[3] K. Mahler, *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus I*, J. Reine Angew. Math. 166 (1932), pp. 118–136.
[4] — *On a paper by A. Baker on the approximation of rational powers of e*, Acta Arith. 27 (1975), pp. 61–87.
[5] C. L. Siegel, *Transcendental numbers*, Annals of Math. Studies 16, Princeton 1949.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
IBARAKI UNIVERSITY
Mito, Ibaraki, Japan

Received on 26.4.1982
and in revised form on 20.12.1982 (1303)

ACTA ARITHMETICA
XLIII (1984)

Anwendung einer Summationsformel auf Dirichletsche Reihen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen

von

ULRICH HALBRITTER (Köln)

1. Einleitung. Bereits Dedekind [2] bewies für die klassischen Dedekindschen Summen

$$s(h,k) = \sum_{\mu \,(\mathrm{mod}\, k)} \left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)$$

mit $h, k \in \boldsymbol{N}$,

$$((x)) = \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2}, & x \notin \boldsymbol{Z}, \\ 0, & x \in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$$

die Gleichung

$$s(ph,k) + \sum_{m=0}^{p-1} s(h+mk, pk) = (p+1)s(h,k), \tag{1}$$

wobei p eine Primzahl ist. Diese Identität ist ein Spezialfall des Petersson–Knopp Theorems (¹) (Knopp [4]):

Für $h, k, n \in \boldsymbol{Z}$, $k > 0$, $n > 0$, $(h,k) = 1$ ist

$$\sum_{\substack{(a,d)\in \boldsymbol{N}^2 \\ a\cdot d = n}} \sum_{b \,(\mathrm{mod}\, d)} s(ah+bk, dk) = \Big(\sum_{\substack{m\in \boldsymbol{N} \\ m|n}} m\Big) s(h,k). \tag{2}$$

Parson und Rosen [5] bewiesen ein analoges Resultat für verallgemeinerte Dedekindsche Summen:

Setzt man $\bar{B}_r(x) = B_r(x-[x])$, $r \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, wobei $B_r(y)$ die durch

$$\frac{ze^{yz}}{e^z-1} = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(y)\frac{z^r}{r!}$$

(¹) Diese Bezeichnung stammt von Goldberg [3].

erklärten Bernoullischen Polynome sind, und definiert für $q, r \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant r \leqslant q+1$, $h, k \in \boldsymbol{Z}$, $k > 0$

$$c_r(h, k) = \sum_{\mu \,(\mathrm{mod}\, k)} \bar{B}_{q+1-r}\left(\frac{\mu}{k}\right) \bar{B}_r\left(\frac{h\mu}{k}\right), \tag{3}$$

so gilt das folgende

THEOREM ([5], S. 9). *Sei $q > 1$, $n \in \boldsymbol{N}$. Dann ist*

$$\sum_{\substack{(a,d)\in \boldsymbol{N}^2 \\ a\cdot d = n}} \sum_{b \,(\mathrm{mod}\, d)} d^{r-1} c_r(ah+bk, dk) = n^{r-q}\Big(\sum_{\substack{m \in \boldsymbol{N} \\ m|n}} m^q\Big) c_r(h, k). \tag{4}$$

Dieser Satz verallgemeinert ein Resultat von Carlitz [1].

Der Beweis von (2) und (4) wird mittels analytischer Methoden erbracht, welche den Zusammenhang der (verallgemeinerten) Dedekindschen Summen mit gewissen Lambertschen Reihen ausnutzen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nachzuweisen, daß (2) und (3) ein allgemeiner reihentheoretischer Satz zugrundeliegt, der eine Vielzahl analoger Formeln liefert. Gleichzeitig wird klar, daß die Identitäten (2) und (4) bei weitem nicht so tief liegen wie das Reziprozitätsgesetz für (verallgemeinerte) Dedekindsche Summen.

