[8] K. Ramachandra, *A note on numbers with a large prime factor*, J. London Math. Soc. (2), 1 (1969), pp. 303–306.
[9] K. Ramachandra, T. N. Shorey and R. Tijdeman, *On Grimm's problem relating to factorisation of a block of consecutive integers I*, J. Reine Angew. Math. 273 (1975), pp. 109–124.
[10] R. Tijdeman, *On integers with many small prime factors*, Compositio Math. 26 (1973), pp. 319–330.
[11] — *On the equation of Catalan*, Acta Arith. 29 (1976), pp. 197–209.
[12] J. Turk, *Multiplicative properties of neighbouring integers*, Thesis, Leiden, 1979.
[13] — *Multiplicative properties of integers in short intervals*, Indagationes Math. 42 (1980), pp. 429–436.
[14] — *The product of two or more neighbouring integers is never a power*, to appear in Illinois J. Math., 1983.
[15] — *Almost powers in short intervals*, submitted to J. of Number Theory.
[16] — *Polynomial values at consecutive integers*, J. Reine Angew. Math. 319 (1980), pp. 142–152.
[17] — *Polynomial values and almost powers*, Michigan Math. J. 29 (1982), pp. 213–220.

Received on 14. 3. 1983 (1345)

ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

Bemerkungen über Primzahlen in kurzen Reihen

von

K. Prachar (Wien)

1. Von A. Selberg [14] wurde erstmals die folgende Fragestellung untersucht. Sei x eine große positive Zahl. Es ist eine möglichst langsam zunehmende Funktion $\varphi(x)$ anzugeben, für welche

$$\pi(n+\varphi(n))-\pi(n) \sim \frac{\varphi(n)}{\log n} \quad (n \to \infty) \tag{1}$$

gilt, außer eventuell für $o(x)$ Werte von natürlichen Zahlen n, $n \leqslant x$. Dabei ist $\pi(x)$ wie üblich die Anzahl der Primzahlen $\leqslant x$. Selberg zeigte, daß unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für die Nullstellen der Zetafunktion $\zeta(s)$ (wir zitieren diese Annahme im folgenden kurz mit R) $\varphi(x) = f(x)\log^2 x$ eine solche Funktion ist, wenn nur $f(x) \to \infty$ gilt für $x \to \infty$; und ohne R, daß $\varphi(x) = x^a$ für $a > 19/77$ eine solche Funktion ist. Er bemerkt, daß $f(x)\log x$ nicht mehr brauchbar ist, wenn über $f(x)$ weniger vorausgesetzt wird als $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. (Der Verfasser ersucht zu entschuldigen, daß von ihm in einer Fußnote der Arbeit [9] dieser Bemerkung unrichtigerweise eine zu weitgehende Interpretation gegeben wurde.) Die Richtigkeit dieser Bemerkung ergibt sich aus dem folgenden Satz: Für natürliches r und genügend kleine positive Konstanten $c_1 = c_1(r)$ und $c_2 = c_2(r)$ gibt es mehr als $c_1 x$ Zahlen n, $n \leqslant x$, mit

$$\pi(n+(r+c_2)\log x)-\pi(n) < r; \tag{2}$$

und andererseits auch mehr als $c_1 x$ (andere) solche n, für die

$$\pi(n+(r-c_2)\log x)-\pi(n) > r \tag{3}$$

gilt. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich schon mittels einer Methode von Erdös [1] aber auch mittels der Überlegungen aus [9], und wir wollen ihn nicht ausführen.

Die Konstante 19/77 ergibt sich aus der Verwendung der damals besten Abschätzungen von Ingham über die Dichte der Nullstellen der Zetafunktion. Von Montgomery, Jutila, Huxley und anderen sind diese Abschätzungen ganz außerordentlich verbessert worden. Ein in [5] zitiertes Ergebnis von Harman liefert 1/8 anstelle von 19/77.

