$$
\begin{aligned}
&+2^5\cdot 3^4\cdot 1277\cdot 5381\cdot 2167073948705441)\gamma_2 X^{10}+\\
&+(2\cdot 23\cdot 337\cdot 349\cdot 275460839j^2-2^2\cdot 3^3\cdot 167\cdot 535181625114346 01j+\\
&+2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11\cdot 61\cdot 131\cdot 6899\cdot 10997335316479)\gamma_3 X^9+\\
&+(11\cdot 5368675003963j^2-2^3\cdot 7^2\cdot 19\cdot 3643\cdot 25749906918721j+\\
&+2^3\cdot 3\cdot 7^2\cdot 89\cdot 271\cdot 4373\cdot 85256818141241)\gamma_2^2 X^8+\\
&+(3\cdot 73\cdot 499\cdot 13673809j^2-2\cdot 643\cdot 2639560606919 9363j+\\
&+2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 29347\cdot 829722971017 90639)\gamma_2\gamma_3 X^7+\\
&+(3^3\cdot 14731\cdot 61871j^3+2^2\cdot 1187\cdot 8731\cdot 11621\cdot 12642131j^2+\\
&+2\cdot 3^3\cdot 19\cdot 11423\cdot 246163423991809 43j-\\
&-2^3\cdot 3^3\cdot 7\cdot 1049\cdot 1523\cdot 145854434360054471)X^6+(3\cdot 17\cdot 5208887j^2-\\
&-2\cdot 3\cdot 7\cdot 48541\cdot 624277524 79j+\\
&+2^2\cdot 3\cdot 5^4\cdot 7\cdot 47\cdot 10663\cdot 81359\cdot 7127629)\gamma_2^2\gamma_3 X^5+(7\cdot 491\cdot 541j^3+\\
&+2^3\cdot 7\cdot 23\cdot 401\cdot 1303578893j^2+2\cdot 17\cdot 3538604097140411881j+\\
&+2^4\cdot 101\cdot 467\cdot 35638413364347 7909)\gamma_2 X^4+(2\cdot 5\cdot 811j^3-\\
&-2^2\cdot 3\cdot 29\cdot 31\cdot 1409\cdot 54767j^2+2\cdot 5\cdot 11\cdot 37\cdot 311\cdot 503\cdot 127147711j-\\
&-2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 30661\cdot 88193886243583)\gamma_3 X^3+(2^2\cdot 5j^3+2^3\cdot 3457\cdot 4723j^2+\\
&+1052497850681j+2^2\cdot 3\cdot 32422914953993)\gamma_2^2 X^2\}+(j^3-2\cdot 5\cdot 199j^2+\\
&+13^2\cdot 5381j-2\cdot 28003499)\gamma_2\gamma_3 X-47=0.
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] J. A. Antoniadis, *Über die Kennzeichnung zweiklassiger imaginär-quadratischer Zahlkörper durch Lösungen diophantischer Gleichungen*, Erscheint demnächst in Crelle's Journal.

[2] M. Deuring, *Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation*, Enzykl. der Math. Wissensch. Bd. I, Teil 2 C, Teubner, Stuttgart 1958, S. 1–15.

[3] M. A. Kenku, *The modular curves $X_0(65)$ and $X_0(91)$ and rational isogeny*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), S. 15–20.

[4] — *The modular curve $X_0(169)$ and rational isogeny*, J. London Math. Soc. (2) 22 (1980), S. 239–244.

[5] L. Kiepert, *Über Theilung und Transformation der elliptischen Funktionen*, Math. Ann. 26 (1886), S. 369–454.

[6] F. Klein, *Über Multiplikatorgleichungen*, ibid. 15 (1879), S. 86–88.

[7] — *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*, Vorlesungen Göttingen SS 1896, Teubner 1907, S. 60–68.

[8] C. Meyer, *Imaginäre bizyklische biquadratische Zahlkörper als Klassenkörper*, Sympos. Math. 15 (1975), S. 365–387.

