ACTA ARITHMETICA
XLIII (1984)

Über die Berechnung von Multiplikatorgleichungen*

von

JANNIS A. ANTONIADIS (Köln)

1. Einleitung. Jacobi (1828) fand, daß der bei der Transformation n-ten Grades der elliptischen Integrale erster Gattung auftretende „Multiplikator" einer Gleichung $\psi(n)$-ten Grades genügt, die nach ihm „Multiplikatorgleichung" heißt. F. Klein [6] braucht den Ausdruck „Multiplikatorgleichung" für diejenigen Gleichungen $\psi(n)$-ten Grades, denen die transformierten Werte von

$$\sqrt[12]{\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\omega)} := n\,\frac{\eta^2(n\omega)}{\eta^2(\omega)}$$

genügen und deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von $\gamma_2(\omega)$ und $\gamma_3(\omega)$ sind.

F. Klein hat auch selbst einige Multiplikatorgleichungen bestimmt, aber es ist erst L. Kiepert [5] gelungen, in einer Reihe von Arbeiten die Multiplikatorgleichungen für alle Primzahlen $p, p \leqslant 29$ zu berechnen.

In neuerer Zeit sind die Multiplikatorgleichungen wieder aufgegriffen worden und haben auf dem Gebiet der Modulkurven $X_0(N)$ wie zum Beispiel in [3], [4], sowie auch zur Kennzeichnung zweiklassiger imaginär-quadratischer Zahlkörper durch Lösungen diophantischer Gleichungen in [8], [1] Anwendung gefunden.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung weiterer Multiplikatorgleichungen mittels Computer. Im folgenden sei mit H immer die obere Halbebene $\{z \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ bezeichnet.

2. Theoretische Begründung. Zunächst möchten wir die bekannte, von uns benötigte Theorie kurz zusammenfassen [2].

Sei Γ die homogene, $\bar{\Gamma}$ die inhomogene Modulgruppe. Bezeichne noch $\eta(\omega)$ die Dedekindsche Eta-Funktion, $j(\omega)$ die absolute Invariante, Δ die Diskriminante aus der Theorie der Modulfunktionen und $\gamma_2(\omega)$

* Diese Arbeit stellt einen überarbeiteten Auszug aus der Dissertation des Verfassers (Köln 1981) dar und entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhabens.

$:= \sqrt[3]{j(\omega)}$, $\gamma_3(\omega) := \sqrt{j(\omega)-12^3}$ die bekannten Weberschen Funktionen $(\omega \in H)$.

DEFINITION 2.1.

(i) $\mathfrak{A}_r$, $r \in \boldsymbol{N}$ bezeichne die Menge aller primitiven Matrizen mit Determinante r.

(ii) Für $R \in \mathfrak{A}_r$ setze man $\Gamma_R := \Gamma \cap R^{-1}\Gamma R$.

(iii) $R, R' \in \mathfrak{A}_r$ heißen *äquivalent*: $\Leftrightarrow \Gamma R = \Gamma R'$.

(iv) $K(U)$ bezeichne den Körper der Modulfunktionen zu einer Untergruppe U von Γ.

(v) Für eine natürliche Zahl $n \in \boldsymbol{N}$, $n \neq 0$, sei noch

$$\Gamma_0(n) := \Gamma_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = \left\{ A \in \Gamma / A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ c \equiv 0\,(n) \right\}.$$

$\mathfrak{A}_r$ zerfällt unter der obigen Äquivalenzrelation (iii) in die endliche Anzahl $\psi(r) = r \prod_{p|r} (1+1/p)$ von Äquivalenzklassen.

SATZ 2.2. *Sei $R \in \mathfrak{A}_r$ und bezeichne f_R eine der Funktionen*

$$j_R(\omega) := (j \circ R)(\omega) = j(R(\omega)) \quad \text{oder} \quad \varphi_R(\omega) := r^{12} \frac{\Delta\left(R\begin{pmatrix}\omega \\ 1\end{pmatrix}\right)}{\Delta\begin{pmatrix}\omega \\ 1\end{pmatrix}}, \quad \omega \in H$$

dann gilt:

(i) $K(\Gamma_R) = K(\Gamma)(f_R) = \boldsymbol{Q}(j, f_R)$,

(ii) *Durchläuft R_μ ein Vertretersystem aus $\mathfrak{A}_r$, so sind die f_{R_μ}, $\mu = 1, 2, \ldots, \psi(r)$ die paarweise verschiedenen Konjugierten von f_R.*

Aus dem Satz 2.2 ergibt sich sofort, daß $\Phi_r(X, j) := \prod_{R_\mu} (X - \varphi_{R_\mu})$ das Minimalpolynom von φ_R über $\boldsymbol{C}(j(\omega))$ ist.