Unter Annahme der Richtigkeit der bisher nicht vollständing bewiesenen sogenannten Dichtehypothese (im folgenden wird diese Annahme kurz mit D bezeichnet)

$$(4) \qquad N(\sigma, T) \leqslant T^{2(1-\sigma)}(\log T)^b, \qquad T \geqslant 2,$$

wobei $N(\sigma, T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ in $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma \geqslant 1/2$, $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$ und b eine Konstante $\geqslant 1$ ist, ergibt sich, daß $\varphi(x) = (\log x)^A$ mit passender Konstante A eine im obigen Sinn brauchbare Funktion ist. Dies kann man mit der Methode aus [14] oder auch [11] beweisen, allerdings unter zusätzlicher Benützung der von Halász und Turán [3] entdeckten Abschätzung

$$N(\sigma, T) \ll T^{c(1-\sigma)^{3/2}\log\{1/(1-\sigma)\}}.$$

Montgomery erhält in seinem bekannten Buch noch etwas besser

$$(5) \qquad N(\sigma, T) \ll T^{167(1-\sigma)^{3/2}} \log^{17} T.$$

Mittels (5) und D kann übrigens auch bewiesen werden:

$$p_n - p_{n-1} < p_n^{1/2}(\log p_n)^A,$$

wobei p_n die n-te Primzahl ist. Man vergleiche hiezu auch Turán [15].

Ein "Vordringen" in den Bereich $\varphi(x) = C \log x$ mit konstantem C verdankt man Gallagher [2]. Für die Anzahl $P_k = P_k(x, \lambda)$ der $n \leqslant x$ mit

$$(6) \qquad \pi(n+\lambda \log x) - \pi(n) = k,$$

wobei λ irgendeine positive Konstante ist, zeigte er: Für $\mu/\lambda \geqslant 4$ gilt

$$(7) \qquad \sum_{k>\mu} P_k < (1+\varepsilon)\, x e^{-c\mu/\lambda}$$

mit passender absoluter Konstante $c > 0$; unter Annahme der Richtigkeit einer sehr weitgehenden Vermutung von Hardy und Littlewood über die Verteilung von Primzahl-r-Tupeln mit gegebenen Abständen gilt

$$(8) \qquad P_k \sim x e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (x \to \infty).$$

Das bei (2), (3) formulierte Ergebnis besagt dann

$$\sum_{k<r} P_k(x, r+c_2) > c_1 x$$

und

$$\sum_{k>r} P_k(x, r-c_2) > c_1 x.$$

Schon Rieger [13] (vgl. auch [8]) zeigte durch eine einfache Anwendung des Satzes von Brun–Schnirelman, daß die n, $n \leqslant x$, mit $\pi(n+\lambda \log x) - \pi(n) > 0$ positive Dichte haben für beliebiges festes $\lambda > 0$.

Heath-Brown [4] gelang es unter Annahme von R und einer weiteren plausiblen Annahme über die Verteilung der Nullstellen von $\zeta(s)$ zu zeigen, daß $\varphi(x) = f(x) \log x$ für $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ eine im genannten Sinn brauchbare Funktion ist.

2. Mit den Resultaten aus 1. hängt eng die Frage zusammen, wie nahe an einem gegebenen N es eine Goldbachsche Zahl, d.h. eine als Summe $p_1 + p_2$ von zwei Primzahlen p_1, p_2 darstellbare Zahl gibt. Linnik [6] bewies

$$(9) \qquad |p_1 + p_2 - N| < (\log N)^{3+\varepsilon} \qquad (\mathrm{R}).$$

Aber Kátai und unabhängig davon Montgomery und Vaughan [7] leiteten aus der grundlegenden Beziehung von [14] in wenigen Zeilen

$$(10) \qquad |p_1 + p_2 - N| < C \log^2 N \qquad (\mathrm{R})$$

her mit passender Konstante C. Ohne R wird in [7] bewiesen

$$(11) \qquad |p_1 + p_2 - N| < N^a$$

für jedes $a > 7/72$. Linnik [6] bewies auch

$$(12) \qquad |p_1 + p_2 - N| < (\log N)^{b+6} \qquad (\mathrm{D}).$$

Doch enthält sein Beweis eine Lücke, die erst in [12] und unabhängig davon etwas später in [16](¹) ausgefüllt wurde. In [12] wird dabei (5) verwendet, in [16] ein Dichtesatz von Huxley. Durch die Arbeiten vor allem von Montgomery wurden Abschätzungen gefunden, die z.B. in $0{,}9 \leqslant \sigma \leqslant 1$ eine kleinere Konstante als 2 im Exponenten auf der rechten Seite von (4) enthalten, und zwar ohne jede unbewiesene Annahme.

