sigma^r (1-\sigma)^a} f_j(\sigma) P_j\left(\log \frac{1}{1-\sigma}\right) d\sigma$$

nach Einsetzen von P_j aus (4) und einfachen Zwischenrechnungen:

$$(9) \quad I_j = f_j(1) \frac{X}{(\log X)^{1-a}} \sum_{n=0}^{j} A_{j,n} (\log\log X)^n + O\left(\frac{X}{(\log X)^{2-a}} (\log\log X)^{\operatorname{grad}(P_j)}\right),$$

wobei gilt:

$$A_{j,n} := \sum_{m=0}^{j-n} (-1)^m \binom{m+n}{n} c_{j,m+n} \Gamma^{(m)}(1-a).$$

Mit dem Ergebnis von Lemma 2

$$G(x_1, \ldots, x_r) = \frac{w^+}{\pi R^+} \sum_{j=0}^{b} I_j + O(X \exp\{-c_2 (\log X)^{1/2}\})$$

erhält man aus (9):

$$G(x_1, \ldots, x_r) = \frac{w^+}{\pi R^+} \cdot \frac{X}{(\log X)^{1-a}} \sum_{j=0}^{b} \sum_{n=0}^{j} f_j(1) A_{j,n} (\log\log X)^n +$$
$$+ O\left(\frac{X}{(\log X)^{2-a}} (\log\log X)^{\operatorname{grad}(P_b)}\right).$$

Durch Ordnen nach Potenzen von $\log\log X$ und Betrachtung des Leitkoeffizienten des entstehenden Polynoms ergibt sich nun die Behauptung. ∎

2. Heckesche Zetafunktionen. Es sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}$ ein im folgenden fest gewähltes System von Einheiten des Körpers K mit den Eigenschaften (vgl. Grotz [1]). Die Matrix $S(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}) := (\operatorname{sign}(\varepsilon_k^{(j)})_{\substack{j=1,\ldots,r_1 \\ k=1,\ldots,r-1}})$, wobei j den Zeilen- und k den Spaltenindex angibt, besitzt die Gestalt:

$$S(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1}) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & & & & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdot & 1 & & & & \\ & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & 1 & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & -1 & \cdot & & \cdot \\ * & \cdots & & * & \cdot & & \cdot \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & & * & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow q\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ q\text{-te Spalte} \end{array} \end{array}$$

Dabei sei q mit $0 \leqslant q \leqslant r_1 - 1$ die minimale Anzahl von nicht totalpositiven Einheiten in einem System von Grundeinheiten von K. (Hierbei ist $r_1 \geqslant 1$ vorausgesetzt; in dem trivialen Fall $r_1 = 0$ setze man formal $q = -1$.)

Außerdem möge dieses Einheitensystem die Kongruenz:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \operatorname{sign}(\varepsilon_j^{(q+1)}) = -1}}^{q} 1 \equiv 0 \bmod 2 \quad \text{erfüllen.}$$

Ein System von totalpositiven Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ sei nun definiert durch:

$$\eta_j := \begin{cases} \varepsilon_j^2, & \text{falls } j \leqslant q, \\ \varepsilon_j, & \text{falls } j > q, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, r-1.$$

(Von nun an wird stets dieses System verwendet.) Es sei Z ein fest gewählter Bereich von idealen Zahlen zu K. Jedem Ideal A von K läßt sich nach Hecke [2] in eineindeutiger Weise ein von einer idealen Zahl $\hat{\alpha} \in Z$ erzeugtes Hauptideal $(\hat{\alpha})$ zuordnen. Aufgrund dieser Zuordnung überträgt sich die Klasseneinteilung der Ideale von K unmittelbar auf die von idealen Zahlen erzeugten Hauptideale. Die somit entstehende Gruppe von Hauptidealklassen sei mit $\hat{H}$ und ihre Elemente seien mit Y_j, $j = 1, \ldots, h$ bezeichnet. Hierbei sei h die Klassenzahl von K und Y_1 die Hauptklasse. Für ganzrationales $m = (m_1, \ldots, m_{r-1})$ und $n = (n_1, \ldots, n_{r_1})$ mit $n_j = 0, 1$, welche den Bedingungen:

$$\sum_{p=1}^{r_1} n_p \equiv 0 \bmod 2, \qquad n_j + \sum_{\substack{p=q+1 \\ \operatorname{sign}(\varepsilon_j^{(p)}) = -1}}^{r_1} n_p \equiv m_j \bmod 2, \qquad j = 1, \ldots, q$$

genügen (vgl. Grotz [1]), seien auf der Menge der von (0) verschiedenen Hauptideale von Z die Größencharaktere

$$\lambda_{m,n}(\hat{\alpha}) := \exp\{2\pi i m El(\hat{\alpha})\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\hat{\alpha}^{(p)}}{|\hat{\alpha}^{(p)}|}\right)^{n_p}$$

definiert.

Hilfssatz 1. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 gilt für alle* $m \in Z^{r-1}$:

$$\varphi_m(s) := \sum_{\omega}{}' \frac{g(\omega)}{N(\omega)^s} \exp\{2\pi i m El(\omega)\}$$
$$= \frac{1}{2^{r_1 - q - 1}} \sum_{n_{q+2}, \ldots, n_{r_1} = 0,1} \sum_{(\omega) \neq (0)} \frac{g(\omega)}{N(\omega)^s} \lambda_{m,n}(\omega).$$

Im Falle $q = r_1 - 1$ ist mit der rechten Seite stets die innere Summe gemeint.

Beweis. Siehe Grotz [1], Hilfssatz 3. ∎

Es sei nun χ ein Charakter der Klassengruppe H. Definiert man für

$Y \in \hat{H}$ und $\hat{\alpha} \in Y$ $\chi((\hat{\alpha})) := \chi(Y)$, so erhält man die Heckeschen Größencharaktere $\chi\lambda_{m,n}$ mittels:

$$\chi\lambda_{m,n}(\hat{\alpha}) := \chi((\hat{\alpha}))\,\lambda_{m,n}((\hat{\alpha}))$$

und die mit ihnen gebildeten Heckeschen Zetafunktionen von K: (vgl. Hecke [2]) für $\operatorname{Re} s > 1$ durch:

$$\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n}) := \sum_{(\hat{\alpha}) \neq (0)} \frac{\chi\lambda_{m,n}(\hat{\alpha})}{N(\hat{\alpha})^s}.$$