SATZ 2.3. (i) *Für $r \in \boldsymbol{N}$, $r > 0$ ist $\Phi_r(X, j) \in \boldsymbol{Z}[\chi, j]$.*

(ii) *Für jedes $R \in \mathfrak{A}_r$ ist φ_R ein primitives Element von $\boldsymbol{Q}(j(\omega), j_R(\omega)) / \boldsymbol{Q}(j(\omega))$ und das Hauptpolynom von φ_R ist von der Form*

$$\Phi_r(X, j) = \prod_{\nu=1}^{\psi(r)} (X - \varphi_{R_\nu}) = X^{\psi(r)} + B^{(r)}_{\psi(r)-1}(j) X^{\psi(r)-1} + \ldots + B^{(r)}_0(j)$$

mit $B^{(r)}_\mu(j) \in \boldsymbol{Z}[j]$.

Ist speziell $R = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit einer natürlichen Zahl $n \neq 0$, so ist nach Satz 2.3 (i) $\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\omega)$ ein erzeugendes Element von $\boldsymbol{Q}(j(\omega), j(n\omega))$ über $\boldsymbol{Q}(j(\omega))$. Man kann nun die Frage stellen, ob schon gewisse Wurzeln

aus $\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\omega)$ in $K := \boldsymbol{Q}(j(\omega), j(n\omega))$ liegen. Darüber kann man folgenden Satz beweisen, der schon H. Weber [9] bekannt war.

SATZ 2.4. (i) *Sei $n \in \boldsymbol{N}$, $n \not\equiv 0$ (3). Dann gilt*

$$\Phi_{3,n}(\omega) := \sqrt[3]{\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\omega)} \cdot \gamma_2^{n-1}(\omega) = n^4 \frac{\eta^8(n\omega)}{\eta^8(\omega)} \cdot \gamma_2^{n-1}(\omega) \in \boldsymbol{Q}(j(\omega), j(n\omega)).$$

(ii) *Sei $n \in \boldsymbol{N}$, $n \not\equiv 0$ (2). Dann gilt*

$$\Phi_{4,n}(\omega) := \sqrt[4]{\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\omega)} \cdot \gamma_3(\omega)^{(n-1)/2} = n^3 \frac{\eta^6(n\omega)}{\eta^6(\omega)} \cdot \gamma_3(\omega)^{(n-1)/2} \in \boldsymbol{Q}(j(\omega), j(n\omega)).$$

(iii) *Sei $n \in \boldsymbol{N}$, $n \not\equiv 0$ (6). Dann gilt*

$$\Phi_{12,n}(\omega) := \sqrt[12]{\varphi_{\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\omega)} \cdot \gamma_2(\omega)^{n-1} \cdot \gamma_3^{(n-1)/2}(\omega)$$

$$= n \frac{\eta^2(n\omega)}{\eta^2(\omega)} \cdot \gamma_2^{n-1}(\omega) \cdot \gamma_3^{(n-1)/2}(\omega) \in \boldsymbol{Q}(j(\omega), j(n\omega)),$$

wobei $\Phi_{3,n}$, $\Phi_{4,n}$, $\Phi_{12,n}$ jeweils primitive Elemente von $\boldsymbol{Q}(j(\omega), j(n\omega))$ über $\boldsymbol{Q}(j(\omega))$ sind.

Im folgenden sei p eine Primzahl $\neq 2, 3$. Aus dem Satz 2.4 (iii) ergibt sich, daß $\Phi_{12,p}(\omega)$ ein primitives Element von $K = \boldsymbol{Q}(j(\omega), j(p\omega))$ über $\boldsymbol{Q}(j(\omega))$ ist. Folglich ist das Hauptpolynom vom Grade $\psi(p) = p+1$ und zwar gilt weiter [2]:

SATZ 2.5. *Für das Hauptpolynom von $\Phi_{12,p}$ über $\boldsymbol{Q}(j(\omega))$*

$$F(X, j) := X^{p+1} + A_p(j) X^p + \ldots + A_0(j)$$

gilt:

$$A_\mu(j) \in \boldsymbol{Z}[j], \quad \text{für} \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

$$A_\mu(j) \equiv 0 \bmod p\boldsymbol{Z}[j], \quad \text{für} \quad \mu = 2, \ldots, p-1.$$

Die Frage nach den Konjugierten von $\Phi_{12,p}$ beantwortet der nächste Satz [9]:

SATZ 2.6. *Die weiteren Wurzeln des Minimalpolynoms $F(X, j)$ von $\psi_p(\omega) := \Phi_{12,p}$ sind gegeben durch*

$$\psi_{p_\nu}(\omega) := (-1)^{(p-1)/2} \frac{\eta^2\left(\dfrac{\omega+12\nu}{p}\right)}{\eta^2(\omega)} \cdot \gamma_2^{p-1}(\omega) \cdot \gamma_3(\omega)^{(p-1)/2},$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

Seien jetzt

$$X_p(\omega) := p\,\frac{\eta^2(p\omega)}{\eta^2(\omega)} \quad \text{und} \quad X_{p_\nu}(\omega) := (-1)^{(p-1)/2}\,\frac{\eta^2\left(\frac{\omega+12\nu}{p}\right)}{\eta^2(\omega)},$$

$\nu = 0, 1, \ldots, p-1$. Da die Funktionen $X_p(\omega)$ nach Definition für keinen endlichen Wert von $j(\omega)$ unendlich oder Null werden, schließen wir: Die Koeffizienten der Gleichung, deren Wurzeln die X_p, X_{p_ν} sind, sind ganze rationale Funktionen von γ_2 und γ_3 und nach Satz 2.5 sind weiter die Koeffizienten dieser Funktionen ganze rationale Zahlen.