(5) zieht eine solche Abschätzung erst nach sich, wenn s in einem viel kleineren Streifen mit der rechten Begrenzung $\sigma = 1$ liegt. Allerdings ist $(1-\sigma)^{3/2} < \varepsilon(1-\sigma)$ wenn nur $\sigma > 1-\delta$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, gilt. Die Rechnungen in [12] waren insoferne ungeschickt als die genannten Abschätzungen von Montgomery (auch Jutila, Huxley u.a.) nicht verwendet wurden und lieferten an Stelle von $b+6$ nur eine Konstante > 5000 $(b+6)$, während in [16] gezeigt wurde, daß z.B. für $b = 1$ anstelle von 7 jede Konstante $> 148/13$ genommen werden kann. Unter Annahme von D kann man wohl den Satz von Selberg mit $\varphi(x) = (\log x)^A$ jedenfalls mit $A > 148/13$ beweisen.

(¹) Für die Überlassung von Kopien der Arbeit [16] ist der Verfasser den Herren Prof. Dr. W. Schwarz (Frankfurt a/Main), Professor Wang Yuan (Academia Sinica) und Univ.-Doz. Dr. W. Ruppert (Wien) zu besonderem Dank verpflichtet.

Wang [16] erhielt noch das interessante Ergebnis, daß (9) schon folgt, wenn man anstelle von R nur

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)}(\log T)^{-72/37}$$

für $\frac{1}{2} < \sigma \leqslant \beta$, β eine Zahl $> \frac{1}{2}+\frac{12}{37}$, als richtig annimmt. Unter dieser Annahme kann man wohl auch den Satz von Selberg mit $\varphi(x) = (\log x)^{3+\varepsilon}$ beweisen.

3. Linnik [6] bewies auch: Unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für die L-Funktionen zu Charakteren modulo q (im folgenden kurz mit GR bezeichnet) gilt

$$N+mq = p_1+p_2 \tag{13}$$

für passendes natürliches $m < (\log N)^6$, wenn $q < N/(\log N)^6$ ist; dabei soll für gerades q auch N gerade sein. Verfasser [12] und unabhängig davon Wang Y. [16] bemerkten, daß Linniks Überlegungen dieses Ergebnis auch mit $3+\varepsilon$ anstelle von 6 abzuleiten gestatten. In Erweiterung des Selbergschen Satzes wurde in [10] gezeigt: Für $q \leqslant x/\{f(x)\log^2 x\}$ und unter Annahme von GR gibt es für fast alle n, $n \leqslant x$, $(n, q) = 1$ eine Primzahl der Form $p = n+mq$ mit $m \leqslant f(x)\log^2 x$, wenn nur $f(x) \to \infty$ strebt für $x \to \infty$. Mittels der Hauptformel aus [10] zeigen wir in 5. auf dem von Kátai und Montgomery–Vaughan angegebenen Weg, daß man das Ergebnis von [12] und [16] insofern verbessern kann, als man in (12) sogar $m < C\log^2 N$ erreichen kann für passendes C und $q < N/C_1\log^2 N$ für passendes C_1 (unter Annahme von GR).

4. Mit Methoden von Linnik konnte in [8] gezeigt werden, daß Ergebnisse ähnlich denen aus 1., 2. auch gelten, wenn man anstelle der auf der linken Seite von (1) auftretenden Anzahl der Primzahlen in der Reihe $n+1$, $n+2, \ldots, n+[\varphi(n)]$ allgemeiner die Anzahl $P(n, \varphi(n))$ der Primzahlen in der Reihe

$$n+1^l, n+2^l, \ldots, n+[\varphi(n)]^l$$

für irgendeine feste natürliche Zahl l betrachtet. Mit der Methode aus [9] kann man auch folgende Verallgemeinerung eines in 1. genannten Ergebnisses beweisen (der Beweis soll hier nicht ausgeführt werden): Für jedes natürliche r gibt es positive Konstanten $c_1 = c_1(r, l)$, $c_2 = c_2(r, l)$ so, daß für mehr als $c_1 x$ Werte von n, $n \leqslant x$, $P(n, (r+c_2)\log x) < r$ ist; und für mehr als $c_1 x$ (andere) Werte von n $P(n, (r-c_2)\log x) > r$. Sicherlich lassen sich auch die Resultate von Gallagher für den Fall $l \geqslant 2$ verallgemeinern.