[9] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. 3, 2. Auflage, Braunschweig Vieweg 1908, S. 248–256.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT TESSALONIKI
Griechenland

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Weyertal 86-90
5000 Köln 41, BRD

Eingegangen am 5.4.1982 (1298)

ACTA ARITHMETICA
XLIII (1984)

Sur le prolongement des fonctions ζ associées a un système de nombres premiers généralisés de Beurling

par

J.-P. Borel (Limoges)

Soit $\mathscr{P}=\{p_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ un système de nombres premiers généralisés de Beurling (ou G.P.S.), c'est-à-dire une suite de nombres réels tels que:

$$1<p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_i\leqslant\ldots\quad\text{et}\quad\lim_{i\to\infty}p_i=+\infty.$$

Soit $\mathscr{N}$ le semi-groupe multiplicatif libre engendré par $\mathscr{P}$. On définit alors la fonction ζ associée à $\mathscr{P}$ par :

$$\zeta(s)=\zeta_{\mathscr{P}}(s)=\sum_{b\in\mathscr{N}}b^{-s}=\prod_{p\in\mathscr{P}}(1-p^{-s})^{-1}.$$

Si $\mathscr{P}=\boldsymbol{P}$ est l'ensemble des nombres premiers usuels, la fonction $\zeta_{\boldsymbol{P}}$ est la fonction ζ de Riemann. Nous dirons que $\mathscr{P}\in$ T.N.P. is $\mathscr{P}$ vérifie le théorème des nombres premiers, c'est-à-dire :

$$\pi(x)=\pi_{\mathscr{P}}(x)=\sum_{p_i\leqslant x}1=\frac{x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Si $\mathscr{P}\in$ T.N.P., $\zeta_{\mathscr{P}}$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s)>1$ et non nulle sur ce domaine, le produit eulerien étant convergent. Le problème du prolongement analytique de $\zeta_{\mathscr{P}}$ à gauche de la droite $\mathrm{Re}(s)=1$ est intéressant : il est bien connu que le reste $\pi_{\boldsymbol{P}}(x)-\mathrm{Li}(x)$ (1) est lie aux zéros de $\zeta_{\boldsymbol{P}}$ dans le domaine $1/2<\mathrm{Re}(s)<1$. $\zeta_{\boldsymbol{P}}$ a un prolongement méromorphe sur $\boldsymbol{C}$, mais on sait construire $\mathscr{P}_0\in$ T.N.P. tel que $\zeta_{\mathscr{P}_0}$ n'a pas de prolongement à gauche de la droite $\mathrm{Re}(s)=1$ (Ryavec [3]). Cela indique que le prolongement de ζ peut être très divers. C'est ce que nous allons préciser, en nous intéressant aux domaines complexes sur lesquels ζ se prolonge, et aux zéros et pôles de ce prolongement.

(1) On rappelle que $\mathrm{Li}(x)=\mathrm{v.p.}\left(\int_0^x\frac{dt}{\log t}\right)=\int_e^x\frac{dt}{\log t}+C.$

1. Quelques rappels et résultat principal

1.1. Soit Δ le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$. Soit U' un ouvert de Δ, f une fonction méromorphe sur U'. Un ouvert simplement connexe U sera dit *f-maximal* si:

– $U' \subset U \subset \Delta$, et f admet un prolongement méromorphe sur U;

– si f a un prolongement méromorphe sur un ouvert simplement connexe U'' tel que $U \subset U'' \subset \Delta$, alors $U'' = U$.

Soit $\mathscr{D}$ le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$, et $\mathscr{B}$ la bande $0 < \operatorname{Re}(s) \leqslant 1$. Si $U \subset \mathscr{B}$ et $U \cup \mathscr{D}$ est f-maximal, où f est une fonction holomorphe non nulle sur $\mathscr{D}$, nous noterons $E(f, U)$ l'ensemble des couples (s, n), où l'élément s de $U \cap \mathring{\mathscr{B}}$ est zéro ou pôle du prolongement de f à $U \cup \mathscr{D}$, et $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ l'ordre de ce zéro, ou l'opposé de l'ordre du pôle.

1.2. Si $\mathscr{P} \in$ T.N.P., on pose: $\Pi_{\mathscr{P}}(x) = \Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n})$, somme finie en réalité puisque $\pi(x)$ est nul si $1 \leqslant x \leqslant p_1$. Donc $\Pi(x)$ est nul pour $1 \leqslant x < p_1$, et l'hypothèse $\mathscr{P} \in$ T.N.P. entraîne:

$$\Pi(x) = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \pi(x^{1/n}) = \pi(x) + o(x^{1/2}).$$

La fonction Π joue un rôle important à cause de la relation:

$$\log\zeta(s) = \int_1^{\infty} x^{-s} d\Pi(x) = s\int_1^{\infty} x^{-s} \frac{\Pi(x)}{x}\, dx \quad \text{si} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

(voir par exemple [2]).

