ACTA ARITHMETICA
XLIII (1984)

Sur le théorème de Brun–Titchmarsh

par

E. FOUVRY (Talence)

1. Introduction. En 1981, J.-M. Deshouillers et H. Iwaniec sont parvenus à des résultats très généraux sur les sommes de Kloosterman en moyenne (voir [1]). En particulier, ils ont appliqué ces travaux au théorème de Brun–Titchmarsh, pour obtenir la majoration suivante de $\pi(x;q,a)$ (cardinal des nombres premiers $\leqslant x$, congrus à a modulo q) (voir [2]):

Soient $x\geqslant 2$, $\varepsilon>0$, $1\leqslant |a|\leqslant x^{\varepsilon}$, $Q=x^{\theta}$ et $1/2\leqslant\theta\leqslant 1-\varepsilon$. Alors, pour presque tout q de $[Q,2Q]$ avec $(q,a)=1$, on a:

$$\pi(x;q,a)\leqslant\big(C(\theta)+\varepsilon c_1\big)\frac{x}{\varphi(q)\log x}$$

avec

$$C(\theta)=\frac{4}{3(1-\theta)}.$$

(*Le nombre d'exceptions est inférieur à $Qx^{-\varepsilon c_2}$, pourvu qu'on ait $x>x_0(\varepsilon)$, les constantes c_1 et c_2 sont absolues*).

On désigne ici par $\varphi(q)$ l'indicateur d'Euler de l'entier q.

De cet énoncé, ils ont déduit que, pour une infinité de nombres premiers p, le plus grand facteur premier de $p+a$ dépasse $p^{\delta-\varepsilon}$, où δ vaut $1-\frac{1}{2}e^{-3/8}=0{,}65635\ldots$ (on se reportera à [9] et à [10] pour les travaux antérieurs).

L'object de cet article est d'améliorer les idées de [2], en faisant appel à des travaux récents sur le théorème de Bombieri–Vinogradov ([3], [4], [5]), travaux qui reposent essentiellement sur le calcul d'une dispersion au moyen de majorations de sommes de Kloosterman. Le résultat obtenu est ainsi au confluent de plusieurs méthodes de théorie des nombres. Toutefois, il n'est valable que pour θ légèrement supérieur à $1/2$. On montre:

THÉORÈME. *Soient $x\geqslant 2$, $\varepsilon>0$, $A>0$, $|a|\leqslant(\log x)^{A}$, $Q=x^{\theta}$, $1/2\leqslant\theta\leqslant 11/20$. Pour presque tout q de $[Q,2Q]$, vérifiant $(q,a)=1$, on a la formule:*

$$\pi(x; q, a) \leqslant \big(C_1(\theta) - C_2(\theta) + \varepsilon\big) \frac{x}{\varphi(q)\log x}$$

avec

$$C_1(\theta) = \begin{cases} \dfrac{12}{25-40\theta} & (1/2 \leqslant \theta \leqslant 53/104), \\[2ex] \dfrac{48}{47-56\theta} & (53/104 \leqslant \theta \leqslant 11/20), \end{cases}$$

$$C_2(\theta) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{10(1-\theta)}{9\theta}\right) & (1/2 \leqslant \theta \leqslant 10/19), \\ 0 & (10/19 \leqslant \theta \leqslant 11/20). \end{cases}$$

Le nombre d'exceptions est inférieur à $Q(\log x)^{-A}$, *pourvu qu'on ait* $x \geqslant x_0(\varepsilon, A)$.