Setzt man für $0 < \varrho \leqslant 1/2$ $S_\varrho := \{s \in C \mid -\varrho \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1 + \varrho\}$, so gelten für diese Zetafunktionen die folgenden Abschätzungen:

Lemma 4. *Es gibt eine nur von ϱ und vom Körper K abhängige positive Konstante c_8 derart, daß für alle $s \in S_\varrho$ und alle Größencharaktere $\chi\lambda_{m,n} \not\equiv 1$ gilt:*

$$(10) \qquad |\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})| \leqslant c_8 \prod_{p=1}^{r-1} |1 + s - iE_p(m)|^{e_p \frac{1+\varrho-\sigma}{2}}.$$

Für die Dedekindsche Zetafunktion gilt auf $S_\varrho - \{1\}$ mit einer ebenfalls von ϱ und K abhängigen Konstanten c_9:

$$(11) \qquad |\zeta_K(s)| \leqslant c_9 \left|\frac{1+s}{1-s}\right| |1+s|^{(r_1 + 2r_2)\frac{1+\varrho-\sigma}{2}}.$$

Beweis. (10) und (11) sind lediglich eine Umformulierung des Spezialfalles $(f) = (1)$ von Theorem 5 und von Theorem 3 aus [9] auf die hier eingeführte Schreibweise der Größencharaktere. Die dort auftretenden Konstanten sind hier in den Konstanten c_8 und c_9 zusammengefaßt. ∎

Als Folgerungen aus Lemma 4 erhält man leicht die beiden nachstehenden Korollare.

Korollar 1. *Für $\sigma \geqslant 1/2$ gilt mit einer geeigneten Konstanten $c_{10} > 0$ für alle Größencharaktere $\chi\lambda_{m,n}$:*

$$(12) \qquad |\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})| \leqslant c_{10}\,\tau(t, m).$$

Hierbei ist im Falle des Hauptcharakters $|t| \geqslant 1$ vorausgesetzt. Weiterhin gilt für $1 < \sigma \leqslant 4$ mit einer geeigneten Konstanten $c_{11} > 0$:

$$(13) \qquad \zeta_K(\sigma) \leqslant c_{11}(\sigma - 1)^{-1}.$$

Korollar 2. *Es seien $0 < \varrho \leqslant 1/2$ und $0 < A \leqslant 1$. Dann gilt für alle $s \in \Omega_A(m)$ im Falle $\chi_{m,n} \not\equiv 1$ mit einer geeigneten positiven Konstanten $c_{12}(\varrho)$:*

$$(14) \qquad |\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})| \leqslant c_{12}(\varrho)\big(\tau(t, m)\big)^{\varrho}.$$

Falls $\chi\lambda_{m,n} \equiv 1$ ist, so gilt auf $\Omega_A(0)$ für $|s-1| \geqslant 1 - A(r \log 3)^{-1}$

$$(15) \qquad |\zeta_K(s)| \leqslant c_{13}(\varrho, A)\big(\tau(t, 0)\big)^{\varrho}. \ ∎$$

In Analogie zum Satz von De La Vallee-Poussin (Prachar [8], Satz 4.5) über einen nullstellenfreien logarithmischen Streifen im kritischen Bereich der rationalen Zetafunktion erhält man das nachstehende Lemma.

Lemma 5. *Es gibt eine nur vom Körper K abhängige Konstante A mit $0 < A \leqslant 1$ derart, daß für alle Größencharaktere $\chi\lambda_{m,n}$ die zugehörige Heckesche Zetafunktion $\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})$ auf dem Bereich $\Omega_A(m)$ nirgends verschwindet.* ∎

Dieses Lemma läßt es nun zu, einen fest gewählten Logarithmuszweig der Heckeschen Zetafunktionen in die Gebiete $\Omega_A(m)$ bzw. $\Omega_A^*(0)$ hinein analytisch fortzusetzen und mittels der vorangegangenen Abschätzungen der Zetafunktionen auch für deren Logarithmen Abschätzungen herzuleiten.

Lemma 6. *Für alle Größencharaktere $\chi\lambda_{m,n} \not\equiv 1$ gilt auf $\Omega_{A_0}(m)$ einschließlich des Randes mit $A_0 := A/3$ (A aus Lemma 3) und mit einer geeigneten Konstanten $c_{14} > 0$:*

$$|\log(\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n}))| \leqslant c_{14} \log^2(\tau(t, m)).$$

Im Falle des Hauptcharakters gilt die obige Ungleichung auf $\Omega_{A_0}(0)$ einschließlich des Randes lediglich mit der Einschränkung $|s-1| \geqslant A_0(r\log 3)^{-1}$.

Beweis. Anwendung von Satz 4.2 aus Prachar [8] (Anhang) auf die Funktion $F(s) = \log\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})$. Die Einschränkung für den Fall des Hauptcharakters ist hier wegen der Poles bei $s = 1$ notwendig. ∎

3. Anwendungen.

(A) Primzahlen in O_K. Hier gilt für die erzeugenden Funktionen

$$\varphi_m(s) = \sum_{\omega\in O_K}{}' \frac{p(\omega)}{N(\omega)^s} \exp\{2\pi i m El(\omega)\}$$

nach Hilfssatz 1 für $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\varphi_m(s) = \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \sum_{n_{q+2},\ldots,n_{r_1}=0,1} \sum_{(p)} \lambda_{m,n}(p) N(p)^{-s}, \tag{16}$$

wobei die innere Summe sich über alle von Primzahlen in O_K erzeugte Hauptideale erstreckt. Unter Verwendung von idealen Zahlen und der Klassengruppe $\hat{H}$ erhält man nun mit

$$B(s, \chi\lambda_{m,n}) := \sum_{(\hat{p})} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{\chi\lambda_{m,n}(\hat{p})}{N(\hat{p})^s}\right)^k, \tag{17}$$

$$\sum_{(p)} \frac{\lambda_{m,n}(p)}{N(p)^s} = \frac{1}{h}\sum_{\chi}\left(\log(\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})) - B(s, \chi\lambda_{m,n})\right), \tag{18}$$

wobei über alle Charaktere χ von $\hat{H}$ summiert wird. $B(s, \chi_{m,n})$ ist offensichtlich unabhängig von $\chi\lambda_{m,n}$ beschränkt und holomorph für $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1/2+\delta$, wobei $\delta > 0$ beliebig gewählt werden kann.