D'autre part, si

$$\mu(x) = \int_1^x \frac{1-t^{-1}}{\log t}\, dt = \operatorname{Li}(x) - \log\log x + C,$$

on a:

$$\log\frac{s}{s-1} = \int_1^{\infty} x^{-s} d\mu(x)$$

intégrale absolument convergente pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. D'où la relation pour $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\log\left(\frac{s-1}{s}\,\zeta(s)\right) = s\int_1^{x} x^{-s} \frac{\Pi(x) - \operatorname{Li}(x)}{x}\, dx + s\int_1^{\infty} x^{-s} \frac{\Pi(x) - \pi(x)}{x}\, dx + $$
$$+ s\int_1^{\infty} x^{-s} \frac{\log\log x - C}{x}\, dx$$

où les $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ intégrales convergent absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ et $\operatorname{Re}(s) > 0$ respectivement. Cette relation met en évidence le rapport entre le problème du prolongement analytique de $\log\zeta$ (c'est-à-dire celui du prolongement de ζ et des zéros et pôles de ζ) pour $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ et le terme reste $\pi(x) - \operatorname{Li}(x)$.

1.3. Quelques résultats sont déjà connus:

1. L'hypothèse de Riemann est fausse pour les G.P.S. appartenant à T.N.P.: Diamond a trouvé dans [1] de tels G.P.S. tels que ζ ait un prolongement méromorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1/2$, avec un seul pôle, simple et en $s = 1$, et un seul zéro, simple et en $s = 1-\alpha$, α étant un nombre fixé quelconque, tel que $0 < \alpha < 1/2$.

2. Ryavec a construit un G.P.S. $\mathscr{P} \in$ T.N.P. tel que $\mathscr{D}$ soit un domaine $\zeta_{\mathscr{P}}$-maximal.

3. On sait aussi (Ryavec, [4]) que l'équation fonctionnelle est particulière au cas $\mathscr{P} = \boldsymbol{P}$.

1.4. Nous allons établir le:

THÉORÈME 1. *Soit g une fonction quelconque sur $[e, \infty[$, réelle, bornée, localement intégrable, et telle que:*

(H1) $$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Soit $G(s) = \exp\left(\int_e^{\infty} x^{-s} \frac{1+g(x)}{\log x} dx\right)$. *Alors G est holomorphe sur $\mathscr{D}$, et il existe $\mathscr{P} \in$ T.N.P. tel que:*

(a) *si U est une partie de $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{D} \cup U$ soit ouvert connexe, $\mathscr{D} \cup U$ est $\zeta_{\mathscr{P}}$-maximal si et seulement si il est G-maximal,*

(b) *les zéros et les pôles de $\zeta_{\mathscr{P}}$ et G sur un tel $\mathscr{D} \cup U$ sont les mêmes, avec même multiplicité.*

Nous en déduirons des résultats très généraux, contenant les résultats 1.3.1 et 1.3.2.

2. Lemmes préliminaires. Le premier de ces lemmes consiste à construire $\mathscr{P}$ tel que $\pi(x)$ soit une fonction donnée, avec un terme d'erreur assez petit:

LEMME 1. *Soit f une fonction sur $[1, \infty[$, réelle, continue, croissante vers $+\infty$ pour x assez grand. Alors il existe un* G.P.S. *$\mathscr{P}$ tel que:*

$$\begin{cases} \pi(x) = f(x) + O(1), \\ p_1 \geqslant e. \end{cases}$$

D'après les hypothèses faites, sur f, il existe $x_0 \geqslant e$ tel que f soit croissante et positive sur $[x_0, +\infty[$. On pose alors, pour $i \in \boldsymbol{N}^*$, $p_i =$

$= f^{-1}(i+f(x_0))$. Alors la suite des p_i est croissante, avec $p_1 \geqslant x_0 \geqslant e$, et:

$$\pi(x) = \sum_{p_i \leqslant x} 1 = \sum_{i+f(x_0) \leqslant f(x)} 1 = [f(x)-f(x_0)] = f(x)+O(1). \ \blacksquare$$

Soit f une fonction définie sur $[1, \infty[$ et nulle sur $[1, a]$, avec $a > 1$. On pose alors:

$$Mf(x) = \sum \frac{1}{n} f(x^{1/n}) \quad \text{et} \quad \overline{M}f(x) = \sum \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n})$$

où μ est la fonction de Möbius, et la somme porte sur $n \in \boldsymbol{N}^*$, somme finie en réalité puisque $f(x^{1/n})$ est nul pour n assez grand.

