[18] W. Schwarz, *Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer Funktionen*, ibid. 262/263 (1973), S. 66–73.
[19] — *Über die Ramanujan-Entwicklung multiplikativer Funktionen*, Acta Arith. 27 (1975), S. 269–279.
[20] W. Schwarz, J. Spilker, *Mean-Values and Ramanujan-Expansions of Almost Even Functions*, Coll. Math. Soc. János Bolyai, Debrecen 1974, S. 315–357 (1976).
[21] J. Spilker, *Ramanujan expansions of bounded arithmetic functions*, Arch. Math. 35 (1980), S. 451–453.
[22] G. Tenenbaum, *Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné*, Preprint.
[23] F. Tuttas, *Über die Entwicklung multiplikativer Funktionen nach Ramanujan-Summen*, Acta Arith. 36 (1980), S. 257–270.
[24] R. Warlimont, *Ramanujan-Expansions of Multiplicative Functions*, ibid. 42 (1983), S. 111–120.
[25] A. Wintner, *Eratosthenian Averages*, Baltimore 1943.

UNIVERSITY OF ILLINOIS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Urbana, Illinois 61801, USA

Eingegangen am 26. 11. 1982
und in revidierter Form am 28. 4. 1983 (1330)

ACTA ARITHMETICA
XLIV (1984)

Algorithme de Jacobi–Perron dans les corps de nombres de degré 4

par

MOSTAPHA BOUHAMZA (Casablanca, Maroc)

Introduction. Perron [3] a introduit une généralisation de l'algorithme du développement en fraction continue, permettant de développer un système de n nombres réels. Bernstein [1], dans une série d'articles publiés depuis 1963, donne des systèmes de nombres dont le développement par l'Algorithme de Jacobi–Perron (A.J.P) est périodique. E. Dubois et R. Paysant-Le Roux [2] ont démontré que dans toute extension réelle cubique du corps des rationnels Q, il existe deux nombres dont l'A.J.P est périodique.

Dans cet article, nous nous proposons de démontrer que dans toute extension réelle K, de degré 4 sur Q, il existe trois nombres Q-linéairement indépendants avec 1, dont le développement suivant l'A.J.P est périodique.

LEMME. *Soit*

$$g(X) = X^4 - aX^3 + bX^2 - cX + 1$$

où a, b et c sont des entiers naturels vérifiant:

$$(*) \qquad c \geqslant 5, \quad b \geqslant 2(c-1) \quad \text{et} \quad a \geqslant \max(b-1,\, 2b-3c+5).$$

Soit α la plus grande racine positive de $g(X)$. Alors le développement par l'A.J.P de:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{(a-c)(\alpha-1)\alpha+(2c-b-2)(\alpha-1)}{(a-4)\alpha^2-(b-6)\alpha+c-4}, \right.$$
$$\left. \frac{(a+c-b-2)(\alpha-1)^2}{(a-4)\alpha^2-(b-6)\alpha+c-4}, \frac{(\alpha-1)^3}{(a-4)\alpha^2-(b-6)\alpha+c-4}\right)$$

est purement périodique de longueur 4. La période est:

$$\begin{gathered}(0,\,0,\,1)\\(0,\,0,\,1)\\(0,\,0,\,1)\\(c-4,\; b-2(c-1),\; a+c-b-2)\end{gathered}$$

et $g(X)$ est le polynôme caractéristique du développement.

Démonstration. Considérons $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ dont le développement suivant l'A.J.P est purement périodique avec la période ci-dessus. On vérifie facilement que $g(X)$ est le polynôme caractéristique de ce développement. Si $\varrho_0 = \alpha$ est la plus grande racine positive de $g(X)$, on obtient d'après l'unicité du développement suivant l'A.J.P $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Théorème. *Dans toute extension réelle K, de degré 4, du corps des rationnels Q, il existe trois nombres α_1, α_2, α_3 Q-linéairement indépendants avec 1 dont le développement par l'A.J.P est périodique.*

Démonstration. On sait que K peut-être engendrée par un nombre de Pisot ϱ_0 de norme 1 ([4]).

Désignons par ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 les conjugués de ϱ_0. Les puissances ϱ_0^k $(k \geqslant 1)$ de ϱ_0 vérifient l'équation:

$$X^4 - a_{3,k}X^3 + a_{2,k}X^2 - a_{1,k}X + 1 = 0$$

où

$$a_{1,k} = \varrho_0^k\varrho_1^k\varrho_2^k + \varrho_0^k\varrho_1^k\varrho_3^k + \varrho_0^k\varrho_2^k\varrho_3^k + \varrho_1^k\varrho_2^k\varrho_3^k,$$
$$a_{2,k} = \varrho_0^k\varrho_1^k + \varrho_0^k\varrho_2^k + \varrho_0^k\varrho_3^k + \varrho_1^k\varrho_2^k + \varrho_1^k\varrho_3^k + \varrho_2^k\varrho_3^k,$$
$$a_{3,k} = \varrho_0^k + \varrho_1^k + \varrho_2^k + \varrho_3^k.$$

Comme ϱ_0 est entier, les nombres $a_{1,k}$, $a_{2,k}$ et $a_{3,k}$ sont des entiers rationnels pour tout $k \geqslant 1$, en vertu du théorème des fonctions symétriques.