Damit ist nach den Ergebnissen von Kap. 2 φ_m holomorph auf $\Omega_{A_0}(m)$ für $m \neq (0, \ldots, 0)$ bzw. $\Omega_{A_0}^*(0)$ für $m = (0, \ldots, 0)$, wobei A_0 die Konstante aus Lemma 6 ist. Insbesondere gilt auf $\Omega_{A_0}^*(0)$: mit holomorphen Funktionen f und f_0:

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{2^{r_1-q-1}h}\log\left(\frac{1}{s-1}\right) + f_0(s) + f(s).$$

Damit sind die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 2 mit $a = 0$, $b = 1$ und $f_1(s) \equiv 1/2^{r_1-q-1}h$ erfüllt.

Unter Berücksichtigung von (16) und (18) sowie Lemma 6 ist damit auch (iii) mit $M = 2$ und $\varrho = 0$ gegeben.

Aus Lemma 2 erhält man demzufolge mit einem geeigneten $c > 0$:

$$P(x_1, \ldots, x_r) = \frac{w^+}{2^{r_1-q-1}hR^+}\int_{1-A_1}^{1} \frac{(x_1\cdots x_r)^\sigma}{\sigma^r}\,d\sigma + O_K\left(x_1\cdots x_r \exp\{-c(\log(x_1\cdots x_r))^{1/2}\}\right). \tag{19}$$

Die O-Konstante hängt hier nur vom Körper K ab, da die bei Lemma 1 in die O-Konstante eingehenden Größen hier lediglich von K abhängen.

Sind nun R der Regulator und w die Anzahl der Einheitswurzeln von K, so gilt in den Fällen

$$\begin{aligned} r_1 &= 0{:}\ \ w^+ = w,\ R^+ = R \\ r_1 &\geqslant 1{:}\ 2w^+ = w,\ R^+ = 2^q R \end{aligned} \qquad \text{also stets:}\quad \frac{w^+}{R^+} = \frac{w}{2^{q+1}R}. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) erhält man mit der Substitution $\sigma = \dfrac{\log u}{\log(x_1\cdots x_r)}$ und mit $X := x_1\cdots x_r$:

$$P(x_1, \ldots, x_r) = \frac{w}{2^{r_1}Rh}(\log X)^{r-1}\int_2^X \frac{du}{(\log u)^r} + O_K\left(X\exp\{-c(\log X)^{1/2}\}\right).$$

Damit ist Satz A vollständig bewiesen. ∎

Zur Untersuchung von $U(x_1, \ldots, x_r)$ und $F_k(x_1, \ldots, x_r)$ ist es recht nützlich, zunächst einmal die folgenden Betrachtungen anzustellen (vgl. auch Narkiewicz [6], Olson [7]).

Es sei G eine endliche abelsche Gruppe (multiplikativ geschrieben) mit dem Einselement 1. Für $l \in N$ und $g_i \in G$, $i = 1, \ldots, l$ heißt eine Folge $B = (g_1, \ldots, g_l)$ (ohne Berücksichtigung der Anordnung) ein *Block*, falls gilt: $g_1\cdots g_l = 1$. $l = l(B)$ heißt *Länge des Blockes*.

Auf natürliche Weise läßt sich auf der Menge der Blöcke von G eine Multiplikation definieren, indem man für zwei Blöcke $B_1 = (g_1, \ldots, g_l)$ und

$B_2 = (h_1, \ldots, h_k)$ das Produkt $B_1 \cdot B_2$ durch: $C := B_1 \cdot B_2 := (g_1, \ldots, g_l, h_1, \ldots, h_k)$ erklärt.

Die Blöcke B_1 und B_2 werden als Faktoren des Blockes C bezeichnet. Ferner heißt ein Block *irreduzibel*, wenn er sich nicht als Produkt zweier Blöcke darstellen läßt.

Nach Narkiewicz [6], Proposition 1, stimmt nun die maximale Länge eines irreduziblen Blockes in G mit der Davenportschen Konstanten $D(G)$, welche wie folgt definiert ist, überein:

> $D = D(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß für jede Folge $(g_1, \ldots, g_D)$ aus G eine Teilfolge $(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ mit $g_{i_1} \cdots g_{i_n} = 1$ existiert.

Ist nun H die Klassengruppe von K, so gilt (vgl. Narkiewicz [6]):

> $D = D(H)$ ist gleich der maximalen Anzahl von Primidealfaktoren, welche ein Hauptideal mit einer unzerlegbaren Zahl als erzeugendem Element besitzt.

Zur Charakterisierung von ganzen Zahlen mit k-deutiger Faktorzerlegung in unzerlegbare ganze Zahlen benötigt man nun noch die folgende Begriffsbildung der Faktorisierung eines Blockes

> Es sei $B = (g_1, \ldots, g_t)$ ein Block in G. Für $1 \leqslant l \leqslant t$ heißt eine surjektive Abbildung
>
> $$F\colon \{1, \ldots, t\} \to \{1, \ldots, l\}$$
>
> eine *Faktorisierung* von B, falls für $i = 1, \ldots, l$ gilt:
>
> $$\prod_{j \in F^{-1}(i)} g_j = 1,$$
>
> d.h.: $B_i(F) := (g_j)_{j \in F^{-1}(i)}$ ist ein Block. $l = l(F)$ heißt *Länge der Faktorisierung*.

Zwei Faktorisierungen F_1, F_2 eines Blockes heißen *gleich* (bei Narkiewicz: "strongly equivalent"), wenn ihre Längen übereinstimmen und eine Permutation π von $\{1, \ldots, l\}$ derart existiert, daß für $i = 1, \ldots, l(F_1) = l(F_2)$ gilt:

$$F_1^{-1}\big(\pi(i)\big) = F_2^{-1}(i).$$

Eine Faktorisierung F heißt *irreduzibel*, falls alle ihre Faktoren $B_i(F)$, $i = 1, \ldots, l(F)$, irreduzible Blöcke sind.

Definiert man nun für $k \in N$ $a_k(G)$ als maximale Länge eines Blockes in G, welcher höchstens k verschiedene irreduzible Faktorisierungen besitzt, so gilt nach Narkiewicz [6]:

> Ist H die Klassengruppe von K, so ist $a_k(H)$ gleich der maximalen Anzahl von verschiedenen Primidealfaktoren, die keine Hauptideale sind und die ein Hauptideal besitzt, welches durch eine ganze Zahl mit höchstens k verschiedenen Zerlegungen in unzerlegbare ganze Zahlen erzeugt wird.

(B) Unzerlegbare Zahlen in O_K. Es sei $H = \{X_1, \ldots, X_h\}$ die Klassengruppe von K, h die Klassenzahl und X_1 die Hauptklasse.