Lemme 2. *Si f est définie sur $[1, \infty[$ et nulle sur $[1, a]$, il en est de même pour Mf, et on a:*

$$\overline{M}Mf = f \quad \text{et} \quad M\overline{M}f = f.$$

Toutes les séries considérées étant finies, on peut permutter les sommations, d'où :

$$\overline{M}Mf(x) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} \sum_m \frac{1}{m} f(x^{1/mn}) = \sum_{n,m} \frac{\mu(n)}{mn} f(x^{1/mn})$$
$$= \sum_k f(x^{1/k}) \sum_{d|k} \mu(d) = f(x)$$

et de même pour $M\overline{M}f$. $\blacksquare$

(Ces deux lemmes sont très classiques. Leurs démonstrations sont présentées ici dans le but de rendre complète la démonstration du théorème 1.)

Lemme 3. *Soit $\mathscr{P}$ un* G.P.S. *tel que $p_1 \geqslant e$ et*

$$\Pi(x) = \int_e^x \frac{1+g(t)}{\log t} dt + O(x^\varepsilon) \quad \textit{pour tout } \varepsilon > 0,$$

g vérifiant les hypothèses du théorème 1. *Alors $\mathscr{P}$ vérifie les conclusions du théorème* 1.

Soit Π^* la fonction définie par :

$$\Pi^*(x) = \begin{cases} \int_e^x \frac{1+g(t)}{\log t} dt & \text{si} \quad x \geqslant e, \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant e. \end{cases}$$

Posons $f(x) = \Pi(x) - \Pi^*(x)$. Alors si $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\frac{\zeta(s)}{G(s)} = \exp\left(\int_1^\infty x^{-s} df(x)\right) = \exp\left(s \int_1^\infty x^{-s} \frac{f(x)}{x} dx\right).$$

Or l'intégrale $\int_1^\infty x^{-s} \frac{f(x)}{x} dx$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, puisque f est nulle sur $[0, e]$ et que $f(x) = O(x^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc ζ/G a un prolongement holomorphe non nul sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. Cela entraîne immédiatement les résultats (a) et (b) du théorème 1.

D'autre part, comme g vérifie l'hypothèse (H1), on a:

$$\Pi^*(x) = \int_e^x \frac{1}{\log t} dt + o\left(\int_e^x \frac{1}{\log t} dt\right) = \mathrm{Li}(x) + o(\mathrm{Li}(x))$$

ce qui entraîne: $\Pi(x) = \mathrm{Li}(x) + o(\mathrm{Li}(x))$ et $\mathscr{P} \in$ T.N.P. $\blacksquare$

3. Fin de la démonstration du théorème 1. Soit $\pi^* = \overline{M}\Pi^*$. Π^* étant continue, il en est de même pour π^*. Nous allons montrer que, puisque $\overline{\lim_{x\to\infty}} g(x) < 1$, la fonction π^* est croissante pour x assez grand. En effet, Π^* est dérivable sauf en $x = e$, donc π^* est dérivable au point x si x n'est pas de la forme e^n, $n \in \boldsymbol{N}^*$. Et en un tel point:

$$\pi^{*\prime}(x) = \sum{}^* \frac{\mu(n)}{n} \frac{1}{n^2} \frac{x^{1/n}}{x} \frac{1+g(x^{1/n})}{\frac{1}{n}\log x}$$
$$= \frac{1}{\log x}\left(1+g(x) + \sum_{n\geqslant 2}{}^* \frac{\mu(n)}{n} \frac{1+g(x^{1/n})}{x^{1-1/n}}\right)$$

où $\sum^*$ signifie la sommation pour $n \leqslant [\log x]$. Donc, g étant bornée:

$$\sum_{n\geqslant 2}{}^* \frac{\mu(n)}{n} \frac{1+g(x^{1/n})}{x^{1-1/n}} = O(x^{-1/2}\log x)$$

et:

$$\pi^{*\prime}(x) = \frac{1}{\log x}\left(1+g(x)+O(x^{-1/2}\log x)\right) \text{ est positif pour } x \text{ assez grand.}$$

On peut donc appliquer le lemme 1 avec $f = \pi^*$, ce qui entraîne l'existence d'un G.P.S. $\mathscr{P}$ tel que $\pi(x) - \pi^*(x) = O(1)$, et $p_1 \geqslant e$. Alors:

$$\Pi(x) = M\pi(x) = M\pi^*(x) + O\left(\sum_{n \leqslant \log x} \frac{1}{n}\right) \quad \text{car} \quad p_1 \geqslant e,$$
$$= \Pi^*(x) + O(\log\log x)$$

en utilisant le lemme 2. Le lemme 3 termine alors la démonstration. $\blacksquare$

La condition $p_1 \geqslant e$ n'est pas nécessaire, elle permet seulement de simplifier la démonstration.