2. Ein reihentheoretischer Satz.

SATZ 1. *Sei $f\colon \boldsymbol{Z}^2 \to \boldsymbol{C}$ eine Funktion mit den Eigenschaften*

(a) *Für alle $K, L, M \in \boldsymbol{Z}$, $K\cdot M \neq 0$, konvergiert*

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(K\varkappa+L\mu, M\mu)\Big) = \lim_{R\to\infty}\sum_{\mu=-R}^{R}\Big(\lim_{S\to\infty}\sum_{\varkappa=-S}^{S} f(K\varkappa+L\mu, M\mu)\Big).$$

(b) *Bei festem $M \in \boldsymbol{Z}$ ist $\lim\limits_{K\to\pm\infty} f(K, M) = 0$.*

Dann gilt für $n \in \boldsymbol{N}$:

$$\sum_{\substack{(a,d)\in \boldsymbol{N}^2 \\ a\cdot d = n}} \sum_{\delta \,(\mathrm{mod}\, d)} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(d\varkappa+\delta\mu, a\mu)\Big) = \sum_{\substack{b\in \boldsymbol{N} \\ b|n}} b\cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(b\varkappa, b\mu)\Big). \tag{*}$$

ZUSATZ. (a) *und* (b) *sind erfüllt, falls* $\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(\varkappa, \mu)$ *absolut konvergiert.*

Beweis. Alle unendlichen Reihen sind im folgenden als symmetrische Reihen zu verstehen. Die in (*) implizit behauptete Unabhängigkeit der Summe über δ von dem speziellen Restsystem modulo d ist aufgrund der Voraussetzungen (a) und (b) gegeben, da gilt: für $a_j \in \boldsymbol{Z}$, $j = 1, 2, 3, 4$, $a_1 \neq 0$, ist

$$\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(a_1\varkappa + a_1 a_2 + a_3, a_4) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(a_1\varkappa + a_3, a_4). \tag{5}$$

Der Beweis von (*) soll nun durch Induktion über die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n geführt werden.

1. Sei $n = p^s$, p prim, $s \in \boldsymbol{N}$. Als erstes wird eine Hilfsgleichung bewiesen, die auch im Induktionsschritt wieder benötigt wird. Seien $a \in \boldsymbol{Z}$, $r \in \boldsymbol{N}$, $\mu \in \boldsymbol{Z}$ und

$$h(\mu) = \sum_{\delta(p^r)} \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(p^r\varkappa + \delta\mu, a\mu).\ ^{(2)}$$

Ist $(\mu, p) = 1$, so durchläuft mit δ auch $\delta\mu$ ein vollständiges Restsystem modulo p^r, und man erhält:

$$h(\mu) = \sum_{\delta(p^r)} \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(p^r\varkappa+\delta\mu, a\mu) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(\varkappa, a\mu) \quad \text{für } (\mu, p) = 1. \tag{6}$$

Ist $\mu = p\cdot\mu'$, $\mu' \in \boldsymbol{Z}$, so hat man ähnlich wie bei (5):

$$\begin{aligned} h(\mu) = h(p\mu') &= \sum_{\delta(p^r)} \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(p^r\varkappa + \delta p\mu', ap\mu') \\ &= \sum_{\delta(p^r)} \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f\big(p(p^{r-1}\varkappa + \delta\mu'), ap\mu'\big) \\ &= p\cdot \sum_{\delta(p^{r-1})} \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f\big(p(p^{r-1}\varkappa + \delta\mu'), ap\mu'\big). \end{aligned} \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt für $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(\varkappa, a\mu)\Big) - \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(\varkappa, ap\mu)\Big) + \\ &\qquad + p\cdot \sum_{\delta(p^{r-1})} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f\big(p(p^{r-1}\varkappa+\delta\mu), ap\mu\big)\Big) \\ &= \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ p\nmid\mu}}^{\infty} h(\mu) + \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ p|\mu}}^{\infty} h(\mu) = \sum_{\delta(p^r)} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(p^r\varkappa+\delta\mu, a\mu)\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

(2) Im folgenden wird abkürzend geschrieben:

$$\sum_{a(b)} := \sum_{a\,(\mathrm{mod}\, b)}; \quad \sum_{a\cdot d=n} := \sum_{\substack{(a,d)\in \boldsymbol{N}^2 \\ a\cdot d = n}}; \quad \sum_{b|n} := \sum_{\substack{b\in\boldsymbol{N} \\ b|n}}.$$