Remarquons l'amélioration de $C(\frac{1}{2}) = 2{,}6666\ldots$ en $C_1(\frac{1}{2}) - C_2(\frac{1}{2}) = 2{,}2946\ldots$ De ce théorème, on déduit par la technique usuelle:

Corollaire. *Pour une infinité de nombres premiers* p, *le plus grand facteur premier de* $p+a$ *est supérieur à* $p^{\delta-\varepsilon}$, *où* δ *est défini par la relation*:

$$\frac{4}{3}\log\frac{9}{20(1-\delta)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\log\frac{13}{12} - \frac{6}{7}\log\frac{400}{351} + \frac{1}{2}\log\frac{361}{360}$$

et où ε *est un nombre positif quelconque.*

On trouve $\delta = 0{,}65785\ldots$ C'est volontairement que l'auteur a simplifié l'exposé, en n'itérant pas l'identité de Buchstab et en n'appliquant pas le théorème 2 de [3]. Ces techniques auraient, elles aussi, conduit à une légère amélioration des constantes en question, mais au prix de calculs assez longs.

Ce travail doit beaucoup à de fructueuses discussions avec H. Iwaniec. L'auteur tient à le remercier ici, et à exprimer aussi sa gratitude à H. Cohen et à G. Tenenbaum.

2. Début de la démonstration. En reprenant les idées de [2], on voit que l'étude de $\pi(x; q, a)$ se ramène à celle de la fonction:

$$\pi(f; q, a) = \sum_{p \equiv a[q]} f(p)$$

où la lettre p désigne toujours un nombre premier, et où $f(\xi)$ est une fonction positive de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support dans $[x, 2x]$, dont les dérivées vérifient:

$$|f^{(l)}(\xi)| \leqslant x^{-l} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

On note aussi, pour $2 \leqslant z \leqslant x$:

$$P(z) = \prod_{p<z} p$$

et

$$S(f; q, a, z) = \sum_{\substack{(n, P(z))=1 \\ n \equiv a[q]}} f(n).$$

On a donc

$$\pi(f; q, a) \leqslant S(f; q, a, x^{1/2})$$

et par l'identité de Buchstab ([6], page 39), on a:

(1) $$\pi(f; q, a) \leqslant \Sigma_1 - \Sigma_2$$

avec

$$\Sigma_1 = S(f; q, a, D^{1/3})$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{D^{1/3} \leqslant p < x^{1/2} \\ (p,q)=1}} S(f; pq, b, p)$$

où D est un paramètre à fixer ultérieurement, et b une solution des congruences:

$$b \equiv 0[p] \quad \text{et} \quad b \equiv a[q].$$

Dans le paragraphe 4, on minorera Σ_2, et au paragraphe 5, on majorera Σ_1, auparavant on cite les lemmes dont on aura besoin.

3. Lemmes. Le lemme 1 est la version de la formule du crible linéaire, donnée par Iwaniec. Son intérêt réside en la grande souplesse du terme d'erreur; il ne semble pas nécessaire de rappeler les notations classiques du crible lineaire. On montre:

Lemme 1 ([7], [8]). *Soient* $z \geqslant 2$, $D \geqslant z$ *et* $\varepsilon > 0$. *On a la majoration*:

$$\mathscr{S}(\mathscr{A}, z) \leqslant XV(z)\{F(s) + E\} + R^+$$

où $s = (\log D)/(\log z)$ *et* $E = O\big(\varepsilon + \varepsilon^{-8} e^{K+L} (\log D)^{-1/3}\big)$. *Le terme reste* R^+ *est de la forme*:

$$R^+ = \sum_{(D)} \sum_{\nu < D^{\varepsilon}} c^+_{(D)}(\nu, \varepsilon) \sum_{D_i \leqslant p_i < D_i^{1+\varepsilon^9}} r(\mathscr{A}, \nu p_1 \ldots p_r)$$

où (D) *parcourt l'ensemble des sous-suites (y compris la sous-suite vide)* $D_1 \geqslant D_2 \geqslant \ldots \geqslant D_r$, *où les* D_i *sont des nombres de la forme* $D^{\varepsilon^2(1+\varepsilon^9)^n}$ $(n \geqslant 0)$ *vérifiant les inégalités*

$$D_1 D_2 \ldots D_{2l} D_{2l+1}^3 < D \quad (0 \leqslant l \leqslant \tfrac{1}{2}(r-1))$$

où les coefficients $c^+_{(D)}(\nu, \varepsilon)$ *sont, en valeur absolue, inférieurs à* 1.