4. Application au prolongement de ζ. Soit U une partie de $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{D}\cup U$ soit un ouvert simplement connexe et symétrique par rapport à l'axe réel. On note $\mathscr{E}(U)$ l'ensemble des couples $\eta=(s,n)$ où $s\in U\cap\mathring{\mathscr{B}}$ et $n\in \mathbf{Z}-\{0\}$, et on pose $\bar{\eta}=(\bar{s},n)$. Si $U\cup\mathscr{D}$ est $\zeta_{\mathscr{P}}$-maximal, avec $\mathscr{P}\in$ T.N.P., et si $\zeta_{\mathscr{P}}$ n'a ni zéro ni pôle sur la droite $\mathrm{Re}(s)=1$ privée du point $s=1$, alors $E(\zeta_{\mathscr{P}},U)$ est une partie fonctionnelle de $\mathscr{E}(U)$, telle que $\overline{E(\zeta_{\mathscr{P}},U)}=E(\zeta_{\mathscr{P}},U)$ puisque $\zeta_{\mathscr{P}}$ est réelle sur la demi-droite $s>1$ (une partie E de $\mathscr{E}(U)$ est dite fonctionnelle si:

$$\left.\begin{array}{l}\eta=(s,n)\subset E\\ \eta'=(s,n')\subset E\end{array}\right\}\Rightarrow n=n'$$

l'ensemble des s lorsque $\eta=(s,n)$ décrit une telle partie E est alors appelée domaine de définition de la partie fonctionnelle E). Le domaine de définition de la partie fonctionnelle $E(\zeta_{\mathscr{P}},U)$ est d'autre part localement fini dans U.

Nous allons chercher à répondre au problème:

"soit U une partie de $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{D}\cup U$ soit un ouvert simplement connexe symétrique par rapport à l'axe réel, et E une partie fonctionnelle de $\mathscr{E}(U)$ dont le domaine de définition est localement fini dans U, et telle que $\bar{E}=E$. Existe-t-il $\mathscr{P}\in$ T.N.P. tel que $\mathscr{D}\cup U$ soit $\zeta_{\mathscr{P}}$-maximal et que $E(\zeta_{\mathscr{P}},U)=E$?"

La réponse à ce problème nécessite quelques lemmes préliminaires. Nous noterons $\mathscr{E}'(U)$ l'ensemble des couples $\eta'=(s,r)$ où $s\in U\cap\mathring{\mathscr{B}}$ et $r\in\mathbf{R}^*$. Dans toute la suite, U et E sont fixés, vérifiant les propriétés énoncées plus haut.

LEMME 4. *Soit* $E'=\{(s_j,r_j)\}_{j\in J}$ *une partie fonctionnelle dénombrable de* $\mathscr{E}'(U)$, *telle que* $\bar{E}=E$. *Soit* $\Phi=\{\varphi(s_j)\}_{j\in J}$ *une suite d'éléments de* $]0,1]$ *telle que* $\varphi(\bar{s})=\varphi(s)$. *On suppose que*:

$$\sum_{j\in J}\varphi(s_j)\cdot|r_j|<+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to0}\sum_{\mathrm{Re}(s_j)>1-\varepsilon}|r_j|=0.$$

Alors la série:

$$g(x)=-\sum_{j\in J} r_j(1-x^{-\varphi(s_j)})\cdot x^{s_j-1}$$

vérifie les hypothèses du théorème 1.

En effet, comme $\bar{E}'=E'$ et $\varphi(\bar{s})=\varphi(s)$, la partie imaginaire de g est nulle, et si on pose $s=\sigma+it$, on a:

$$g(x)=-\sum_{j} r(1-x^{-\varphi})\frac{\cos(t\log x)}{x^{1-\sigma}}.$$

Or $1-x^{-\varphi}\leqslant\varphi\log x$. Donc cette série est dominée par $\dfrac{\log x}{x}\sum|r|\cdot\varphi\cdot x^{\sigma}$, qui converge absolument et uniformément sur $[1,+\infty[$. Donc $g(x)$ et $g(x)/\log x$ sont continues sur ce domaine, et il reste à montrer (H1).