Nous allons montrer tout d'abord que:

$$X^4 - a_{3,k}X^3 + a_{2,k}X^2 - a_{1,k}X + 1$$

est le polynôme minimal de ϱ_0^k sur Q.

En effet pour cela il suffit de montrer que le degré de ϱ_0^k sur Q est 4. Soit $L = Q(\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$. L est une extension normale de Q. Si ϱ_0^k est de degré < 4, alors L est une extension galoisienne de $Q(\varrho_0^k)$ $(Q(\varrho_0^k) \neq K)$; donc il existe (en vertu de la théorie de Galois) un $Q(\varrho_0^k)$-isomorphisme σ de K dans L tel que $\sigma(\varrho_0) \neq \varrho_0$.

On a:

$$\sigma(\varrho_0^k) = \varrho_0^k$$

d'où

$$|\sigma(\varrho_0)| = |\varrho_0|.$$

Ce qui est absurde puisque ϱ_0 est un nombre de Pisot et que $\sigma(\varrho_0)$ est un conjugué de ϱ_0. Donc ϱ_0^k est de degré 4.

A. Si K est totalement réel, on a deux cas:

1[er] *Cas*. Les conjugués ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 de ϱ_0 sont tous positifs. Les nombres $a_{3,k}$, $a_{2,k}$, $a_{1,k}$ sont alors des entiers positifs. Nous allons montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $a_{1,k}$, $a_{2,k}$ et $a_{3,k}$ vérifient les inégalités $(*)$ du Lemme ci-dessus. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un entier naturel k tel que:

(1) $a_{1,k} \geqslant 5$,
(2) $a_{2,k} \geqslant 2a_{1,k}$,
(3) $a_{3,k} \geqslant 2a_{2,k}$.

Nous avons:

$$a_{1,k} = \frac{1}{\varrho_0^k} + \frac{1}{\varrho_1^k} + \frac{1}{\varrho_2^k} + \frac{1}{\varrho_3^k},$$
$$a_{2,k} = \varrho_0^k(\varrho_1^k + \varrho_2^k + \varrho_3^k) + \varrho_1^k\varrho_2^k + \varrho_1^k\varrho_3^k + \varrho_2^k\varrho_3^k,$$
$$a_{3,k} = \varrho_0^k + \varrho_1^k + \varrho_2^k + \varrho_3^k.$$

(1) et (3) résultent clairement de k assez grand en regardant les termes principaux de $a_{1,k}$, $a_{2,k}$ et $a_{3,k}$:

$$a_{1,k} \sim \frac{1}{\varrho_1^k} + \frac{1}{\varrho_2^k} + \frac{1}{\varrho_3^k},$$
$$a_{2,k} \sim \varrho_0^k(\varrho_1^k + \varrho_2^k + \varrho_3^k),$$
$$a_{3,k} \sim \varrho_0^k.$$

Quant à (2) nous avons:

$$a_{2,k} - 2a_{1,k} = \varrho_1^k\varrho_2^k + \varrho_2^k\varrho_3^k + \varrho_0^k\varrho_1^k(1 - 2\varrho_2^k) + \varrho_0^k\varrho_2^k(1 - 2\varrho_3^k) + \\ + \varrho_0^k\varrho_3^k(1 - 2\varrho_2^k) + \varrho_1^k\varrho_2^k(1 - 2\varrho_3^k).$$

Comme $|\varrho_i| < 1$ pour tout $i \neq 0$, il existe un entier naturel k_1 tel que pour tout $k \geqslant k_1$ et tout $i \neq 0$ on ait $|\varrho_i^k| < 1/4$.

Il en résulte que chaque terme de $a_{2,k} - 2a_{1,k}$ est strictement positif pour $k \geqslant k_1$, d'où

$$a_{2,k} \geqslant 2a_{1,k} \quad \text{pour tout } k \geqslant k_1.$$

Nous voyons donc qu'on peut choisir un entier k tel que $a_{3,k}$, $a_{2,k}$ et $a_{1,k}$ vérifient les inégalités $(*)$ du Lemme.

Donc, en vertu du Lemme ci-dessus, il existe trois nombres α_1, α_2, α_3 dans K tels que l'A.J.P de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ soit périodique.