Definition 2.7. Für jede Primzahl $p \neq 2, 3$ heißt die Gleichung

$$\big(X - X_p(\omega)\big)\prod_{\nu=0}^{p-1}\big(X - X_{p_\nu}(\omega)\big) = 0$$

Multiplikatorgleichung für p.

Wir sagen, daß γ_2 (bzw. γ_3) in der Multiplikatorgleichung für p direkt auftritt, wenn $p-1 \not\equiv 0\ (3)$ (bzw. $p-1 \not\equiv 0\ (2)$) ist.

Aus Satz 2.4 (iii) folgt sofort die schon F. Klein [6] bekannten Tatsachen:

(i) Ist $p \equiv 1\ (12)$, so treten γ_2 und γ_3 nicht direkt in der Multiplikatorgleichung auf.

(ii) Ist $p \equiv 5\ (12)$ so tritt γ_2 aber nicht γ_3 direkt auf.

(iii) Ist $p \equiv 7\ (12)$, so tritt γ_3, aber nicht γ_2 direkt auf.

(iv) Ist $p \equiv 11\ (12)$, so treten beide γ_2 und γ_3 direkt auf.

(v) Der letzte Koeffizient ist gleich $(-1)^{(p-1)/2}\cdot p$.

Man kann jetzt für bestimmte Primzahlen p die Form der Multiplikatorgleichung für p leicht finden. Hierzu berechnet man den kleinsten Exponenten in der q-Entwicklung der elementarsymmetrischen Funktionen in den Wurzeln und beachtet, daß die absolute Invariante in ihrer q-Entwicklung mit q^{-1} beginnt. Als nächstes muß man die numerischen Koeffizienten berechnen. Die Idee ist, sie durch Koeffizientenvergleich bestimmter Potenzen q^n, $n \in \boldsymbol{N}$, der q-Entwicklung der in den Multiplikatorgleichungen auftretenden Funktionen $p^t V^s$, $V = j, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_2\cdot\gamma_3$, $t \in \boldsymbol{N}$, $t > 0$, $s \in \boldsymbol{N}$ zu bestimmen. Da aber die Koeffizienten in den q-Entwicklungen sehr schnell wachsen, ist das Problem kompliziert.

Als Kriterien für die Richtigkeit des Programmes dienen uns Satz 2.5 sowie Testläufe, in denen wir einige der Kiepertschen Resultate wiederfanden.

3. Die Multiplikatorgleichungen

3.1. Multiplikatorgleichung für $p \equiv 1\ (12)$. Hier treten nicht direkt die Funktionen γ_2 und γ_3 in der Multiplikatorgleichung auf. Also die Koeffizienten der Multiplikatorgleichung sind ganze rationale Funktionen von j mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Multiplikatorgleichung für $p = 37$. Zunächst berechnet man die q-Entwicklungen der Wurzeln

$$X_{37}(\omega) := 37\,\frac{\eta^2(37\omega)}{\eta^2(\omega)} = 37q^3\prod_{\substack{n=1\\37\nmid n}}^{\infty}(1-q^n)^{-2}, \quad q = e^{2\pi i\omega},\ \omega \in H$$

und

$$X_{37_\nu}(\omega) = q^{-3/37}\zeta_{37}^{\nu}\prod_{\substack{n=1\\37\nmid n}}^{\infty}\big(1-(\zeta_{37}^{12\nu}q^{1/37})^n\big)^2, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 36.$$

Der letzte Koeffizient der Multiplikatorgleichung ist die Konstante $(-1)^{(p-1)/2}\cdot p = 37$ und folglich hat die Multiplikatorgleichung die Gestalt

$$X^{38} + \sum_{N=1}^{37} A_N(j)X^{38-N} + 37 = 0, \quad \text{mit} \quad A_N(j) \in \boldsymbol{Z}[j].$$

Da die $A_N(j)$ elementar-symmetrische Funktionen der Wurzeln sind, folgt sofort, daß der kleinste Exponent der q-Entwicklungen von $A_N(j) \geqslant -3N/37$ ist. Es ist aber bekanntlich

$$j(\omega) = q^{-1} + 744 + \ldots$$

Daraus folgt:

$$A_N(j) = \begin{cases} a_N & \text{für} \quad N = 1, 2, \ldots, 12,\\ a_Nj + b_N & \text{für} \quad N = 13, 14, \ldots, 24,\\ a_Nj^2 + b_Nj + c_N & \text{für} \quad N = 25, 26, \ldots, 36,\\ a_Nj^3 + b_Nj^2 + c_Nj + d_N & \text{für} \quad N = 37, \end{cases}$$

wobei $a_N, b_N, c_N, d_N \in \boldsymbol{Z}$.