Soit $\varepsilon'>0$ quelconque. Alors il existe $\varepsilon>0$ tel que $\sum_{\sigma>1-\varepsilon}|r|<\varepsilon'$. Alors:

$$|g(x)|\leqslant\frac{\log x}{x}x^{1-\varepsilon}\sum_{\sigma\leqslant1-\varepsilon}|r|\varphi+\sum_{\sigma>1-\varepsilon}|r|x^{\sigma-1}\leqslant\frac{\log x}{x^{\varepsilon}}\sum|r|\varphi+\varepsilon'$$

et

$$\varlimsup_{x\to\infty} g(x)\leqslant\varepsilon'. \ ■$$

En fait, on a montré que g vérifiait plus que les hypothèses du théorème 1 : en effet, $g(x)/\log x$ est une fonction continue sur $[1,+\infty[$. Ce qui permet de définir la fonction $F_{E',\Phi}(s)$, fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>0$:

$$F_{E',\Phi}(s)=\int_1^e x^{-s}\frac{g(x)}{\log x}\,dx.$$

LEMME 5. *Soient E' et Φ comme au lemme 4, g la fonction associée. Alors si* $\mathrm{Re}(s)>1$:

$$\int_e^\infty x^{-s}\frac{g(x)}{\log x}\,dx=-\sum_{j\in J}r_j\log\frac{s-(s_j-\varphi)}{s-s_j}-F_{E',\Phi}(s).$$

En effet, si $\mathrm{Re}(s)>1$:

$$\left(\int_1^\infty x^{-s}r_j\frac{1-x^{-\varphi}}{\log x}x^{s_j-1}\,dx\right)'=-\int_1^\infty x^{-s}r_j(1-x^{-\varphi})x^{s_j-1}\,dx$$

$$=-r_j\left(\frac{1}{s-s_j}-\frac{1}{s-(s_j-\varphi)}\right)=\left(r_j\log\left(\frac{s-(s_j-\varphi)}{s-s_j}\right)\right)'$$

et comme lorsque s réel tend vers $+\infty$ les deux quantités tendent vers 0, on obtient pour $\mathrm{Re}(s)>1$:

$$\int_1^\infty x^{-s}r_j\frac{1-x^{-\varphi}}{\log x}x^{s_j-1}\,dx=r_j\log\frac{s-(s_j-\varphi)}{s-s_j}.$$

La majoration $\left|r_j\dfrac{1-x^{-\varphi}}{\log x}x^{s_j-1}\right|\leqslant|r_j|\varphi$ entraine que l'on peut sommer les quantités ci-dessus, et que l'on peut permutter les signes $\sum$ et $\int$, quand $\sigma>1$. Cela entraine donc le résultat cherché. ■

On notera:

$$H_{E',\Phi}(s) = -\sum_{j\in J} r_j \log \frac{s-(s_j-\varphi(s_j))}{s-s_j}$$

fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

LEMME 6.

$$F(s) = \int_e^\infty x^{-s}\frac{1}{\log x}dx + \log(s-1)$$

a un prolongement holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$.

En effet:

$$F(s) = \int_1^\infty x^{-s}\frac{1-x^{-1}}{\log x}dx + \log(s-1) + \int_e^\infty x^{-(s+1)}\frac{dx}{\log x} - \int_1^e x^{-s}\frac{1-x^{-1}}{\log x}dx$$

$$= \log s + \int_e^\infty x^{-(s+1)}\frac{dx}{\log x} - \int_1^e x^{-s}\frac{1-x^{-1}}{\log x}dx$$

le calcul de la première intégrale se faisant comme pour le lemme 5, avec $r_j = s_j = \varphi = 1$. Le membre de droite de la dernière égalité est évidemment holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. ∎

LEMME 7. *Soit* $E' = \{(s_j, r_j)\}_{j\in J}$ *une partie fonctionnelle dénombrable de* $\mathscr{E}'(U)$, *telle que* $\bar{E}' = E'$, *et dont le domaine de définition est localement fini dans* U. *Soit* $\Phi = \{\varphi(s_j)\}_{j\in J}$ *une suite d'éléments de* $]0, 1]$ *telle que* $\varphi(\bar{s}) = \varphi(s)$. *On suppose que la série:*

$$\sum_{j\in J} \frac{|r_j|}{|s_j|}\varphi(s_j)$$

converge. Alors la fonction $H_{E',\Phi}(s)$ *a un prolongement holomorphe sur tout ouvert simplement connexe*

— *contenant le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 1$,

— *ne rencontrant pas le domaine de définition de* E'.