2[ème] *Cas*. Deux des conjugués de ϱ_0 sont négatifs. Supposons que ce soient ϱ_2 et ϱ_3 (ϱ_1 est positif).

On considère l'équation vérifiée par ϱ_0^{2k}, un raisonnement analogue à celui que nous venons de voir permet d'affirmer l'existence d'un entier k pour lequel $a_{3,2k}$, $a_{2,2k}$ et $a_{1,2k}$ vérifient les inégalités du Lemme. D'où l'existence de trois nombres α_1, α_2, α_3 dans K dont l'A.J.P est périodique.

B. K n'est pas totalement réel. Deux des conjugués de ϱ_0 sont complexes conjugués. Soit $\varrho_3 = \overline{\varrho_2}$, ϱ_1 est alors strictement positif.

Désignons par r et θ respectivement le module et l'argument de ϱ_2.

Comme dans A, nous allons montrer qu'il existe un entier k tel que $a_{3,k}$, $a_{2,k}$ et $a_{1,k}$ vérifient les inégalités $(*)$.

Nous avons:

$$a_{1,k} = 2\varrho_0^k \varrho_1^k r^k \cos k\theta + r^{2k}(\varrho_0^k + \varrho_1^k),$$

$$a_{2,k} - 2a_{1,k} = r^{2k} + 2r^k \varrho_0^k(\cos k\theta - r^k) + 2r^k \varrho_1^k(\cos k\theta - r^k) + \\ + \varrho_0^k \varrho_1^k(1 - 4r^k \cos k\theta),$$

$$a_{3,k} - 2a_{2,k} = \varrho_0^k(1 - 2\varrho_1^k - 4r^k \cos k\theta) + \\ + (1 - 4r^k \cos k\theta)\varrho_1^k + 2r^k(\cos k\theta - r^k).$$

Or nous avons simultanément:

$$\lim_{k\to\infty} r^k = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_1^k = 0,$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_0^k = +\infty.$$

Il en résulte qu'il existe un entier naturel k_0 tel que:

$$\cos k_0\theta > \tfrac{1}{8} > r^{k_0}; \quad \varrho_1^{k_0} < \tfrac{1}{8} \quad \text{et} \quad \varrho_0^{k_0} > 8.$$

L'existence de k_0 tel que $\cos k_0\theta > \frac{1}{8}$, est une conséquence d'un résultat classique (Bourbaki, *Topologie Generale*) sur les sous-groupes du groupe des nombres complexes de module 1.

Nous avons ainsi:

(i) $a_{1,k_0} \geqslant r^{2k_0}\varrho_0^{k_0} = 1/\varrho_1^{k_0} > 8$,

(ii) $a_{2,k_0} - 2a_{1,k_0} > 0$,

(iii) $a_{3,k_0} - 2a_{2,k_0} \geqslant \varrho_0^{k_0}(1 - 2\varrho_1^{k_0} - 4r^{k_0}) > \varrho_0^{k_0}(1 - \frac{2}{8} - \frac{4}{8}) = \varrho_0^{k_0}/4 > 2$.

a_{3,k_0}, a_{2,k_0} et a_{1,k_0} vérifient les inégalités (1), (2) et (3) donc ils vérifient les inégalités $(*)$. D'où, en vertu du Lemme ci-dessus, il existe trois nombres α_1, α_2, et α_3 dans K tels que l'A.J.P de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ soit périodique.

Remarque. Les nombres α_1, α_2, α_3 que nous obtenons ainsi sont Q-linéairement indépendants avec 1.

En effet, ceci résulte du fait que ϱ_0^k est la plus grande racine positive de l'équation:

$$X^4 - a_{3,k}X^3 + a_{2,k}X^2 - a_{1,k}X + 1 = 0$$

et que 1, ϱ_0^k, ϱ_0^{2k}, ϱ_0^{3k} sont linéairement indépendants sur Q.

Ce qui achève de montrer le théorème.

References

[1] Léon Bernstein, *The Jacobi-Perron Algorithm. Its Theory and Application*, Lecture notes in Mathematics 207, Springer-Verlag 1971.

[2] E. Dubois et R. Paysant-Le Roux, *Algorithme de Jacobi-Perron dans les extensions cubiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 280 (1975), pp. 183-186.

[3] O. Perron, *Grundlagen fuer eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, Math. Ann. 64 (1907), p. 1-76.

[4] H. Weyl, *Algebraic Theory of Numbers*, Princeton University Press, 1940, page 169, théorème IV, 8, A.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
FACULTE DES SCIENCES
Casablanca, Maroc

Reçu le 31. 1. 1983
et dans la forme modifiée le 24. 4. 1983 (1339)