Les lemmes 2 et 3 traitent de l'exposant de répartition de la convolée de deux suites; ils sont à la base de l'amélioration des résultats de [2]. Dans le lemme 2, une des suites est très courte.

En désignant par $\tau_\gamma(n)$ le nombre de décompositions de l'entier n sous la forme $n = n_1 \ldots n_\gamma$, on montre:

LEMME 2 ([4]). *Soient $\eta > 0$ et γ un entier $\geqslant 1$. On désigne par (a_m) et (β_n) deux suites de réels vérifiant les conditions:*

(i) *Pour tous les entiers b, k et q, vérifiant $(b, q) = 1$, on a pour tout B et pour $y \geqslant 2$, l'estimation*

$$\sum_{\substack{n\leqslant y\\(n,k)=1,n\equiv b[q]}} \beta_n = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n\leqslant y\\(n,kq)=1}} \beta_n + O_B\big(y\tau_2(k)(\log y)^{-B}\big),$$

(ii) $|a_k|$ *et* $|\beta_k| \leqslant \big(\log k\, \tau_\gamma(k)\big)^\gamma + 1$.

On note N_1 et N_2 deux nombres satisfaisant aux inégalités:

$$x^{-1}K^2 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant x^{5/6}K^{-4/3} \quad \textit{pour} \quad x^{1/2} \leqslant K \leqslant x^{11/20}.$$

Sous les conditions précédentes, l'estimation

$$(2) \qquad \sum_{\substack{q\leqslant Kx^{-\eta}\\(q,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{mn\equiv a[q]\\N_1<n\leqslant N_2}} a_m\beta_n f(mn) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(mn,q)=1\\N_1<n\leqslant N_2}} a_m\beta_n f(mn) \Big| \ll_{\gamma,\eta,A} x(\log x)^{-A}$$

est valable pour tout A, uniformément pour $|a| \leqslant (\log x)^A$.

Dans le lemme 3, on envisage le cas où (β_n) est de nature très particulière:

LEMME 3 ([3], [5]). *Si (a_m) satisfait la condition* (ii) *du lemme 2, et si (β_n) est la fonction caractéristique de la suite des nombres premiers, l'estimation* (2) *est valable pour tout $\eta > 0$, pour tout A, uniformément pour $|a| \leqslant (\log x)^A$, dès qu'on a les inégalités:*

$$x^{1/2} \leqslant K \leqslant N_1 < N_2 \leqslant x^{(10/19)-\eta}.$$

Dans [2], les majorations de sommes de Kloosterman sont utilisées sous la forme suivante:

LEMME 4. *Soient (a_m) et (b_n) deux suites de réels vérifiant $|a_m|$ et $|b_n| \leqslant 1$. On définit la somme $B_q(M, N)$ par la formule:*

$$B_q(M, N) = \sum_{\substack{m\leqslant M\\(mn,q)=1}} a_m \sum_{n\leqslant N} b_n r_{mn}(f; q, a)$$

où on a posé

$$r_d(f; q, a) = \sum_{\substack{n\equiv a[q]\\n\equiv 0[d]}} f(n) - (dq)^{-1} I(f) \qquad \Big(I(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n)\Big).$$

La relation

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} |B_q(M, N)|^2 \ll x^{2-\varepsilon}Q^{-1}$$

est vraie, uniformément pour $|a| \leqslant x^\varepsilon$, lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées:

$$M \leqslant xQ^{-1}x^{-4\varepsilon}, \quad N \leqslant xQ^{-1}x^{-4\varepsilon}, \quad MN^4 \leqslant x^3Q^{-3}x^{-4\varepsilon}.$$

Le lemme 5 est de nature combinatoire, on a:

LEMME 5. *Soient U, V et W trois nombres vérifiant $W \geqslant V \geqslant U \geqslant 1$, et soit $(Y) = (Y_1, \ldots, Y_r)$ une suite de r nombres $Y_i \geqslant 1$ vérifiant les inégalités*

$$Y_1 \ldots Y_i^2 \leqslant W \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

telle qu'aucun des produits des Y_i n'appartienne à $[U, V]$. Sous ces conditions on a l'inégalité

$$Y_1 \ldots Y_r \leqslant WUV^{-1}.$$

Ce lemme est évident pour $r = 1$, on le suppose démontré pour $r-1$ nombres Y_i. Lorsqu'on a l'inégalité $Y_r \geqslant VU^{-1}$, la relation $Y_1 \ldots Y_r^2 \leqslant W$ entraîne le résultat.