Durch Induktion über r folgert man:

$$\sum_{\delta(p^r)} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(p^r\varkappa + \delta\mu, a\mu)\Big) \tag{9}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{r} p^\nu \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(p^\nu\varkappa, ap^\nu\mu)\Big) - \sum_{\nu=1}^{r} p^{\nu-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(p^{\nu-1}\varkappa, ap^\nu\mu)\Big).$$

Dies ist die oben erwähnte Hilfsgleichung.

Man setze nun für $K, L, M \in \boldsymbol{Z}$, $K\cdot M \neq 0$,

$$S(K, L, M) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(K\varkappa + L\mu, M\mu)\Big). \tag{10}$$

Dann ist (9) gleichbedeutend mit

$$\sum_{\delta(p^r)} S(p^r, \delta, a) = \sum_{\nu=0}^{r} p^\nu S(p^\nu, 0, ap^\nu) - \sum_{\nu=1}^{r} p^{\nu-1} S(p^{\nu-1}, 0, ap^\nu). \tag{11}$$

Wendet man (11) mit $a = p^{s-r}$, $r = 0, \ldots, s$, an und summiert die resultierenden Gleichungen, so ergibt sich

$$\sum_{r=0}^{s} \sum_{\delta(p^r)} S(p^r, \delta, p^{s-r}) \tag{12}$$
$$= \sum_{r=0}^{s} \sum_{\nu=0}^{r} p^\nu S(p^\nu, 0, p^{s+\nu-r}) - \sum_{r=0}^{s} \sum_{\nu=1}^{r} p^{\nu-1} S(p^{\nu-1}, 0, p^{s+\nu-r})$$
$$= \sum_{\nu=0}^{s} p^\nu S(p^\nu, 0, p^\nu) + \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{\nu=0}^{r} p^\nu S(p^\nu, 0, p^{s+\nu-r}) -$$
$$- \sum_{r=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{r} p^{\nu-1} S(p^{\nu-1}, 0, p^{s+\nu-r}).$$

Mittels zweier Summationstransformationen erkennt man:

$$\sum_{r=0}^{s-1} \sum_{\nu=0}^{r} p^\nu S(p^\nu, 0, p^{s+\nu-r}) = \sum_{r=1}^{s} \sum_{\nu=0}^{r-1} p^\nu S(p^\nu, 0, p^{s+\nu-r+1}) \tag{13}$$
$$= \sum_{r=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{r} p^{\nu-1} S(p^{\nu-1}, 0, p^{s+\nu-r}).$$

Aus (12) und (13) folgt somit:

$$\sum_{r=0}^{s} \sum_{\delta(p^r)} S(p^r, \delta, p^{s-r}) = \sum_{\nu=0}^{s} p^\nu S(p^\nu, 0, p^\nu); \tag{14}$$

damit ist die Behauptung für $n = p^s$ bewiesen.

2. Sei nun $n = N\cdot q^t$, $N \in \boldsymbol{N}$, q prim, $t \geqslant 1$, $(N, q) = 1$. Sei

$$M_n = \{(a, d) \in \boldsymbol{N}^2 \colon a\cdot d = n\},$$
$$M_N = \{(a, d) \in \boldsymbol{N}^2 \colon a\cdot d = N\}.$$

Dann ist

$$M_n = \bigcup_{\lambda=0}^{t} \{(a\cdot q^{t-\lambda}, dq^\lambda) \colon (a, d) \in M_N\},$$

woraus man leicht schließt:

$$\sum_{a\cdot d=n} \sum_{\delta(d)} S(d, \delta, a) = \sum_{\lambda=0}^{t} \sum_{a\cdot d=N} \sum_{\delta(dq^\lambda)} S(d\cdot q^\lambda, \delta, q^{t-\lambda}a). \tag{15}$$