Also kann man schreiben

$$X^{38} + \sum_{N=1}^{12} a_N X^{38-N} + \sum_{N=13}^{24}(b_N + a_Nj)X^{38-N} +$$
$$+ \sum_{N=25}^{36}(c_N + b_Nj + a_Nj^2)X^{38-N} + (d_{37} + c_{37}j + b_{37}j^2 + a_{37}j^3)X + 37 = 0.$$

Schreibt man

$$X_{37}(\omega) = 37q^3P^2 \quad \text{mit} \quad P := \prod_{\substack{n=1\\37\nmid n}}^{\infty}(1-q^n)^{-1},$$

so ist

$$X_{37}^{m} = 37^{m} q^{3m} P^{2m} = 37^{m} q^{3m}(1+\ldots)$$

und

$$X_{37}^{m} j^{s} = 37^{m} q^{3m} P^{3m} j^{s} = 37^{m} q^{3m-s}(1+\ldots) \quad \text{mit} \quad m \in \boldsymbol{N}_{+} \text{ und } s \in \boldsymbol{N}.$$

Es sind 76 Unbekannte zu bestimmen. Man berechnet die Koeffizienten der q-Entwicklung bis q^{111} von

$$\begin{array}{lll} X_{37}^{m}, & & m = 1, 2, \ldots, 37, \\ X_{37}^{m} j^{s} & \text{für} & \begin{cases} s = 1, & m = 1, 2, \ldots, 25, \\ s = 2, & m = 1, 2, \ldots, 13, \\ s = 3, & m = 1. \end{cases} \end{array}$$

Durch Koeffizientenvergleich konstruiert man ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksgestalt mit 76 Gleichungen und Unbekannten. Die Lösung dieses Systems ergibt die gewünschte Multiplikatorgleichung.

Multiplikatorgleichung für $p = 37$ (mit Abspaltung der Primzahlpotenzen q^{a} mit $q < 50000$)

$$\begin{aligned}
X^{38} - 37\{&2X^{37} - 79X^{36} + 2^2\cdot 3\cdot 181X^{35} - 3\cdot 11\cdot 1399X^{34} + 2\cdot 3^2\cdot 44549X^{33} - \\
&- 23\cdot 511843X^{32} + 2^9\cdot 7\cdot 41681X^{31} - 2\cdot 4481\cdot 185699X^{30} + \\
&+ 2^2\cdot 3\cdot 19\cdot 72201167X^{29} - 2\cdot 3\cdot 23\cdot 43\cdot 307\cdot 80021X^{28} + \\
&+ 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 5903\cdot 234499X^{27} - 2\cdot 61\cdot 11399\cdot 6033761X^{26} + \\
&+ (23j + 2^2\cdot 101\cdot 136026661313)X^{25} - (2^2\cdot 19\cdot 47j + \\
&\quad + 2\cdot 12043\cdot 13588441303)X^{24} + (2^2\cdot 5\cdot 79\cdot 89j + \\
&\quad + 2^5\cdot 3^2\cdot 6161063723539)X^{23} - (2^2\cdot 847453j + \\
&\quad + 3\cdot 19\cdot 251\cdot 612148186189)X^{22} + (257\cdot 228097j + \\
&\quad + 2\cdot 3\cdot 7\cdot 936351198662519)X^{21} - (2^2\cdot 197513419j + \\
&\quad + 4079\cdot 39322946223739)X^{20} + (2^2\cdot 23\cdot 37\cdot 2541289j + \\
&\quad + 2^2\cdot 5\cdot 1933\cdot 8477\cdot 1814996191)X^{19} - (2^2\cdot 5^2\cdot 37\cdot 4391\cdot 4861j + \\
&\quad + 7^2\cdot 37\cdot 1090598737975421)X^{18} + (2\cdot 305330141381j + \\
&\quad + 2\cdot 3\cdot 7\cdot 907\cdot 1429\cdot 108872687993)X^{17} - (2^2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 97\cdot 55039297j + \\
&\quad + 3\cdot 7\cdot 11\cdot 6529\cdot 10518184301509)X^{16} + (2^2\cdot 7\cdot 818128516493j + \\
&\quad + 2^5\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 3251\cdot 441516152131)X^{15} - (2^2\cdot 17\cdot 1642425824597j + \\
&\quad + 2\cdot 193\cdot 26959\cdot 7517640310711)X^{14} - \\
&- (2j^2 - 3\cdot 23\cdot 5581\cdot 1210701517j - 2^2\cdot 11\cdot 3199675269274478903)X^{13} - \\
&- (3\cdot 5^2\cdot 23j^2 + 2^2\cdot 7\cdot 11\cdot 5369407841429j + \\
&\quad + 2\cdot 7\cdot 1538687255609436 8449)X^{12} - (2^2\cdot 5\cdot 11\cdot 23\cdot 43j^2 - \\
&\quad - 2^2\cdot 2731\cdot 450629339129j - 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 23\cdot 9007727696328551)X^{11} - \\
&- (19\cdot 463513j^2 + 2^2\cdot 3^5\cdot 6781\cdot 1829519431j + \\
&\quad + 2\cdot 3\cdot 4631299167704164 5319)X^{10} - (2^2\cdot 17\cdot 19\cdot 115429j^2 - \\
&\quad - 2\cdot 13\cdot 15683\cdot 57887048419j - 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 71\cdot 1471097215519 7699)X^{9} - \\
&- (3^2\cdot 13\cdot 17\cdot 37\cdot 16073j^2 + 2^2\cdot 5\cdot 1763374945351927j + \\
&\quad + 2\cdot 23\cdot 509\cdot 23371\cdot 200399852119)X^{8} - (2^3\cdot 5\cdot 13\cdot 3037\cdot 5783j^2 - \\
&\quad - 2^2\cdot 29^2\cdot 11107621569371j - 2^7\cdot 173\cdot 223\cdot 5278905136543)X^{7} - \\
&- (3^4\cdot 13\cdot 8025569j^2 + 2^2\cdot 1423\cdot 43329792524 89j - \\
&\quad - 7\cdot 103\cdot 487\cdot 15616608321049)X^{6} - (2^2\cdot 157\cdot 111094 91j^2 - \\
&\quad - 37\cdot 211\cdot 33191\cdot 30999817j + 2\cdot 3^2\cdot 29\cdot 6575837589746239)X^{5} - \\
&- (17\cdot 61\cdot 71\cdot 83\cdot 359j^2 + 2^2\cdot 13\cdot 283\cdot 57404706199j + \\
&\quad + 3\cdot 31\cdot 7851114081039743)X^{4} - (2^2\cdot 5\cdot 59\cdot 397\cdot 401j^2 - \\
&\quad - 2^2\cdot 5\cdot 747336055727j + 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 17\cdot 1021\cdot 2657\cdot 9706577)X^{3} - \\
&- (3\cdot 5\cdot 59\cdot 2069j^2 + 2^2\cdot 1632585809j + 7\cdot 11\cdot 47\cdot 1097\cdot 84809)X^{2}\} - \\
&- (j^3 - 2\cdot 1117j^2 + 1072931j - 1093699)X + 37 = 0.
\end{aligned}$$