5. In [10] wurde gezeigt: Sei q eine natürliche Zahl, etwa $q > 2$, und l möge die Zahlen $0 < l < q$, $(l, q) = 1$ durchlaufen. Sei weiter

$$\theta_l(x) = \sum_{p \leqslant x,\, p \equiv l \bmod q} \log p.$$

Dann gilt

$$\int_1^\infty \sum_l \left(\frac{\theta_l(y+y/T)-\theta_l(y)-(1/\varphi(q))(y/T)}{y^{1/2+\sigma_0}}\right)^2 dy \ll \frac{\log^2 qT}{T}, \tag{14}$$

wobei T größer als eine passende Konstante > 2 ist und σ_0 eine Zahl mit

$$\tfrac{1}{2}+\frac{11}{\log qT} < \sigma_0 < \tfrac{1}{2}+\frac{13}{\log qT}.$$

Die Konstante in $\ll$ ist von q und T unabhängig. Sei nun N eine große natürliche Zahl und $N^{1/2} \ll qT \ll N$. Dann folgt aus (14)

$$\int_{(1/4)N}^{N} \sum_l \left\{\theta_l\left(y+\frac{y}{T}\right)-\theta_l(y)-\frac{1}{\varphi(q)}\frac{y}{T}\right\}^2 dy \ll \frac{1}{T}N^2\log^2 N. \tag{15}$$

Sei nun weiter h eine natürliche Zahl, $h < N^{1/2}$, mit $hq < \frac{1}{16}N$, die später noch genauer bestimmt wird. Wir nehmen an, daß keine der Zahlen $N+mq$, $m = 1, 2, \ldots, h$, als Summe von zwei Primzahlen darstellbar ist und betrachten für $z \leqslant N$ die beiden Intervalle

$$J_1 = (z, z+\tfrac{1}{2}hq], \quad J_2 = (N-z, N-z+\tfrac{1}{2}hq].$$

Dann gibt es für kein l Primzahlpaare p_1, p_2 mit $p_1 \in J_1$, $p_2 \in J_2$, $p_1 \equiv l \bmod q$, $p_2 \equiv N-l \bmod q$. Es möge l_1 alle l durchlaufen, für die $(N-l, q) = 1$ ist. Ihre Anzahl ist gleich $\varphi(q)\,\delta(q)$,

$$\delta(q) = \prod_{p|q,\, p\nmid N}\left(1-\frac{2}{p}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{p}\right) \geqslant \prod_{p|q,\, p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p}\right) \geqslant \frac{\varphi(q)}{q}.$$

Bei gegebenem z und l_1 liegen für alle y mit $z < y \leqslant z+\frac{1}{4}hq$ entweder in $(y, y+\frac{1}{4}hq]$ keine Primzahlen $\equiv l_1 \bmod q$ oder in $(N-z+y, N-z+y+\frac{1}{4}hq]$ keine Primzahlen $\equiv N-l_1 \bmod q$ (oder beides ist richtig). Wir betrachten nun für $g = 1, 2, \ldots, G$ die Paare von Intervallen

$$\left(g\frac{hq}{2}, (g+1)\frac{hq}{2}\right] \quad \text{und} \quad \left(N-g\frac{hq}{2}, N-(g-1)\frac{hq}{2}\right].$$

G sei dabei so gewählt, daß für $g = G$ die beiden Intervalle nicht übereinandergreifen und andererseits alle Intervalle zusammen das Intervall $(0, N]$ ausfüllen, eventuell ausgenommen zwei Intervalle einer Länge $< hq$. Indem wir obige Überlegung mit $z = ghq/2$ anwenden, erhalten wir eine Menge von Zahlen y, $\frac{1}{4}N < y \leqslant N$ von einem Maß $> \frac{1}{16}N$ derart, daß mehr als $\frac{1}{2}\varphi(q)\delta(q)-1$ Restklassen l keine Primzahlen des Intervalls $(y, y+\frac{1}{4}hq)$ enthalten. Wir setzen nun in (15)

$$T = A\frac{N}{hq},$$

wobei $A > 4$ so groß gewählt sei, daß (15) für $T > 16A$ anwendbar ist. Dann gilt $N^{1/2} \ll qT \ll N$. Für $\frac{1}{4}N < y \leqslant N$ hat man

$$\frac{1}{\varphi(q)}\frac{y}{T} \gg \frac{hq}{\varphi(q)}.$$

Die linke Seite von (15) wird damit

$$\gg N\left(\frac{hq}{\varphi(q)}\right)^2 \varphi(q)\delta(q),$$

und wir erhalten aus (15)

$$h \ll \prod_{p|(q,N)} \left(1-\frac{1}{p}\right) \log^2 N.$$

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös, *The difference of consecutive primes*, Duke Math. Journ. 6 (1940), S. 438–441.