Setzt man nun

$$V_0 := \{(c_1, \ldots, c_h) \in N_0^h\colon (\underbrace{X_1, \ldots, X_1}_{c_1\text{-mal}}, \ldots, \underbrace{X_h, \ldots, X_h}_{c_1\text{-mal}}) \text{ ist irreduzibler Block}\} \tag{21}$$

so gilt das folgende

LEMMA 7. *Eine ganze Zahl $\omega \in K$ ist genau dann unzerlegbar, wenn ein h-Tupel $(c_1, \ldots, c_h) \in V_0$ und für $j = 1, \ldots, h$ Primideale $P_{j,1}, \ldots, P_{j,c_j} \in X_j$ derart existieren, daß (ω) die Primfaktorzerlegung*

$$(\omega) = P_{1,1} \cdots P_{1,c_1} \cdots P_{h,1} \cdots P_{h,c_h}$$

besitzt. (Im Falle $c_j = 0$ möge kein $P \in X_j$ auftreten.)

Beweis. Diese Aussage folgt unmittelbar aus der Definition eines irreduziblen Blockes und der kanonischen Homomorphie zwischen Klassengruppe und Gruppe der Ideale von K. ∎

Definiert man nun für einen Größencharakter $\lambda_{m,n}$ und für $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\Phi_{m,n}(s) := \sum_{(\omega) \neq 0} u(\omega) \lambda_{m,n}(\omega) N(\omega)^{-s}, \tag{22}$$

so gilt nach Hilfssatz 1 für die erzeugenden Funktionen φ_m von U:

$$\varphi_m(s) = \frac{1}{2^{r_1 - q - 1}} \sum_{n_{q+2}, \ldots, n_{r_1} = 0,1} \Phi_{m,n}(s), \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{23}$$

Ist nun $(\hat{\alpha})$ das dem Ideal A zugeordnete Hauptideal und Y_j die der Idealklasse X_j zugeordnete Klasse von Hauptidealen im Bereich Z· der idealen Zahlen von K, so gilt:

$$\Phi_{m,n}(s) := \sum_{(\hat{\omega}) \in Y_1 - \{(0)\}} u(\hat{\omega}) \lambda_{m,n}(\hat{\omega}) N(\hat{\omega})^{-s},$$

wobei $u(\hat{\omega})$ in naheliegender Weise zu interpretieren ist. Aufgrund von Lemma 7 erhält man damit:

$$\Phi_{m,n}(s) = \sum_{(c_1, \ldots, c_h) \in V_0} \sum_{\substack{(\hat{p}_{1,1}) \cdots (\hat{p}_{1,c_1}) \\ \cdots\cdots \\ (\hat{p}_{h,1}) \cdots (\hat{p}_{h,c_h})}} \frac{\lambda_{m,n}(\hat{p}_{1,1} \cdots \hat{p}_{1,c_1} \cdots \hat{p}_{h,1} \cdots \hat{p}_{h,c_h})}{N(\hat{p}_{1,1} \cdots \hat{p}_{1,c_1} \cdots \hat{p}_{h,1} \cdots \hat{p}_{h,c_h})^s},$$

$$(\hat{p}_{i,j}) \in Y_i,\ j = 1, \ldots, c_i,\ i = 1, \ldots, h.$$

(Es wird über alle paarweise verschiedenen Produkte $(\hat{p}_{i,1})\cdots(\hat{p}_{i,c_i})$, die aus c_i Idealen aus Y_i gebildet werden können, summiert.)

$$(24)\qquad = \sum_{(c_1,\ldots,c_h)\in V_0}\prod_{j=1}^{h}\sum_{(\hat{p}_1)\cdots(\hat{p}_{c_j})}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{p}_1\cdots\hat{p}_{c_j}),\qquad (\hat{p}_i)\in Y_j,\ i=1,\ldots,c_j$$

wobei die innere Summe gleich 1 gesetzt wird, falls $c_j=0$ ist. Diese innere Summe läßt sich nun folgendermaßen behandeln:

Es sei für $k\geqslant 1$: $l_{1,j}+\ldots+l_{k,j}=c_j$, $1\leqslant l_{i,j}\leqslant c_j$, $i=1,\ldots,k$ eine Partition von c_j.

Berücksichtigt man nun, daß jedes Produkt $(\hat{p}_1)\cdots(\hat{p}_{c_j})$ eine Darstellung $(\hat{p}_1)\cdots(\hat{p}_{c_j})=(\hat{q}_1)^{l_1}\cdots(\hat{q}_k)^{l_k}$, $l_i\equiv l_{i,j}$, wobei die $(\hat{q}_i)$ genau die paarweise verschiedenen primen Hauptideale unter den $(\hat{p}_j)$ sein mögen, besitzt, so gilt:

$$(25)\qquad \sum_{\substack{(\hat{p}_1)\cdots(\hat{p}_{c_j})\\(\hat{p}_i)\in Y_j,i=1,\ldots,c_j}}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{p}_1\cdots\hat{p}_{c_j})=\sum_{k=1}^{c_j}\sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_k)\\1\leqslant l_i\leqslant c_j\\l_1+\ldots+l_k=c_j}}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{((\hat{q}_1),\ldots,(\hat{q}_k))\\(\hat{q}_i)\in Y_j}}^{*}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{q}_1^{l_1}\cdots\hat{q}_k^{l_k}),$$

wobei der Stern am Summenzeichen andeuten möge, daß über alle Tupel $((\hat{p}_1),\ldots,(\hat{p}_k))\in Y_j\times\cdots\times Y_j$ mit jeweils paarweise verschiedenen Komponenten summiert wird.

Fasst man die Permutationen eines Tupels $(l_1,\ldots,l_k)$ zusammen, so läßt sich mit $\pi(l_1,\ldots,l_k)$ als Anzahl der Permutationen des Tupels und mit

$$d=d(l_1,\ldots,l_k):=\sum_{\substack{i=1\\l_i=1}}^{k}1$$

die Gleichung in (25) weiterschreiben zu:

$$(26)\qquad =\sum_{r=1}^{c_j}\sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_k)\\1\leqslant l_1\leqslant\cdots\leqslant l_k\leqslant c_j\\l_1+\cdots+l_k=c_j}}\frac{\pi(l_1,\ldots,l_k)}{k!}\times$$
$$\times\sum_{\substack{((\hat{p}_1),\ldots,(\hat{p}_d))\\(\hat{p}_i)\in Y_j}}^{*}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{p}_1\cdots\hat{p}_d)\sum_{\substack{((\hat{q}_{d+1}),\ldots,(\hat{q}_k))\\(\hat{q}_i)\in Y_j,(\hat{q}_i)\neq(\hat{p}_l)}}^{*}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{q}_{d+1}^{l_{d+1}}\cdots\hat{q}_k^{l_k}).$$

(Unter einer leeren Summe ist stets die 1 zu verstehen.)