En effet, soit K un compact ne rencontrant pas le domaine de définition de E', et tel que $K \cup \mathscr{D}$ soit simplement connexe. Alors chacune des fonctions $\log\left(1+\frac{\varphi(s_j)}{s-s_j}\right)$ a un prolongement holomorphe sur $K\cup\mathscr{D}$. Et si $s \in K$:

$$\left|\log\left(1+\frac{\varphi(s_j)}{s-s_j}\right)\right| \leqslant A\frac{\varphi(s_j)}{|s-s_j|} \leqslant A'\frac{1}{|s_j|}\varphi(s_j)$$

où les constantes A et A' dépendent de K uniquement. D'où le résultat. ∎

LEMME 7'. *Si* E' *et* Φ *sont comme au lemme 7, et si de plus* $E' \in \mathscr{E}(U)$ *et si l'équation* $s_j = s_{j'} - \varphi(s_{j'})$ *n'a pas de solution dans* $J\times J$, *alors* $\exp(H_{E',\Phi})$ *a un prolongement meromorphe sur* $U\cup\mathscr{D}$, *avec pour zéros :*

— *les* s_j, *zéros d'ordre* r_j, j *décrivant* J;

— *les* $s_j-\varphi(s_j)$, *zéros d'ordre* $-r_j$, j *décrivant la partie* J' *de* J *définie par* $s_j - \varphi(s_j) \in U$.

Si en particulier U *est* $\exp(H_{E',\Phi})$-*maximal, et si pour tout* $j\in J$ *on a* $s_j-\varphi(s_j) \notin U$, *on a exactement* $E(\exp(H_{E',\Phi}), U) = E'$.

En effet, d'après le lemme 7, on a pour $s \in U\cup\mathscr{D}$:

$$\exp(H_{E',\Phi}(s)) = \prod\left(\frac{s-s_j}{s-(s_j-\varphi(s_j))}\right)^{r_j}.$$

THÉORÈME 2. *Soit* E *une partie fonctionnelle de* $\mathscr{E}(\mathscr{B})$ *telle que* $\bar{E} = E$, *dont le domaine de définition est localement fini dans* $\mathscr{B}$. *On note* (σ_j+it_j, n_j) *l'élément générique de* E, *et on suppose :*

$$\sum_{j\in J}\frac{|n_j|}{|t_j|}\sigma_j < \infty, \qquad \sum_{j\in J}|n_j|\sigma_j < \infty, \qquad \sup_{j\in J}\sigma_j < 1.$$

Alors il existe $\mathscr{P} \in$ T.N.P. *tel que* $\zeta_{\mathscr{P}}$ *ait un prolongement méromorphe à* $\mathscr{D}\cup\mathscr{B}$ *et que* $E(\zeta_{\mathscr{P}}, \mathscr{B}) = E$.

En effet, le domaine de définition de E, localement fini dans $\mathscr{B}$, est donc dénombrable. Si on pose $\varphi(s_j) = \sigma_j$, les hypothèses faites permettent d'appliquer les lemmes 4, 5, 7'. C'est-à-dire que la fonction $\exp(H_{E,\Phi}(s))$ a un prolongement méromorphe sur $\mathscr{D}\cup\mathscr{B}$, et :

$$E(\exp(H_{E,\Phi}), \mathscr{B}) = E$$

puisque $s_j - \varphi(s_j)$ n'appartient jamais à $\mathscr{B}$. On applique alors le théorème 1 avec la fonction g associée à E et Φ. Il existe donc $\mathscr{P} \in$ T.N.P. tel que $\zeta_{\mathscr{P}}$ ait un prolongement méromorphe sur $\mathscr{D}\cup\mathscr{B}$ (car G a un prolongement méromorphe sur $\mathscr{D}\cup\mathscr{B}$ d'après les lemmes 5, 6, 7') et tel que :

$$E(\zeta_{\mathscr{P}}, \mathscr{B}) = E(G, \mathscr{B}) = E(\exp(H_{E,\Phi}), \mathscr{B}) = E. \;\blacksquare$$

En faisant un raisonnement analogue, on peut montrer :

Soit $(t_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une suite croissante vers* $+\infty$ *de nombres réels positifs. Alors il existe* $\mathscr{P} \in$ T.N.P. *tel que :*

— $\zeta_{\mathscr{P}}$ *a un prolongement méromorphe sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 0$;

— *sur le demi-plan fermé* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1/2$, $\zeta_{\mathscr{P}}$ *a :*

un seul pôle, simple, en $s = 1$;

une infinité de zéros, tous sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, *simples et en* $s = 1/2 \pm it_k$.