Notons qu'on a aussi:

$$Y_r > U \Rightarrow Y_r > V \geqslant VU^{-1}.$$

On suppose maintenant $Y_r < VU^{-1}$. On constate alors, qu'aucun des produits partiels des $Y_1, \ldots, Y_{r-1}$ n'appartient ni à $[U, V]$ ni à $[UY_r^{-1}, VY_r^{-1}]$, c'est à dire au segment $[UY_r^{-1}, V]$. La récurrence conduit à la relation:

$$Y_1 \ldots Y_{r-1} < W(UY_r^{-1})V^{-1}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 5.

Dans toute la suite ε désigne une constante strictement positive, suffisamment petite.

4. Minoration de Σ_2. Le lemme 3 ne donne une minoration non triviale de Σ_2 que pour:

$$x^{1/2} \leqslant Q \leqslant x^{(10/19)-2\varepsilon}.$$

D'après la formule (1), on a:

$$\Sigma_2 \geqslant \sum_{\substack{x^{1/2}<p_2\leqslant xD^{-1/3}\\p_1p_2\equiv a[q]}} f(p_1p_2) \geqslant \sum_{\substack{Qx^\varepsilon<p_2\leqslant x^{(10/19)-\varepsilon}\\p_1p_2\equiv a[q]}} f(p_1p_2).$$

Le lemme 3 entraîne, qu'on a, pour presque tout q (premier avec a), de l'intervalle $[Q, 2Q]$, l'inégalité:

$$\Bigg|\sum_{\substack{p_1p_2\equiv a[q]\\ Qx^{\varepsilon}<p_2\leqslant x^{(10/19)-\varepsilon}}} f(p_1p_2)-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(p_1p_2,q)=1\\ Qx^{\varepsilon}<p_2\leqslant x^{(10/19)-\varepsilon}}} f(p_1p_2)\Bigg|\leqslant \frac{x}{\varphi(q)}(\log x)^{-A}$$

valable uniformément pour $|a|\leqslant(\log x)^A$. Le nombre d'exceptions vaut $O_{\varepsilon,A}\big(Q(\log x)^{-A}\big)$. Utilisant le théorème des nombres premiers, on a finalement, pour presque tout q, premier avec a, de l'intervalle $[Q, 2Q]$, la formule:

$$\Sigma_2\geqslant\big(C_2(\theta)-O(\varepsilon)\big)\big(\varphi(q)\log x\big)^{-1}I(f) \tag{3}$$

pour $x>x_0(\varepsilon, A)$.

5. Etude de Σ_1. Par le lemme 1, on a:

$$\Sigma_1\leqslant(2+\varepsilon')\big(\varphi(q)\log D\big)^{-1}I(f)+R^+(q, D)\qquad(\varepsilon'\ll\varepsilon)$$

où $D=D(x, Q)$ aura les valeurs suivantes:

$$D=\begin{cases} x^{25/6}Q^{-20/3}x^{-60\varepsilon} & \text{pour}\quad 1/2\leqslant\theta\leqslant 53/104,\\ x^{47/24}Q^{-7/3}x^{-60\varepsilon} & \text{pour}\quad 53/104\leqslant\theta\leqslant 11/20.\end{cases}$$

Dans ce paragraphe, on montre que, pour presque tout q, premier avec a, de l'intervalle $[Q, 2Q]$, on a:

$$R^+(q, D)=O\big(x(\log x)^{-2}\varphi(q)^{-1}\big).$$

Notons $N'=x^{-1}Q^2x^{10\varepsilon}$ et $N''=x^{5/6}Q^{-4/3}x^{-10\varepsilon}$. Le terme reste $R^+(q, D)$ est la somme de $O_\varepsilon(1)$ termes de la forme $R\big(q, (D)\big)$ avec $(D)=(D_1, \ldots, D_r)$. On notera D' un produit partiel des D_i ($D'=D_{i_1}\ldots D_{i_l}$).