Multiplikatorgleichung für $p = 61$. Wie früher berechnet man die q-Entwicklungen der Wurzeln der Multiplikatorgleichung:

$$X_{61}(\omega) := 61\cdot \frac{\eta^2(61\omega)}{\eta^2(\omega)} = 61q^5\cdot \prod_{\substack{n=1 \\ 61\nmid n}}^{\infty} (1-q^n)^{-2}$$

und

$$X_{61,\nu}(\omega) := \frac{\eta^2\left(\dfrac{\omega+12\nu}{61}\right)}{\eta^2(\omega)} = q^{-5/61}\zeta_{61}^{\nu} \prod_{\substack{n=1 \\ 61\nmid n}}^{\infty} \left(1-(\zeta_{61}^{12\nu} q^{1/61})^n\right)^2,$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, 60.$$

Schreibt man die Multiplikatorgleichung für $p = 61$ in der Form

$$X^{62} + \sum_{N=1}^{61} A_N(j) X^{62-N} + 61 = 0, \quad \text{mit} \quad A_N(j) \in \boldsymbol{Z}[j],$$

so folgt wie früher

$$A_N(j) = \begin{cases} a_N & \text{für} \quad N = 1, \ldots, 12, \\ a_N j + b_N & \text{für} \quad N = 13, \ldots, 24, \\ a_N j^2 + b_N j + c_N & \text{für} \quad N = 25, \ldots, 36, \\ a_N j^3 + b_N j^2 + c_N j + d_N & \text{für} \quad N = 37, \ldots, 48, \\ a_N j^4 + b_N j^3 + c_N j^2 + d_N j + e_N & \text{für} \quad N = 49, \ldots, 60, \\ a_N j^5 + b_N j^4 + c_N j^3 + d_N j^2 + e_N j + g_N & \text{für} \quad N = 61, \end{cases}$$

wobei a_N, b_N, c_N, d_N, e_N und g_N ganze rationale Zahlen sind. Man kann also die Multiplikatorgleichung so schreiben:

$$\begin{aligned}
X^{62} &+ \sum_{N=1}^{12} a_N X^{62-N} + \sum_{N=13}^{24} (a_N j + b_N) X^{62-N} + \sum_{N=25}^{36} (a_N j^2 + b_N j + c_N) X^{62-N} + \\
&+ \sum_{N=37}^{48} (a_N j^3 + b_N j^2 + c_N j + d_N) X^{62-N} + \sum_{N=49}^{60} (a_N j^4 + b_N j^3 + c_N j^2 + \\
&+ d_N j + e_N) X^{62-N} + (a_{61} j^5 + b_{61} j^4 + c_{61} j^3 + d_{61} j^2 + e_{61} j + g_{61}) X + \\
&+ 61 = 0.
\end{aligned}$$

Für jedes $m \in N_+$ und $s \in N$ gilt:

$$X_{61}^m = 61^m \cdot q^{5m} \cdot (1 + \ldots) \quad \text{und} \quad X_{61}^m j^s = 61^m \cdot q^{5m-s} \cdot (1 + \ldots).$$