[2] P. X. Gallagher, *On the distribution of primes in short intervals*, Mathematica 23 (1976), S. 4–9.

[3] G. Halász and P. Turán, *On the distribution of roots of Riemann zeta and allied functions, I*, Journ. Number Theory 1 (1969), S. 121–137.

[4] D. R. Heath-Brown, *Gaps between primes, and the pair correlation of zeros of the zeta-function*, Acta Arith. 41 (1982), 85–99.

[5] — *Primes in "almost all" short intervals*, Journ. London Math. Soc. 26 (1982), S. 385–396.

[6] J. W. Linnik, *Einige bedingte Sätze, die mit dem binären Goldbachschen Problem zusammenhängen* (Russisch), Isvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 16 (1952), S. 503–520.

[7] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *The exceptional set in Goldbach's problem*, Acta Arith. 27 (1975), S. 353–370.

[8] K. Prachar, *Über Zahlen, die sich als Summe einer Primzahl und einer „kleinen" Potenz darstellen lassen*, Monatsh. f. Math. 68 (1964), S. 409–420 und II, 69 (1965), S. 62–68.

[9] — *On sums of primes and l-th powers of small integers*, Journ. Number Theory 2 (1970), S. 379–385.

[10] — *Generalisation of a theorem of A. Selberg on primes in short intervals*, Coll. Math. Soc. János Bolyai 13 (1974), S. 267–280.

[11] — *Über den Primzahlsatz von A. Selberg*, Acta Arith. 28 (1975), S. 277–297.

[12] — *Über die Anwendung einer Methode von Linnik*, ibid. 29 (1976), S. 367–376.

[13] G. J. Rieger, *Anwendung der Siebmethode auf einige Fragen der additiven Zahlentheorie, I*, J. Reine Angew. Math. 214/215 (1964), S. 373–385.

[14] A. Selberg, *On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes*, Arch. Math. Naturvid. 47 (6) (1943), S. 87–105.

[15] P. Turán, *On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta-function of Riemann*, Acta Arith. 4 (1957), S. 31–56.

[16] Y. Wang, *On Linniks method concerning the Goldbach number*, Sci. Sinica 20 (1977), S. 16–30.

Eingegangen am 13. 5. 1983 (1360)

ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

The linear sieve, revisited

by

DANIEL A. RAWSTHORNE (Wheaton, Md.)

1. Introduction. Two of the most famous unsolved number theory problems are the twin-prime and Goldbach conjectures. These problems, and others, lend themselves to an application of the linear sieve. Chen's theorem, [3], currently the best result known about the Goldbach conjecture, has as its basis a linear sieve, for example.

The linear sieve functions (defined in Section 3) have been derived in at least two different ways: by means of a complicated combinatorial identity, [9], and by an equally complicated set construction, [7]. It has been said that these functions are the result of iterating the Selberg upper bound function an infinite number of times using the Buchstab identity. However, this iteration process is internal, and not readily apparent, in the articles cited.

The purpose of this article is to show that the linear sieve functions are indeed the results of an external iteration of the Selberg upper bound function.

2. Notation, assumption, and the Selberg sieve. We follow the notation of Halberstam–Richert ([4] and [5]).

Let $\mathfrak{A}$ be a finite sequence of integers, and let $\mathfrak{A}_d$ denote the subsequence of $\mathfrak{A}$ all of whose elements are divisible by d. We use $|\mathfrak{A}|$ and $|\mathfrak{A}_d|$ to denote the number of elements of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A}_d$, respectively.

Let $\mathscr{P}$ be a set of primes and define (the empty product being 1)

$$P(z) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p<z}} p.$$

Define the sifting function $\mathscr{S}(\mathfrak{A}; \mathscr{P}, z)$ for any z to be $\mathscr{S}(\mathfrak{A}; \mathscr{P}, z) = \left|\{a \in \mathfrak{A}\colon (a, P(z)) = 1\}\right|$; in other words, $\mathscr{S}(\mathfrak{A}; \mathscr{P}, z)$ is the number of elements of $\mathfrak{A}$ remaining after we have removed all those with prime factors less than z that belong to $\mathscr{P}$.

We need some additional notation in order to study $\mathscr{S}(\mathfrak{A}; \mathscr{P}, z)$. Let $\omega(d)$ be a multiplicative function with $\omega(1) = 1$, $\omega(p) = 0$ for $p \notin \mathscr{P}$, and $\omega(p)$