1. *Cas où un des D' appartient à l'intervalle* $[N', N'']$. Dans ce cas, on applique le lemme 2 avec

$$\beta_n=\sum 1$$

la somme étant faite sur les $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_l})$ vérifiant

$$n=p_{i_1}\ldots p_{i_l},\ \text{avec}\ p_{i_j}\in[D_{i_j}, D_{i_j}^{1+\varepsilon^9}[\qquad(1\leqslant j\leqslant l).$$

Il suffit de vérifier les inégalités

$$x^{-1}Q^2x^{\varepsilon}<D'<D'^{(1+\varepsilon^9)}<x^{5/6}Q^{-4/3}x^{-\varepsilon}$$

pour en déduire qu'on a

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}}\big|R\big(q, (D)\big)\big|=O\big(x(\log x)^{-A-2}\big)$$

ce qui conduit à la majoration:

$$\big|R\big(q, (D)\big)\big|\leqslant x(\log x)^{-2}\varphi(q)^{-1} \tag{4}$$

valable pour presque tout q, premier avec a, de l'intervalle $[Q, 2Q]$, avec $O\big(Q(\log x)^{-A}\big)$ exceptions.

2. *Cas où aucun des D' n'appartient à l'intervalle* $[N', N'']$. Les inégalités de la définition des D_i permettent d'appliquer le lemme 5, avec $Y_i=D_i$, $W=D$, $U=N'$ et $V=N''$. On a donc

$$D_1\ldots D_r\leqslant DN'N''^{-1}.$$

On sait ([8]), qu'en posant:

$$M_1=xQ^{-1}x^{-5\varepsilon}\quad\text{et}\quad N_1=x^{-1}DQx^{5\varepsilon},$$

on peut décomposer la suite $(D_1, \ldots, D_r)$ en deux sous-suites

$$(D_1', \ldots, D_s')\quad\text{et}\quad(D_1'', \ldots, D_t'')$$

telles qu'on ait

$$D_1'\ldots D_s'\leqslant M_1\quad\text{et}\quad D_1''\ldots D_t''\leqslant N_1.$$

On pose alors

$$M=D^{\varepsilon}(D_1'\ldots D_s')^{1+\varepsilon^9}\quad\text{et}\quad N=(D_1''\ldots D_t'')^{1+\varepsilon^9}.$$

On a donc l'inégalité

$$MN\leqslant D^{\varepsilon}(DN'N''^{-1})^{1+\varepsilon^9}.$$

Les nombres M et N vérifient:

$$M\leqslant xQ^{-1}x^{-4\varepsilon},\quad N\leqslant xQ^{-1}x^{-4\varepsilon}$$

et

$$MN^4\leqslant D^{\varepsilon}(DN'N''^{-1})^{1+\varepsilon^9}N^3\leqslant D^{\varepsilon}(DN'N''^{-1}N_1^3)^{1+\varepsilon^9}\leqslant x^3Q^{-3}x^{-4\varepsilon}.$$

Le lemme 4 conduit à

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}} R\big(q, (D)\big)^2\ll x^{2-\varepsilon/2}$$

ce qui permet, dans ce cas également, de retrouver la majoration (4).

3. *Cas particulier*: $1/2\leqslant\theta\leqslant 53/104-1000\varepsilon$. On suppose toujours qu'aucun produit partiel D' n'appartient à $[N', N'']$. Ce qui a été fait au paragraphe précédent peut être amélioré, en constatant qu'on a dans ce cas l'inégalite $N'^2<N''$, qui implique que le produit des D_i de (D), inférieurs à N' est lui-même inférieur à N'.