Eine Aussage über das analytische Verhalten eines Ausdruckes wie der inneren Doppelsumme in (26) liefert das nun folgende Lemma.

LEMMA 8. *Es seien $Y\in\hat{H}$, $\lambda_{m,n}$ ein beliebiger Größencharakter, d und k nichtnegative ganze Zahlen, $l_1,\ldots,l_k\geqslant 2$ natürliche Zahlen und für* $\operatorname{Re}s>1$:

$$S(s):=\sum_{\substack{((\hat{p}_1),\ldots,(\hat{p}_d))\\(\hat{p}_i)\in Y}}^{**}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{p}_1\cdots\hat{p}_d)\sum_{\substack{((\hat{q}_1),\ldots,(\hat{q}_k))\\(\hat{q}_j)\in Y,(\hat{q}_j)\neq(\hat{p}_i)}}^{*}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{q}_1^{l_1}\cdots\hat{q}_k^{l_k}).$$

Bezeichnet man nun für beliebiges $\sigma_0>1/2$ mit R_{σ_0} den Ring der holomorphen, beschränkten Funktionen auf der Halbebene $\operatorname{Re}s\geqslant\sigma_0$, *so existiert ein Polynom $P\in R_{\sigma_0}[x]$ vom Grade $\leqslant d$ mit:*

$$S(s)=P\Big(\frac{1}{h}\sum_{\chi}\bar{\chi}(Y)\{\log(\zeta_K(s,\chi\lambda_{m,n}))-B(s,\chi\lambda_{m,n})\}\Big)$$

wobei über alle Charaktere χ von $\hat{H}$ summiert wird und $B(s,\chi\lambda_{m,n})$ wie in (17) *definiert ist.*

Der Leitkoeffizient von P wird durch:

$$c_d(s):=\sum_{\substack{((\hat{q}_1)),\ldots,(\hat{q}_k))\\(\hat{q}_j)\in Y}}^{*}\frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\hat{q}_1^{l_1}\cdots\hat{q}_k^{l_k})$$

geliefert, falls dieser Ausdruck nicht identisch in s verschwindet. (*In diesem Falle ist der Grad von P genau d.*) *Im Falle $m=(0,\ldots,0)$ sind sämtliche Koeffizientenfunktionen von P reellwertig auf der reellen Achse und falls zusätzlich $n=(0,\ldots,0)$ ist, so gilt $c_d(\sigma)>0$.*

Beweis. Induktion nach d. Im Falle $d=0$ sind die Behauptungen des Lemmas trivial erfüllt. Für $d>0$ setze man:

$$T(s):=\Big(\sum_{(\hat{p})\in Y}\frac{\lambda_{m,n}(\hat{p})}{N(\hat{p})^s}\Big)^d.$$

Analog zum Beweis von Lemma 2 in Narkiewicz [5] läßt es sich einsehen, daß $c_d(s)\cdot T(s)$ der führende Term von S ist, und daß $S(s)-c_d(s)\ T(s)$ die Induktionsvoraussetzungen erfüllt.

Für T erhält man mit der Orthogonalität der Charaktere der Klassengruppe H:

$$\begin{aligned}T(s)&=\Big(\frac{1}{h}\sum_{\chi}\bar{\chi}(Y)\sum_{(\hat{p})}\frac{\chi\lambda_{m,n}(\hat{p})}{N(\hat{p})^s}\Big)^d\\&=\Big(\frac{1}{h}\sum_{\chi}\bar{\chi}(Y)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(\hat{p})}\frac{1}{k}\Big(\frac{\chi\lambda_{m,n}(\hat{p})}{N(\hat{p})^s}\Big)^k-\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{(\hat{p})}\frac{1}{k}\Big(\frac{\chi\lambda_{m,n}(\hat{p})}{N(\hat{p})^s}\Big)^k\Big)^d\\&=\Big(\frac{1}{h}\sum_{\chi}\bar{\chi}(Y)\{\log(\zeta_K(s,\chi\lambda_{m,n}))-B(s,\chi\lambda_{m,n})\}\Big)^d,\end{aligned}$$

woraus sich die Behauptungen ergeben. ∎

Als umittelbare Folgerungen aus dem Lemma erhält man die untenstehenden Korollare.

KOROLLAR 1. *Zu jedem Größencharaktere $\lambda_{m,n}$ und jedem Tupel $(c_1,\ldots,c_h)\in V_0$ existieren Polynome $P_{m,n}^{(c_j)}\in R_{\sigma_0}[x_j]$, $j=1,\ldots,h$, vom Grade c_j und mit Leitkoeffizienten $\equiv 1$ derart, daß gilt:*

$$\Phi_{m,n}(s)=\sum_{(c_1,\ldots,c_h)\in V_0}\prod_{j=1}^{h}\frac{1}{c_j!}P_{m,n}^{(c_j)}(x_j)$$

mit

$$x_j = \frac{1}{h}\sum_{\chi}\bar{\chi}(Y_j)\{\log(\zeta_K(s,\chi\lambda_{m,n})) - B(s,\chi\lambda_{m,n})\}.$$

Im Falle $m = (0, \ldots, 0)$ sind die Koeffizienten von $P_{m,n}^{(c_j)}$ reellwertig auf der reellen Achse.