Sei nun $(a, d) \in \boldsymbol{N}^2$ mit $a\cdot d = N$. Wegen $(d, q) = 1$ durchläuft $\delta = \delta_1 d + \delta_2 q^\lambda$ ein vollständiges Restsystem modulo $d\cdot q^\lambda$, wenn δ_1 ein Restsystem modulo q^λ und δ_2 ein Restsystem modulo d durchlaufen. Aus (15) erhält man daher:

$$\sum_{a\cdot d=n} \sum_{\delta(d)} S(d, \delta, a) = \sum_{\lambda=0}^{t} \sum_{a\cdot d=N} \sum_{\delta_1(q^\lambda)} \sum_{\delta_2(d)} S(d\cdot q^\lambda, \delta_1 d + \delta_2 q^\lambda, q^{t-\lambda}a). \tag{16}$$

Sei nun für festes δ_2

$$g(\varkappa, \mu) = f(d\varkappa + \delta_2 q^\lambda\mu, q^{t-\lambda}a\mu).$$

Dann erfüllt auch g die Voraussetzungen von Satz 1, und Hilfsgleichung (9), angewandt auf g, liefert:

$$\sum_{\delta_1(q^\lambda)} S(d\cdot q^\lambda, \delta_1 d + \delta_2 q^\lambda, q^{t-\lambda}a) \tag{17}$$
$$= \sum_{\delta_1(q^\lambda)} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f\big(d(q^\lambda\varkappa + \delta_1\mu) + \delta_2 q^\lambda\mu, q^{t-\lambda}a\mu\big)\Big)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\lambda} q^\nu \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(dq^\nu\varkappa + \delta_2 q^{\lambda+\nu}\mu, q^{t+\nu-\lambda}a\mu)\Big) -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{\lambda} q^{\nu-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} f(dq^{\nu-1}\varkappa + \delta_2 q^{\lambda+\nu}\mu, q^{t+\nu-\lambda}a\mu)\Big)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\lambda} q^\nu S(dq^\nu, \delta_2 q^{\lambda+\nu}, q^{t+\nu-\lambda}a) - \sum_{\nu=1}^{\lambda} q^{\nu-1} S(dq^{\nu-1}, \delta_2 q^{\lambda+\nu}, q^{t+\nu-\lambda}a).$$

Man beachte nun

$$\sum_{\delta_2(d)} S(d\cdot q^\nu, \delta_2 q^{\lambda+\nu}, q^{t+\nu-\lambda}a) = \sum_{\delta_2(d)} S(d\cdot q^\nu, \delta_2 q^\nu, q^{t+\nu-\lambda}a), \tag{18}$$

$$(19)\qquad \sum_{\delta_2(d)} S(dq^{\nu-1}, \delta_2 q^{\lambda+\nu}, q^{t+\nu-\lambda}a) = \sum_{\delta_2(d)} S(dq^{\nu-1}, \delta_2 q^{\nu-1}, q^{t+\nu-\lambda}a).$$

(18) und (19) erhält man sofort mittels der Reihendarstellung von S und (5), wenn man berücksichtigt, daß mit δ_2 auch $\delta_2\cdot q^\lambda$ bzw. $\delta_2\cdot q^{\lambda+1}$ ein vollständiges Restsystem modulo d durchläuft. Aus (16), (17), (18) und (19) folgt:

$$(20)\qquad \sum_{a\cdot d=n}\sum_{\delta(d)} S(d, \delta, a)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{t}\sum_{a\cdot d=N}\sum_{\delta_2(d)}\Big\{\sum_{\nu=0}^{\lambda} q^\nu S(dq^\nu, \delta_2 q^\nu, q^{t+\nu-\lambda}a) - $$

$$- \sum_{\nu=1}^{\lambda} q^{\nu-1} S(dq^{\nu-1}, \delta_2 q^{\nu-1}, q^{t+\nu-\lambda}a)\Big\}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{t}\Big\{\sum_{\nu=0}^{\lambda} q^\nu \Big[\sum_{a\cdot d=N}\sum_{\delta_2(d)} S(dq^\nu, \delta_2 q^\nu, q^{t+\nu-\lambda}a)\Big] -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\lambda} q^{\nu-1}\Big[\sum_{a\cdot d=N}\sum_{\delta_2(d)} S(dq^{\nu-1}, \delta_2 q^{\nu-1}, q^{t+\nu-\lambda}a)\Big]\Big\}.$$