Il suffit pour cela de prendre $U = \mathscr{B}$, $s_k = 1/2 + it_k$ ainsi que les conjugués, $n_j = 1$ pour tout $j \in J$, et les $\varphi(s_j)$ sont choisis quelconques tels que :

$$\sum_{j\in J}\varphi(s_j) < +\infty.$$

En fait, $\zeta_{\mathscr{P}}$ a alors aussi une infinité de pôles simples en les $s_j-\varphi(s_j)$. Il serait intéressant de savoir si ce résultat est encore vrai si on impose de plus à $\zeta_{\mathscr{P}}$ de ne pas avoir de pôles sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ sauf en $s = 1$, ou même d'être méromorphe sur C avec un seul pôle, en $s = 1$.

Enfin, le lemme 7 permet d'utiliser des exposants non entiers, donc de limiter la possibilité de prolongement de la fonction $\exp(H_{E',\Phi})$. On obtient par exemple :

THÉORÈME 3. *Soit $U\subset\mathscr{B}$ tel que $\overline{U} = U$ et que $U\cup\mathscr{D}$ soit ouvert simplement connexe. Soit E une partie fonctionnelle finie de $\mathscr{E}(U)$, telle que $\overline{E} = E$. Alors il existe $\mathscr{P}\in$ T.N.P. tel que :*

— *$U\cup\mathscr{D}$ est $\zeta_{\mathscr{P}}$-maximal ;*
— *$E(\zeta_{\mathscr{P}}, U) = E$.*

Bibliographie

[1] H. G. Diamond, *Asymptotic distribution of Beurling generalized integers*, Illinois J. Math. 14 (1970), p. 12–28.
[2] B. Nyman, *A general prime number theorem*, Acta Math. 81 (1949), p. 299–307.
[3] C. Ryavec, *The analytic continuation of Euler products with applications to asymptotic formulae*, Illinois J. Math. 17 (1973), p. 608–618.
[4] — *Euler products associated with Beurling's generalized prime number systems*, Proc. Symp. Pure Math. 24 (1973), p. 263–266.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U.E.R. DES SCIENCES
123, rue Albert Thomas
87060, Limoges, France

Reçu le 13. 4. 1982 (1300)

ACTA ARITHMETICA
XLIII (1984)

An improved upper bound for $G(k)$ in Waring's problem for relatively small k

by

R. BALASUBRAMANIAN and C. J. MOZZOCHI (Princeton, N. J.)

1. Introduction. In [3] K. Thanigasalam established the following

THEOREM 1. *$G(k)\leqslant 2[A_2+1]+[A_1+1]$ if $k\geqslant 2$ where*

$$A_1 = -\log(3k)\log^{-1}\theta,\quad A_2 = -\log(6k)\log^{-1}\theta \quad \textit{and} \quad \theta = \left(1-\frac{1}{k}\right).$$

In this paper we improve this result by establishing the following

THEOREM 2. *$G(k)\leqslant[2A_2+A_1-4]$ if $k\geqslant 2$.*

For $k\leqslant 20$ Theorem 2 is established by comparison with known results. In particular, for $2\leqslant k<9$ confer [6]; for $9\leqslant k\leqslant 20$ confer [4].

It is easy to see from the fact that $2A_2+A_1$ is transcendental that to establish Theorem 2 for $k>20$ it is sufficient to establish

THEOREM 3. *$G(k)\leqslant 2(A_2+3)+(A_1+3)-(2\lambda_2+\lambda_1)$ if $k>20$ where λ_1 and λ_2 are chosen such that $A_1-\lambda_1$ and $A_2-\lambda_2$ are integers, $2\lambda_2+\lambda_1\leqslant 14$, $2\lambda_2+\lambda_1$ is maximal, and $[\lambda_2] = 4$.*

Theorem 3 is established by combining the admissible exponents introduced in [5] with the circle method construction introduced in [4] together with a careful estimation of the coefficients and the error terms in the Taylor polynomial expansions of two relevant functions.

2. A proof of Theorem 3. Let

$$f(s) = \frac{k^3-3k^2+k+2}{k^3+k^2-k^2\theta^{s-3}}\,\theta^{s-3}\quad\text{(cf. 2.20 in [5])}\tag{1}$$

and let

$$s_1 = A_1+3-\lambda_1\quad\text{and}\quad s_2 = A_2+3-\lambda_2.\tag{2}$$

By the construction presented in [4] to establish Theorem 3 it is sufficient to show

$$f(s_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{2k-1}\right)f(s_1) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}\right)\quad\text{if}\quad k>20.\tag{3}$$