Zu bestimmen sind jetzt 186 Unbekannte. Dazu benötigt man die Koeffizienten der q-Entwicklung bis q^{305} von

$$\begin{aligned} &X_{61}^m, && m = 1, 2, \ldots, 61, \\ &X_{61}^m j^s \quad \text{für} && \begin{cases} s = 1, & m = 1, 2, \ldots, 49, \\ s = 2, & m = 1, 2, \ldots, 37, \\ s = 3, & m = 1, 2, \ldots, 25, \\ s = 4, & m = 1, 2, \ldots, 13, \\ s = 5, & m = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich konstruiert man ein lineares Gleichungssystem mit 186 Gleichungen und Unbekannten. Hier treten Koeffizienten mit 210 Stellen auf! Durch Lösung dieses Systems ergibt sich die

Multiplikatorgleichung für $p = 61$

$$\begin{aligned}
X^{62} + 61\{&-2X^{61} + 115X^{60} - 4100X^{59} + 99781X^{58} - 1697678X^{57} + 19051779X^{56} - \\
&- 92868936X^{55} - 1234140465X^{54} + 34534283938X^{53} - \\
&- 410565643655X^{52} + 2448661683532X^{51} + 5808881243571X^{50} - \\
&- (575j + 302594342086794)X^{49} + (41500j + 3453002338468029)X^{48} + \\
&+ (1011232j - 19654031293904800)X^{47} - (241910196j + \\
&\quad + 118146202863723\,16)X^{46} + (13962175729j + \\
&\quad + 1438216142310903224)X^{45} - (459935938220j + \\
&\quad + 15166215683936775132)X^{44} + (9586226468212j + \\
&\quad + 79010123888396065632)X^{43} - (113168006892924j + \\
&\quad + 979262297630195052)X^{42} - (1885753652572 5j + \\
&\quad + 3925344144784758206344)X^{41} + (307196014220114 72j + \\
&\quad + 37595443966901393253092)X^{40} - (680730188898314908j + \\
&\quad + 177380567206649934771136)X^{39} + (8228032542340112960j + \\
&\quad + 6656142260868834808 3034)X^{38} + (686j^2 - \\
&\quad - 5058427246551884920 4j + 607268509296643221881874 8)X^{37} + \\
&+ (6356055j^2 - 1431434394327952702 32j - \\
&\quad - 5260307977666358744957794 6)X^{36} - (108873812j^2 - \\
&\quad - 68602884428086174912 92j - \\
&\quad - 223352931590044112976588888)X^{35} + (53088275521j^2 - \\
&\quad - 762445087794099485333 68j - \\
&\quad - 1421148964349897018505210 18)X^{34} - (9790677570184j^2 - \\
&\quad - 40935851507700891995335 3j + \\
&\quad + 5077697842061173899777681876)X^{33} + (881569151488179j^2 + \\
&\quad + 29628963872442277996378 84j + \\
&\quad + 38960990012621414466962906274)X^{32} - (51020683661749088j^2 + \\
&\quad + 2564958366632875074880613 2j + \\
&\quad + 141081721476418237430554431408)X^{31} + \\
&+ (2105820531493640983j^2 + 23286047678710110354094030 0j + \\
&\quad + 662187280239264609048452791 14)X^{30} - \\
&- (6538800611764277438 6j^2 + 10224602094452483804629711 49j - \\
&\quad - 2279413006375168558903498445004)X^{29} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ (157936801503877298364 6j^2 + 1065237459936521359487018 36j - \\
&\quad - 13371728694717032141511473404338)X^{28} - \\
&- (3036662983878048098330 8j^2 - 320105958004299420993179503 68j - \\
&\quad - 297073638184035305859387263015 28)X^{27} + \\
&+ (47257455596021674497865 0j^2 - \\
&\quad - 2451261854798839747789561195 08j + \\
&\quad + 686860641573993878240874375976 94)X^{26} - \\
&- (71j^3 + 602534969020533862258738 2j^2 - \\
&\quad - 9821646818345087370819398073 02j + \\
&\quad + 765059516365838635869222779893732)X^{25} + \\
&+ (3681080j^3 + 634925182443296229076248 45j^2 - \\
&\quad - 161203357245908713781805356950 8j + \\
&\quad + 2421094962163602710004138823472114)X^{24} - (8758366236j^3 + \\
&\quad + 556259264580975713555840708 8j^2 + \\
&\quad + 639470522247269944082082378211 2j + \\
&\quad + 1981283182044201854026913429215 36)X^{23} + (4205034278944j^3 + \\
&\quad + 406634310585350737815418383 3j^2 + \\
&\quad + 5755300352107707049392337648271 6j - \\
&\quad - 28051717363094986177781015639982028)X^{22} - \\
&- (734551288199622j^3 + 248391423146545794928566420 62j^2 + \\
&\quad + 2204756838487206894699404818085 09j - \\
&\quad - 1038175602087555672311700969570451 76)X^{21} + \\
&+ (62247051627507944j^3 + 1267174593700834497035361565 56j^2 + \\