Auf die Summen in eckigen Klammern wird nun die Induktionsvoraussetzung angewandt. Man erhält:

$$(21)\qquad \sum_{a\cdot d=N}\sum_{\delta_2(d)} S(dq^\nu, \delta_2 q^\nu, q^{t+\nu-\lambda}a) = \sum_{b|N} b\cdot S(bq^\nu, 0, b\cdot q^{t+\nu-\lambda}),$$

$$(22)\qquad \sum_{a\cdot d=N}\sum_{\delta_2(d)} S(dq^{\nu-1}, \delta_2 q^{\nu-1}, q^{t+\nu-\lambda}a) = \sum_{b|N} b\cdot S(bq^{\nu-1}, 0, q^{t+\nu-\lambda}).$$

(20) geht mittels (21) und (22) über in

$$(23)\qquad \sum_{a\cdot d=n}\sum_{\delta(d)} S(d, \delta, a)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{t}\Big\{\sum_{\nu=0}^{\lambda} q^\nu \sum_{b|N} b\cdot S(bq^\nu, 0, bq^{t+\nu-\lambda}) - \sum_{\nu=1}^{\lambda} q^{\nu-1}\sum_{b|N} b\cdot S(bq^{\nu-1}, 0, bq^{t+\nu-\lambda})\Big\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{t} q^\nu \sum_{b|N} b\cdot S(bq^\nu, 0, bq^\nu) + \sum_{\lambda=0}^{t-1}\sum_{\nu=0}^{\lambda} q^\nu \sum_{b|N} b\cdot S(bq^\nu, 0, bq^{t+\nu-\lambda}) -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{t}\sum_{\nu=1}^{\lambda} q^{\nu-1}\sum_{b|N} b\cdot S(bq^{\nu-1}, 0, bq^{t+\nu-\lambda}).$$

Wie bei (13) erkennt man, daß sich die beiden letzten Doppelsummen gegenseitig aufheben; unter Berücksichtigung von

$$(24)\qquad \sum_{\nu=0}^{t} q^\nu \sum_{b|N} b\cdot S(bq^\nu, 0, bq^\nu) = \sum_{b|n} b\cdot S(b, 0, b)$$

folgt die Behauptung.

3. Anwendung. Eine Verallgemeinerung der Ergebnisse aus [4] und [5] liefert

SATZ 2. *Seien* $r, s \in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$, $h, k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, u, $v \in \boldsymbol{R}$. *Sei*

$$\tilde{B}_R(x) = \begin{cases}\bar{B}_R(x), & R \in \boldsymbol{N}\cup\{0\},\ R \neq 1,\\ ((x)), & R = 1.\end{cases}$$

Dann gilt

$$(25)\qquad n^{-r}\sum_{\substack{(a,d)\in \boldsymbol{N}^2\\ a\cdot d=n}} d^{r-1}\sum_{\delta\,(\mathrm{mod}\, d)}\Big\{\sum_{\sigma\,(\mathrm{mod}\, dk)} \tilde{B}_s\Big(\frac{du+\sigma}{dk}\Big)\times$$

$$\times \tilde{B}_r\Big(\delta u + av - (du+\sigma)\frac{ah+\delta k}{dk}\Big)\Big\}$$

$$= \sum_{\substack{b\in \boldsymbol{N}\\ b|n}} b^{-(r+s)+1}\Big\{\sum_{\sigma\,(\mathrm{mod}\, k)} \tilde{B}_s\Big(\frac{bu+\sigma}{k}\Big)\tilde{B}_r\Big(bv-(bu+\sigma)\frac{h}{k}\Big)\Big\}.$$