Beweis. Man wende Lemma 8 auf die innere Doppelsumme von (26) an und fasse die entstehenden Polynome in x_j unter Berücksichtigung von (24) und (25) zusammen. ■

KOROLLAR 2. *Es gibt Polynome $P_{m,n}^{(D)} \in R_{\sigma_0}[y_1, \ldots, y_h]$ vom Gesamtgrad D (D Davenportkonstante von H) mit:*

$$\varphi_m(s) = \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \sum_{n_{q+2},\ldots,n_{r_1}=0,1} P_{m,n}^{(D)}(y_1, \ldots, y_h)$$

und

$$y_j = \log(\zeta_K(s, \chi_j\lambda_{m,n})), \quad j = 1, \ldots, h.$$

Beweis. Zusammenfassung der Polynome aus Korollar 1 unter Berücksichtigung von $D = \max\{c_1 + \ldots + c_h \mid (c_1, \ldots, c_h) \in V_0\}$. ■

KOROLLAR 3. *Im Falle $m = (0, \ldots, 0)$ gilt insbesondere: Es gibt holomorphe und auf der reellen Achse reellwertige Funktionen f_j, $j = 0, 1, \ldots, D$, auf $\Omega_{A_0}(0)$ mit:*

$$\varphi_0(s) = \sum_{j=0}^{D} f_j(s)\left(\log\left(\frac{1}{s-1}\right)\right)^j, \quad s \in \Omega_{A_0}^*(0). \tag{27}$$

Für den Leitkoeffizienten gilt hier:

$$f_D(s) \equiv \frac{1}{2^{r_1-q-1}h^D} \sum_{\substack{(c_1,\ldots,c_h)\in V_0\\ c_1+\ldots+c_h=D}} \frac{1}{c_1!\cdots c_h!}. \tag{28}$$

Beweis. Man setze in Korollar 1 im Falle $m = (0, \ldots, 0)$:

$$P_{0,n}^{(c_j)}(x_j) =: \sum_{l=0}^{c_j} b_{n,l}^{(c_j)}(s)\,x_j^l \quad \text{mit} \quad b_{n,c_j}^{(c_j)}(s) \equiv 1.$$

Die Summation über $n \neq (0, \ldots, 0)$ der $\Phi_{0,n}$ gemäß (23) liefert ein Polynom in den x_j, welches überdies eine holomorphe Funktion $g_0(s)$ auf $\Omega_{A_0}^*(0)$ darstellt, da hierbei in den x_j nirgends der Hauptcharakter auftreten kann. g_0 ist reellwertig auf der reellen Achse, da die x_j und die $b_{n,l}^{(c_j)}$ es sind. Man erhält somit für φ_0:

$$\varphi_0(s) = g_0(s) + \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \sum_{(c_1,\ldots,c_h)\in V_0} \frac{1}{c_1!\cdots c_h!} \times \tag{29}$$
$$\times \prod_{j=1}^{h} \sum_{l=0}^{c_j} \frac{1}{h^l} b_{0,l}^{(c_j)}(s)\left\{\log\left(\frac{1}{s-1}\right) + g_j(s)\right\}^l,$$

wobei hier in den $g_j(s)$ der für $s = 1$ holomorphe Anteil der x_j zusammengefasst ist und $\log\left(\frac{1}{s-1}\right)$ vom Pol der Zetafunktion mit Hauptcharakter herrührt. Die $g_j(s)$ sind nun ebenfalls, wie man leicht sieht, reellwertig auf der reellen Achse.

Damit gilt (29) also auch auf $\Omega_{A_0}(0)$, da die Koeffizientenfunktionen $b_{0,l}^{(c_j)}(s)$ aus R_{σ_0} sind. Die innere Summe von (29) ist somit ein Polynom in $\log\left(\frac{1}{s-1}\right)$ vom Grade c_j über R_{σ_0}, wobei der Leitkoeffizient identisch gleich h^{-c_j} ist und sämtliche Koeffizienten holomorphe Funktionen auf $\Omega_{A_0}(0)$ sind.

Multipliziert man nun diese Polynome für $j = 1, \ldots, h$ miteinander und fasst die dabei entstehenden Polynome, welche jeweils den Grad $c_1 + \ldots + c_h$ besitzen, für h-Tupel $(c_1, \ldots, c_h)$ mit gleicher Komponentensumme zusammen, so erhält man die behauptete Darstellung von φ_0, wenn man noch berücksichtigt, daß die maximale Komponentensumme eines Tupels aus V_0 gerade die Davenportkonstante D von H ist. ■

Aufgrund der beiden letzten Korollare aus Lemma 8 erfüllen die erzeugenden Funktionen φ_m für unzerlegbare ganze Zahlen sämtliche Voraussetzungen von Lemma 2. Im Einzelnen gilt:

(i) ist nach Korollar 2 aus Lemma 8 und Lemma 5 mit $A := A_0$, wobei A_0 die Konstante aus Lemma 6 ist, erfüllt.

(ii) ist mit $a := 0$ und $b := D$ aufgrund von Korollar 3 aus Lemma 8 gegeben.

(iii) erhält man mit $M := 2D$ und $\varrho := 0$ aus Korollar 2 von Lemma 8 und aus Lemma 6.

Setzt man schließlich noch:

$$B := \sum_{\substack{(c_1,\ldots,c_h)\in V_0\\ c_1+\ldots+c_h=D}} \frac{1}{c_1!\cdots c_h!},$$

so existiert nach den Lemmata 2 und 3 unter Berücksichtigung von (20) und (28) ein normiertes Polynom $P \in R[x]$ vom Grade $D-1$ derart, daß für $r \geqslant 2$ und $X := x_1 \cdots x_r \geqslant 3$ gilt:

$$U(x_1, \ldots, x_r) = \frac{wBD}{2^{r_1}Rh^D} \cdot \frac{X}{\log X} P(\log\log X) + O\left(\frac{X}{(\log X)^2}(\log\log X)^{D-1}\right),$$

wobei die O-Konstante hier lediglich vom Körper K abhängt, da die in Lemma 3 genannten Größen hier nur von K abhängen. Damit ist Satz B vollständig bewiesen. ■

(C) K-deutig zerlegbare Zahlen in O_K. In diesem Falle sind die erzeugenden Funktionen nach Hilfssatz 1 für $\mathrm{Re}\, s > 1$ gegeben durch:

$$\varphi_m(s) = \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \sum_{n_{q+2},\ldots,n_{r_1}=0,1} \sum_{(\omega)\neq(0)} \frac{f_k(\omega)}{N(\omega)^s} \lambda_{m,n}(\omega).$$

Setzt man nun

$P := \{(\omega) \mid \omega \in O_K, (\omega)$ ist Produkt von primen Hauptidealen$\}$,