&\quad + 4856966942992688445252221686797 40j - \\
&\quad - 6618387719773321639178890778439481 2)X^{20} - \\
&- (2997986088548442622j^3 + 5385182504208251530896432466 24j^2 + \\
&\quad + 3457104776528942284654072938955 72j + \\
&\quad + 7567813596214118537392486132609366 08)X^{19} + \\
&+ (901612391253230207 92j^3 + 1897698158771438141417069260476j^2 - \\
&\quad - 1831808669417173842104613338200436j + \\
&\quad + 2796976558989747182325870572046287988)X^{18} - \\
&- (1794893540329781915181j^3 + 5507318556056579554490666250782j^2 - \\
&\quad - 8572073854692166942963522597718953j + \\
&\quad + 21271617045217635071989685144618420 56)X^{17} + \\
&+ (24528726984626725266944j^3 + \\
&\quad + 1303949469314893932772824049149 3j^2 - \\
&\quad - 2055674547713911452239189083807520 88j - \\
&\quad - 12292055695466649876723132661639433836)X^{16} - \\
&- (235073076948156281565366j^3 + \\
&\quad + 2487797322720477095225521973892 8j^2 - \\
&\quad - 3298890977101516667536669628662581 72j - \\
&\quad - 398218643471482199788147352225370718 40)X^{15} + \\
&+ (1595717692162234190003656j^3 + \\
&\quad + 3764002774259933880774821731462 5j^2 - \\
&\quad - 4173533121558342487692225142366015 2j - \\
&\quad - 302197030454184650483475890884667825 91)X^{14} + \\
&+ (2j^4 - 7674596107021174689472428j^3 - \\
&\quad - 442391306638917092475021515866 62j^2 + \\
&\quad + 6995742252271048745726145487797991 6j - \\
&\quad - 885611962787501283537776388265339512634)X^{13} + \\
&+ (63848j^4 + 25915175092061180649218536j^3 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +393237595048745106715670735830090 j^2 - \\
&\quad -1764094091086634365050766580431369 60 j + \\
&\quad +28615709018313444625386318815956844521 51) X^{12} + \\
&+(64043868 j^4 - 60265711374571646950880646 j^3 - \\
&\quad -2552013560227703024708462877 1468 j^2 + \\
&\quad +345764642634138176844325116293600132 j - \\
&\quad -4227233095334458002176236813842436639 88) X^{11} + \\
&+(1079494992 1 j^4 + 935067497546983131205303 04 j^3 + \\
&\quad +1157452509867276863310808416312 6 j^2 - \\
&\quad -36401816064069727811940066578746340 8 j + \\
&\quad +41170961090646448442391691357220954204 5) X^{10} + \\
&+(495986043404 j^4 - 9225432124092831264463382 1 j^3 - \\
&\quad -357428031990199228276014274550 6 j^2 + \\
&\quad +11692680978923683421912405385165187 5 j - \\
&\quad -274665561058073029957570588360285594382) X^9 + \\
&+(7595328549219 j^4 + 538885315777218132322334 32 j^3 + \\
&\quad +5508089887009402089269687155 63 j^2 + \\
&\quad +5747219589931504839927293077820859 6 j + \\
&\quad +131298515239907915940489324093274106355) X^8 + \\
&+(41833653179548 j^4 - 1675569842034623450711678 2 j^3 + \\
&\quad +270183183174846174763277152259 2 j^2 - \\
&\quad -19373999930543252047116441109620908 j - \\
&\quad -3956882597370489645249051100264603821 6) X^7 + \\
&+(82342008388959 j^4 + 235959079561418716791226 4 j^3 + \\
&\quad +109820903490272606769765244431 9 j^2 - \\
&\quad -1855291035238643292273037332865340 j + \\
&\quad +7194649885516346340756835985631508 79) X^6 + \\
&+(53032641235244 j^4 - 116903905839956631254022 j^3 + \\
&\quad +619719399112868900048289998456 j^2 - \\
&\quad -3935305050527833750606588374208 31 j + \\
&\quad +12468884053076373893623100738421392 2) X^5 + \\
&+(9087367904461 j^4 + 1344813109712268753184 j^3 + \\
&\quad +378556220165955518204523901 j^2 + \\
&\quad +310227511999725272466199621772 4 j + \\
&\quad +69180438195072245409907665642720 1) X^4 + \\
&+(264585399708 j^4 - 1678873795516635516 j^3 + \\
&\quad +115015375730456207619628 j^2 - 85634513096100376548755388 8 j + \\
&\quad +12669713937623488287798158887 00) X^3 + (403531208 j^4 + \\
&\quad +28256054636120 j^3 + 102834630661794915 j^2 + \\
&\quad +34919057333141315500 j + 351263026575837173215) X^2\} - \\
&-(j^5 - 3722 j^4 + 4556891 j^3 + 2033616326 j^2 + 247805227235 j - \\
&\quad -1980189157558) X + 61 = 0 .
\end{aligned}
$$