ZUSATZ. *Satz 2 bleibt richtig, wenn man für alle* $(R, x) \in (\boldsymbol{N}\cup\{0\})\times \boldsymbol{R}$ *setzt:*

$$\tilde{B}_R(x) = \bar{B}_R(x).$$

Beweis. Es wird nur der Fall $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$ behandelt. Für $r = 0$ oder $s = 0$ erhält man (25) aus dem Fall $r = s = 1$ durch Differentiation nach v bzw. u, wobei die Unstetigkeit von $\tilde{B}_1(x)$ bei $x \in \boldsymbol{Z}$ zu beachten ist. Sei im folgenden χ: $\boldsymbol{C}\to\{0, 1\}$ mit

$$\chi(z) = \begin{cases}1, & z \neq 0,\\ 0, & z = 0.\end{cases}$$

Als erstes soll die Identität

$$(26)\qquad \frac{1}{|K|}\sum_{\sigma(K)} \tilde{B}_s\Big(\frac{u+\sigma}{K}\Big)\tilde{B}_r\Big(v-(u+\sigma)\frac{H}{K}\Big)$$

$$= \frac{r!s!}{(2\pi i)^{r+s}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(u\varkappa+v\mu)}\chi(\mu)\chi(K\varkappa+H\mu)\frac{1}{\mu^r(K\varkappa+H\mu)^s}\Big)$$

für $H, K \in \boldsymbol{Z}$, $K \neq 0$, bewiesen werden. Diese Darstellung wird z.B. von Siegel [6] benutzt. Für $s \geqslant 1$ hat man bei festem $\mu \in \boldsymbol{Z}$ mittels der Fourierreihe von $\tilde{B}_s$ bei symmetrischer Summation

$$\begin{aligned}(27)\qquad \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i u\varkappa}\chi(K\varkappa+H\mu)\frac{1}{(K\varkappa+H\mu)^s} &= \sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|K|}\sum_{\sigma(K)} e^{2\pi i\frac{u+\sigma}{K}\varkappa}\chi(\varkappa+H\mu)\frac{1}{(\varkappa+H\mu)^s}\\ &= \frac{1}{|K|}\sum_{\sigma(K)}\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\frac{u+\sigma}{K}(\varkappa-H\mu)}\frac{\chi(\varkappa)}{\varkappa^s}\\ &= -\frac{(2\pi i)^s}{s!}\frac{1}{|K|}\sum_{\sigma(K)} e^{-2\pi i(u+\sigma)\frac{H}{K}\mu}\tilde{B}_s\left(\frac{u+\sigma}{K}\right).\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle $\mu \in \boldsymbol{Z}$. Multiplikation mit $e^{2\pi i v\mu}\dfrac{\chi(\mu)}{\mu^r}$ und anschließende symmetrische Summation über $\mu \in \boldsymbol{Z}$ ergeben (26). Man wende nun Satz 1 mit

$$f(\varkappa, \mu) = e^{2\pi i(u\varkappa+v\mu)}\chi(\mu)\chi(k\varkappa+h\mu)\frac{1}{\mu^r(k\varkappa+h\mu)^s}$$

an. Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt, wie beim Beweis von (26) gezeigt wurde. Man erhält

$$\begin{aligned}(28)\qquad \sum_{a\cdot d=n}\sum_{\delta(d)}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}&\left(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(u(d\varkappa+\delta\mu)+va\mu)}\frac{\chi(a\mu)\chi\big(k(d\varkappa+\delta\mu)+ha\mu\big)}{(a\mu)^r\big(k(d\varkappa+\delta\mu)+ha\mu\big)^s}\right)\\ &= \sum_{b|n} b\cdot\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i b(u\varkappa+v\mu)}\frac{\chi(b\mu)\chi\big(b(k\varkappa+h\mu)\big)}{(b\mu)^r\big(b(k\varkappa+h\mu)\big)^s}\right)\\ &= \sum_{b|n} b^{-(r+s)+1}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\varkappa=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i b(u\varkappa+v\mu)}\frac{\chi(\mu)\chi(k\varkappa+h\mu)}{\mu^r(k\varkappa+h\mu)^s}\right).\end{aligned}$$

Aus (26) und (28) folgt die Behauptung. Wegen des Zusatzes vergleiche man Bemerkung 3(b).