$Q := \{(\omega) \mid \omega \in O_K, (\omega) \neq (0), (1), (\omega)$ besitzt keine Hauptideale als Primfaktoren$\}$

so gilt mit:

$$\text{(30)} \qquad \begin{aligned} \Delta_{m,n}(s) &:= 1 + \sum_{(\omega)\in P} \lambda_{m,n}(\omega) N(\omega)^{-s}, \\ V_{m,n}(s) &:= 1 + \sum_{(\omega)\in Q} f_k(\omega) \lambda_{m,n}(\omega) N(\omega)^{-s} \end{aligned}$$

aufgrund der eindeutigen Zerlegung $(\omega) = (\omega_1)\cdot(\omega_2)$ eines Hauptideals $(\omega) \neq (1)$, $(\omega) \notin (P \cup Q)$ in Faktoren $(\omega_1) \in P$ und $(\omega_2) \in Q$ und wegen $f_k(\omega) = 1$ für $(\omega) \in P$ und $k \in N$:

$$\text{(31)} \qquad \varphi_m(s) = \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \sum_{n_{q+2},\ldots,n_{r_1}=0,1} \Delta_{m,n}(s) V_{m,n}(s).$$

Für $\operatorname{Re} s > 1$ erhält man aus (30) unter Verwendung von idealen Zahlen und der Orthogonalität der Charaktere:

$$\text{(32)} \qquad \Delta_{m,n}(s) = \prod_{(p)\in Y_1} \left(1 - \frac{\lambda_{m,n}(p)}{N(p)^s}\right)^{-1} = \prod_{\chi} \left(\zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})\right)^{1/h} g_{m,n}(s)$$

mit:

$$g_{m,n}(s) := \exp\left\{-\frac{1}{h}\sum_{\chi} B(s, \chi\lambda_{m,n}) + \sum_{(p)\in Y_1} \sum_{l=2}^{B} \frac{1}{l}\left(\frac{\lambda_{m,n}(p)}{N(p)^s}\right)^l\right\}.$$

Damit ist insbesondere $g_{m,n} \in R_{\sigma_0}$ und $\overline{g_{0,n}(s)} = g_{0,n}(\bar{s})$. Durch (32) ist also $\Delta_{m,n}$ in die Gebiete $\Omega_{A_0}(m)$ bzw. $\Omega^*_{A_0}(0)$ analytisch fortgesetzt worden.

Man setze nun für $k \in N$:

$V_k := \{(c_2, \ldots, c_h) \in N_0^{h-1}: (\underbrace{X_2, \ldots, X_2}_{c_2\text{-mal}}, \ldots, \underbrace{X_h, \ldots, X_h}_{c_h\text{-mal}})$ ist ein Block mit höchstens k verschiedenen irreduziblen Faktorisierungen$\}$.

Lemma 9. *Eine ganze Zahl $\omega \in K$, welche keine primen Hauptidealteiler besitzt, hat genau dann höchstens k verschiedene Zerlegungen in unzerlegbare ganze Zahlen, wenn ein Tupel $(c_2, \ldots, c_h) \in V_k$ und für $j = 2, \ldots, h$ Primideale $P_{j,1}, \ldots, P_{j,c_j} \in X_j$ derart existieren, daß (ω) die Primfaktorzerlegung:*

$$(\omega) = P_{2,1} \cdots P_{2,c_2} \cdots P_{h,1} \cdots P_{h,c_h}$$

besitzt.

Beweis. Korrespondenz zwischen der Faktorisierung eines Blockes in irreduzible Faktoren und der Primfaktorzerlegung eines Hauptideals. ■

Hiermit erhält man aus (30) analog zu Abschnitt B:

$$\text{(33)} \qquad V_{m,n}(s) = 1 + \sum_{(c_2,\ldots,c_h)\in V_k} \prod_{j=2}^{h} \sum_{\substack{(\mathfrak{p}_1)\cdots(\mathfrak{p}_{c_j}) \\ (\mathfrak{p}_i)\in Y_j}} \frac{\lambda_{m,n}}{N^s}(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{c_j}).$$

Die innere Summe von (33) läßt sich nun ebenfalls wie in Abschnitt B auf eine der Formel (26) entsprechende Gestalt bringen.

Damit lassen sich auch hier entsprechende Folgerungen aus Lemma 8 ziehen. Die Beweise der folgenden Korollare 1a, 2a, 3a sind analog zu denen der Korollare 1, 2, 3.

Korollar 1a. *Zu jedem Größencharaktere $\lambda_{m,n}$ und jedem Tupel $(c_2, \ldots, c_h) \in V_k$ existieren normierte Polynome $Q^{(c_j)}_{m,n} \in R_{\sigma_0}[x_j]$, $j = 2, \ldots, h$ vom Grade c_j derart, daß gilt:*

$$V_{m,n}(s) = 1 + \sum_{(c_2,\ldots,c_h)\in V_k} \prod_{j=2}^{h} \frac{1}{c_j!} Q^{(c_j)}_{m,n}(x_j)$$

mit

$$x_j := \frac{1}{h} \sum_{\chi} \bar{\chi}(Y_j)\left(\log\left(\zeta_K(s; \chi\lambda_{m,n})\right) - B(s, \chi\lambda_{m,n})\right).$$

Insbesondere sind im Falle $m = (0, \ldots, 0)$ die Koeffizientenfunktionen sämtlicher Polynome reellwertig auf der reellen Achse. ■

Korollar 2a. *Es gibt Polynome $Q^{(a_k)}_{m,n} \in R_{\sigma_0}[y_1, \ldots, y_h]$ vom Gesamtgrad a_k mit:*

$$V_{m,n}(s) = Q^{(a_k)}_{m,n}(y_1, \ldots, y_h), \qquad y_j := \log\left(\zeta_K(s, \chi_j\lambda_{m,n})\right).$$

a_k ist hierbei die maximale Länge eines Blockes in H, welcher höchstens k verschiedene irreduzible Faktorisierungen und Y_1 nicht als Faktor besitzt. ■

Korollar 3a. *Im Falle des Hauptcharakters $\lambda_{m,n} \equiv 1$ gilt: Es gibt holomorphe Funktionen g_j, $j = 0, 1, \ldots, a_k$ auf $\Omega_{A_0}(0)$, welche reellwertig auf der reellen Achse sind, mit:*

$$\text{(34)} \qquad V_{0,0}(s) = \sum_{j=0}^{a_k} g_j(s)\left(\log\left(\frac{1}{s-1}\right)\right)^j \quad \textit{für } s \in \Omega^*_{A_0}(0).$$

Insbesondere gilt für den Leitkoeffizienten:

$$\text{(35)} \qquad g_{a_k}(s) \equiv \frac{1}{h^{a_k}} \sum_{\substack{(c_2,\ldots,c_h)\in V_k \\ c_2+\ldots+c_h=a_k}} \frac{1}{c_2! \cdots c_h!}. \ ■$$

Fasst man nun diese Darstellungen von $\Delta_{m,n}$ und $V_{m,n}$ gemäß (30) wieder zusammen, so erhält man zunächst aus (31) und Korollar 2a die folgende Aussage:

(36) Es gibt Polynome $Q_{m,n}^{(a_k)} \in R_{\sigma_0}[y_1, \ldots, y_h]$ mit

$$\varphi_m(s) = \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \sum_{n_{q+2},\ldots,n_{r_1}=0,1} \Big(\prod_{\chi} \zeta_K(s, \chi\lambda_{m,n})\Big)^{1/h} Q_{m,n}^{(a_k)}(y_1, \ldots, y_h),$$

wobei $y_j := \log\big(\zeta_K(s, \chi_j \lambda_{m,n})\big)$ für $j = 1, \ldots, h$ ist und der Gesamtgrad von $Q_{m,n}^{(a_k)}$ gerade a_k ist. Hierbei ist die Funktion $g_{m,n} \in R_{\sigma_0}$ aus (31) bereits in den Koeffizienten des Polynoms mitberücksichtigt.