La relation $D < (N'')^5$ entraîne que deux D_i, au plus, sont supérieurs à N''. On a aussi $D_1 \leqslant D^{1/3}$, on applique le lemme 4 avec

$$M = D^{\varepsilon}(D_2 \dots D_r)^{1+\varepsilon^9} \leqslant D^{\varepsilon}(D^{1/3}N')^{1+\varepsilon^9} \quad \text{et} \quad N = D_1^{1+\varepsilon^9} \leqslant D^{(1+\varepsilon^9)/3}$$

pour obtenir la relation (4). Il suffit de regrouper les relations (1), (3) et (4) et de remplacer par la valeur de D, pour obtenir le théorème.

Bibliographie

[1] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, *Kloosterman sums and the Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70 (1982), p. 219–288.

[2] — — *On the Brun–Titchmarsh theorem on average*, Proc. János Bolyai Soc. Conf. (à paraître).

[3] E. Fouvry, *Repartition des suites dans les progressions arithmétiques*, Acta Arith. 41 (1982), p. 359–382.

[4] — *Autour du théorème de Bombieri–Vinogradov*, Acta Math. (à paraître).

[5] — *Répartition des suites dans les progressions arithmétiques*, Thèse de Doctorat d'état, Université de Bordeaux I, 1981.

[6] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press, London –New York 1974.

[7] D. R. Heath-Brown and H. Iwaniec, *On the difference between consecutive primes*, Inv. Math. 55 (1979), p. 44–69.

[8] H. Iwaniec, *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arith. 37 (1980), p. 307–320.

[9] — *On the Brun–Titchmarsh theorem and related questions*, Proc. of the Queen's Number Theory Conference, 1979, p. 67–78.

[10] — *On the Brun–Titchmarsh theorem*, J. Math. Soc. Japan 34 (1982), p. 95–123.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351 cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France

Reçu le 3.12.1982 (1331)

ACTA ARITHMETICA
XLIII (1984)

Reducibility of lacunary polynomials, V

by

A. Schinzel (Warszawa)

To Professor Paul Erdős on his 70-th birthday

The main subject of this paper are reciprocal factors of quadrinomials over $\boldsymbol{Q}$. For a quadrinomial

$$(1) \qquad q(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i x^{n_i}, \quad 0 < n_1 < n_2 < n_3, \ a_0a_1a_2a_3 \neq 0$$

with given coefficients a_i the question of non-reciprocal factors has been completely settled in [1] and the cyclotomic factors are easily determined by means of a theorem of Mann (cf. [5], Corollary 4). Some partial results about non-cyclotomic reciprocal factors have been obtained in [5]. In particular it has been proved there that if either $|a_0|+|a_3| \geqslant |a_1|+|a_2|$ or for some g, h: $0 \leqslant g, h \leqslant 3$

$$(2) \qquad a_g^2 \not\equiv a_h^2 \bmod \operatorname*{g.c.d.}_{0\leqslant j\leqslant 3} a_j \cdot \operatorname*{g.c.d.}_{j\neq g,h} a_j \quad \text{or} \quad |a_0| = |a_3|, \quad |a_1| = |a_2|$$

then either all reciprocal factors of $q(x)$ are cyclotomic or else there is a relation $\sum_{j=1}^{3} \gamma_j n_j = 0$ with γ_j integers satisfying

$$0 < \max_{1\leqslant j\leqslant 3} |\gamma_j| \leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant 3} \frac{\log |a_j|^2}{\log 2}.$$

The condition (2) is fulfilled by about 82% of all quadruples $\langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle$ with $|a_i| \leqslant a$ $(a \to \infty)$.

Now we shall show that for almost all quadruples $\langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle$ in the sense of density reciprocal factors do not exist. More exactly we shall prove

Theorem 1. *The number of integer quadruples $\langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle$ with $0 < |a_i| \leqslant a$ $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ for which $q(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i x^{n_i}$ has a reciprocal factor at least one triple $\langle n_1, n_2, n_3\rangle$ is $O(a^4/(\log a)^{3/4})$.*