Bemerkung 3. (a) Das Resultat aus [4] erhält man für $u = v = 0$, $r = s = 1$, das Resultat aus [5] für $u = v = 0$, $(r, s) \neq (1, 1)$.

(b) Seien

$$g(r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_m}{|m|^r}, \qquad h(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{b_m}{|m|^s}, \qquad r \in \boldsymbol{C}, s \in \boldsymbol{C},$$

für $\operatorname{Re} r > c_g$, $\operatorname{Re} s > c_h$ absolut konvergente Dirichletreihen, wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß $m = 0$ bei der Summation auszulassen ist. Dann sind für $\operatorname{Re} r > c_g$, $\operatorname{Re} s > c_h$ auch

$$g(r, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m \frac{e^{2\pi i m x}}{|m|^r}, \qquad h(s, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' b_m \frac{e^{2\pi i m x}}{|m|^s}$$

absolut konvergent. Seien nun $h, k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, $u, v \in \boldsymbol{R}$. Für alle $\lambda \in \boldsymbol{N}$ mit $\lambda | n$ gelte für alle $m \in \boldsymbol{Z}$:

$$a_{\lambda m} = a_m, \qquad b_{\lambda m} = b_m \text{ (3)}.$$

Wie in Satz 2 erhält man mit

$$f(\varkappa, \mu) = e^{2\pi i(u\varkappa+v\mu)}\chi(\mu)\chi(k\varkappa+h\mu)\frac{a_\mu b_{k\varkappa+h\mu}}{|\mu|^r|k\varkappa+h\mu|^s}:$$

$$\begin{aligned}(29)\qquad n^{-r}\sum_{a\cdot d=n} d^{r-1}\sum_{\delta(d)}&\left\{\sum_{\sigma(dk)} h\left(s, \frac{du+\sigma}{dk}\right) g\left(r, \delta u+av-(du+\sigma)\frac{ah+\delta k}{dk}\right)\right\}\\ &= \sum_{b|n} b^{-(r+s)+1}\sum_{\sigma(k)} h\left(s, \frac{bu+\sigma}{k}\right) g\left(r, bv-(bu+\sigma)\frac{h}{k}\right).\end{aligned}$$

Analytische Fortsetzung in r und s bei festen u, v, h, k, n liefert die Gültigkeit der Identität (29) in gewissen maximalen Gebieten des komplexen (r, s)-Raumes. Diese Gebiete hängen von der Fortsetzbarkeit der eingehenden Dirichletreihen ab.

Setzt man für komplexes t mit $\operatorname{Re} t > 1$

$$g(t) = h(t) = -\frac{\Gamma(t+1)}{(2\pi)^t}\left(\cos\frac{\pi}{2}t\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{|m|^t} - i\sin\frac{\pi}{2}t\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\operatorname{sign} m}{|m|^t}\right),$$

so erhält man

$$\begin{aligned}(30)\qquad \hat{B}_t(x) := g(t, x) = h(t, x)\\ &= -\frac{\Gamma(t+1)}{(2\pi)^t}\left(\cos\frac{\pi}{2}t\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi i m x}}{|m|^t} - i\sin\frac{\pi}{2}t\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\operatorname{sign} m\frac{e^{2\pi i m x}}{|m|^t}\right)\\ &= -2\frac{\Gamma(t+1)}{(2\pi)^t}\left(\cos\frac{\pi}{2}t\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi m x}{m^t} + \sin\frac{\pi}{2}t\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi m x}{m^t}\right).\end{aligned}$$

(3) Läßt man diese Bedingung fallen, so erhält man eine Verallgemeinerung von (29). Die resultierende Gleichung ist jedoch komplizierter.