Aus (32) erhält man ferner für $s \in \Omega_{A_0}^*(0)$:

$$\Delta_{0,0}(s) = \big(\zeta_K(s)^{1/h} \prod_{\chi \neq \chi_1} (\zeta_K(s, \chi))^{1/h}\big) g_{0,0}(s) = \left(\frac{1}{s-1}\right)^{1/h} h(s), \tag{37}$$

wobei

$$h(s) := \zeta_K(s)(s-1)\big(\prod_{\chi \neq \chi_1} \zeta_K(s, \chi)\big)^{1/h} g_{0,0}(s) \tag{38}$$

holomorph auf $\Omega_{A_0}(0)$ nach Lemma 5 ist.

Für φ_0 erhält man aus (31):

$$\varphi_0(s) = \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \Delta_{0,0}(s) V_{0,0}(s) + \sum_{\substack{n_{q+2},\ldots,n_{r_1}=0,1 \\ (n_{q+2},\ldots,n_{r_1}) \neq (0,\ldots,0)}} \Delta_{0,n}(s) V_{0,n}(s)$$
$$= \frac{1}{2^{r_1-q-1}} \Delta_{0,0}(s) V_{0,0}(s) + f(s),$$

wobei f nach Korollar 2a, (32) und Lemma 5 eine holomorphe Funktion auf $\Omega_{A_0}(0)$ ist.

Somit gilt wegen (37), (38) und Korollar 3a für $s \in \Omega_{A_0}^*(0)$:

$$\varphi_0(s) = \left(\frac{1}{s-1}\right)^{1/h} \sum_{l=0}^{a_k} \frac{g_l(s)\, h(s)}{2^{r_1-q-1}} \left(\log\left(\frac{1}{s-1}\right)\right)^l + f(s). \tag{39}$$

Da nach Korollar 3a die g_l an der Stelle $s = 1$ reelle Werte annehmen bleibt noch $h(1)$ zu untersuchen. Für $\sigma > 1$ erhält man aus (32), (37) und (38):

$$0 < \Delta_{0,0}(\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{1/h} h(\sigma),$$

woraus $h(\sigma) > 0$ für $\sigma > 1$ resultiert.

Da nun wegen (38) in Verbindung mit Lemma 5 $h(s)$ für $s = 1$ nicht verschwindet und dort stetig ist, ergeben sich die Positivität von $h(1)$ und die Reellwertigkeit von $h(1)\, g_l(1)$ für $l = 0, \ldots, a_k$. Mit Korollar 3a (35) erhält man schließlich:

$$g_{a_k}(1)\, h(1) > 0. \tag{40}$$

Somit sind auch hier sämtliche Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt. Im Einzelnen gilt:

(i) ist wegen (36) und Lemma 5 mit $A := A_0$ gegeben, wobei A_0 die Konstante aus Lemma 6 ist,

(ii) ist mit $a := 1/h$ und $b := a_k$ aufgrund von (39) und (40) erfüllt.

(iii) erhält man mit $M := 2a_k$ und $\varrho := 1/2$ aus (36), dem Korollar 2 zu Lemma 4 und aus Lemma 6.

Setzt man nun noch $B_k := h(1)\, g_{a_k}(1)$, so erhält man unter Berücksichtigung von (20) aus Lemma 3:

Zu jedem $k \in N$ gibt es ein normiertes Polynom $P_k \in \boldsymbol{R}[x]$ derart, daß für $h > 1$, $r > 1$ und $X := x_1 \cdots x_r \geqslant 3$ gilt:

$$F_k(x_1, \ldots, x_r) = \frac{wB_k}{2^{r_1} R h^{a_k} \Gamma(1+1/h)} \cdot \frac{X}{(\log X)^{1-1/h}} P_k(\log\log X) +$$
$$+ O_{K,k}\left(\frac{X}{(\log X)^{2-1/h}} (\log\log X)^{a_k}\right).$$

Die O-Konstante hängt hier nur vom Körper K und $k \in N$ ab, da die bei Lemma 3 in die O-Konstante eingehenden Größen hier sämtlichst von K und k abhängen.

Dies ist genau die Aussage von Satz C. ■

Literaturnachweis

[1] W. Grotz, *Einige Anwendungen der Siegelschen Summenformel*, Acta Arith. 38 (1980), S. 69–95.

[2] E. Hecke, *Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen* (2. Mitt.), Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 11–51.

[3] E. Landau, *Einführung in die analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale*, Göttingen 1927.

[4] T. Mitsui, *Generalized prime number theorem*, Jap. Journ. of Math. 26 (1956), S. 1–42.

[5] W. Narkiewicz, *Numbers with unique factorization in an algebraic number field*, Acta Arith. 21 (1972), S. 313–322.

[6] — *Finite abelian groups and factorization problems*, Coll. Math. 42 (1979), S. 319–330.

[7] J. E. Olson, *A combinatorial problem on finite abelian groups*, Journ. Number Theory 1 (1969), S. 8–10.

[8] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer Verlag, Berlin 1957.

[9] H. Rademacher, *On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications*, Math. Zeitschr. 72 (1959), S. 192–204.

[10] P. Rémond, *Étude asymptotique de certaines partitiones dans certaines semi-groupes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 83 (1966), S. 343–410.

[11] W. Schaal, *On the expression of a number as a sum of two squares in totally real algebraic number fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), S. 529–537.

[12] C. L. Siegel, *Mittelwerte arithmetischer Funktionen in Zahlkörpern*, Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936), S. 219–224.

Eingegangen am 28. 4. 1983 (1354)