Die Funktionalgleichung der Hurwitzschen Zetafunktion lehrt

$$\hat{B}_t(x) = \begin{cases} -\zeta(1-t, x-[x])\cdot t, & x \notin \mathbf{Z}, \\ -\zeta(1-t, 1)\cdot t, & x \in \mathbf{Z}; \end{cases} \tag{31}$$

(31) zeigt, daß die Funktionen $\hat{B}_t(x)$ bei festem $x \in \mathbf{R}$ holomorphe Funktionen von t sind. Ist $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, so gilt: $\hat{B}_t(x) = \bar{B}_t(x)$, falls $(t, x) \neq (1, n)$ mit $n \in \mathbf{Z}$; für $(t, x) = (1, n)$ mit $n \in \mathbf{Z}$ ist $\hat{B}_1(n) = \frac{1}{2} = \bar{B}_1(n) + \frac{1}{2} = \bar{B}_1(n) + 1$. Aus (29) folgert man nun mittels analytischer Fortsetzung, daß Satz 2 einschließlich des Zusatzes für alle $(r, s) \in \mathbf{C}$ richtig ist, wenn man $\hat{B}_t(x)$ gemäß (31) definiert und in Satz 2 $\bar{B}_t$ durch $\hat{B}_t$ ersetzt. Die Restriktion $(r, s) \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^2$ ist somit überflüssig. Interessante weitere Identitäten ergeben sich auch, wenn man auf beiden Seiten von (25) bzw. (29) die Laurententwicklung

$$\zeta(t, y) = \frac{1}{t-1} - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} + O(t-1)$$

hinzuzieht und die Koeffizienten der Laurententwicklungen der Produkte auf beiden Seiten vergleicht.

(c) Zum Abschluß seien noch einige andere Anwendungsmöglichkeiten von Satz 1 angegeben:

$$f(\varkappa, \mu) = \begin{cases} a_\varkappa x^\varkappa b_\mu y^\mu, & \varkappa \geqslant 0, \mu \geqslant 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $\sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa x^\varkappa$, $\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu y^\mu$ absolut konvergente Potenzreihen sind.

$$f(\varkappa, \mu) = e^{-\alpha(\varkappa+u)^2 - \beta(\mu+v)^2 + 2\pi i(\gamma\varkappa + \delta\mu)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, u, v, \gamma, \delta \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Dies führt zu einer Identität zwischen Thetareihen, aus der man auf üblichem Wege durch Grenzübergang eine Identität zwischen zweifachen Gauss'schen Summen ableiten kann.

(3) Seien α, β ganzalgebraische Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers K. Sei $N \in \mathbf{N}$,

$$f(\varkappa, \mu) := \begin{cases} 1 & (\varkappa\alpha, \mu\beta) \text{ Basis eines Ideals } \mathfrak{a}(\varkappa, \mu) \text{ von } K \text{ mit} \\ & \text{Norm}\big(\mathfrak{a}(\varkappa, \mu)\big) \leqslant N; \text{ für alle } (\varkappa', \mu') \in \mathbf{Z}^2 \text{ mit } \varkappa'^2 + \mu'^2 \\ & < \varkappa^2 + \mu^2 \text{ ist } \mathfrak{a}(\varkappa, \mu) \neq \mathfrak{a}(\varkappa', \mu'), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies führt zu einer Anzahlformel für Ideale.

Die Liste der Anwendungen läßt sich aufgrund der Allgemeinheit von Satz 1 leicht verlängern.

Literaturverzeichnis

[1] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. 3 (1953), S. 513–522.

[2] R. Dedekind, *Erläuterungen zu den Riemannschen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Funktionen*, Gesammelte Math. Werke 1, Braunschweig 1930, S. 159–173.

[3] L. Goldberg, *An elementary proof of the Petersson–Knopp theorem on Dedekind sums*, J. Number Theory 12 (1980), S. 541–542.

[4] M. Knopp, *Hecke operators and an identity for the Dedekind sums*, ibid. 12 (1980), S. 2–9.

[5] L. Parson and K. Rosen, *Hecke operators and Lambert series*, Math. Scand. 49 (1981), S. 5–14.

[6] C. L. Siegel, *Zur Summation von L-Reihen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 2, 18 (1975), S. 1–24.

Eingegangen am 4.5.1982 (1304)