Ganz ähnlich wie im Beispiel für $p = 37$ und $p = 61$ kann man eine explizite Darstellung der Multiplikatorgleichung für $p \equiv 1\ (12)$ folgendermaßen geben:

Satz. *Für eine Primzahl $p \equiv 1\ (12)$, $p = 12\nu+1$ hat die Multiplikatorgleichung für p die Gestalt*

$$X^{p+1} + \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{i=12k+1}^{12(k+1)} \sum_{\lambda=0}^{k} a_{\lambda,i} j^{\lambda} X^{p+1-i} + \Big(\sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\mu} j^{\mu} \Big) X + p = 0, \qquad a_{\lambda,i},\ a_{\mu} \in \mathbf{Z}.$$

Die Anzahl der Unbekannten ist $(\nu+1)(6\nu+1)$; um diese zu bestimmen, benötigt man die Koeffizienten der q-Entwicklung von X_p^m und $X_p^m j^s$ für gewisse $m \in \mathbf{N}_+$ und $s \in \mathbf{N}$ bis zu $q^{p\nu}$.

3.2. Multiplikatorgleichung für $p \equiv 5\ (12)$. Hier tritt die Funktion γ_2, aber nicht γ_3 *direkt* auf. Als Beispiel rechnen wir die

Multiplikatorgleichung für $p = 41$. Da $\gamma_2^3 = j$ ist, kann man die Multiplikatorgleichung in folgender Gestalt schreiben:

$$
\begin{aligned}
&X^{42} + A_1(j)\gamma_2^2 X^{41} + A_2(j)\gamma_2 X^{40} + A_3(j) X^{39} + A_4(j)\gamma_2^2 X^{38} + A_5(j)\gamma_2 X^{37} + \\
&\quad + A_6(j) X^{36} + A_7(j)\gamma_2^2 X^{35} + A_8(j)\gamma_2 X^{34} + A_9(j) X^{33} + \\
&\quad + A_{10}(j)\gamma_2^2 X^{32} + A_{11}(j)\gamma_2 X^{31} + A_{12}(j) X^{30} + A_{13}(j)\gamma_2^2 X^{29} + \\
&\quad + A_{14}(j)\gamma_2 X^{28} + A_{15}(j) X^{27} + A_{16}(j)\gamma_2^2 X^{26} + A_{17}(j)\gamma_2 X^{25} + \\
&\quad + A_{18}(j) X^{24} + A_{19}(j)\gamma_2^2 X^{23} + A_{20}(j)\gamma_2 X^{22} + A_{21}(j) X^{21} + \\
&\quad + A_{22}(j)\gamma_2^2 X^{20} + A_{23}(j)\gamma_2 X^{19} + A_{24}(j) X^{18} + A_{25}(j)\gamma_2^2 X^{17} + \\
&\quad + A_{26}(j)\gamma_2 X^{16} + A_{27}(j) X^{15} + A_{28}(j)\gamma_2^2 X^{14} + A_{29}(j)\gamma_2 X^{13} + \\
&\quad + A_{30}(j) X^{12} + A_{31}(j)\gamma_2^2 X^{11} + A_{32}(j)\gamma_2 X^{10} + A_{33}(j) X^{9} + \\
&\quad + A_{34}(j)\gamma_2^2 X^{8} + A_{35}(j)\gamma_2 X^{7} + A_{36}(j) X^{6} + A_{37}(j)\gamma_2^2 X^{5} + \\
&\quad + A_{38}(j)\gamma_2 X^{4} + A_{39}(j) X^{3} + A_{40}(j)\gamma_2^2 X^{2} + A_{41}(j)\gamma_2 X + 41 = 0
\end{aligned}
$$

mit $A_N(j) \in \mathbf{Z}[j]$ für alle $N = 1, 2, \ldots, 41$.

Die q-Entwicklungen der Wurzeln sind:

$$X_{41}(\omega) := 41\,\frac{\eta^2(41\omega)}{\eta^2(\omega)} = 41 q^{10/3} \prod_{\substack{n=1\\ 41\nmid n}}^{\infty} (1-q^n)^{-2}$$

und

$$X_{41_\nu}(\omega) := \frac{\eta^2\left(\dfrac{\omega+12\nu}{41}\right)}{\eta^2(\omega)} = q^{-10/123}\zeta_{41}^{\nu} \prod_{\substack{n=1\\ 41\nmid n}}^{\infty} \big(1-(\zeta_{41}^{12\nu} q^{1/41})^n\big)^2,$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, 40.$$

Nach Bildung geeigneter elementar-symmetrischer Funktionen in den Wurzeln kann man den kleinsten Exponenten der q-Entwicklung von $A_N(j)$, $N = 1, 2, \ldots, 41$ abschätzen, und zwar nach (3.1.4) durch $\dfrac{-10N}{123} + \dfrac{t}{3}$, wobei $t = 0, 1, 2$, je nachdem ob $N \equiv 0, 2, 1\ (3)$ ist.

Ist dieser Exponent für einen Wert von N positiv, so ist der zugehörige Koeffizient der Multiplikatorgleichung gleich Null. Tatsächlich sind $A_1(j) = A_2(j) = A_4(j) = A_7(j) = 0$.

Ähnliche Überlegungen wie im vorigen Paragraphen ergeben. (Es wird immer benutzt, daß $j = q^{-1} + 744 + \ldots$ ist):

$$A_N(j) = a_N \in \mathbf{Z} \quad \text{für} \quad N = 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16 \text{ und } 19,$$

$$A_N(j) = a_N j + b_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N \in \mathbf{Z}$$
$$\text{für } N = 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28 \text{ und } 31,$$

$$A_N(j) = a_N j^2 + b_N j + c_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N, c_N \in \mathbf{Z}$$
$$\text{für } N = 27, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 \text{ und } 40,$$

$$A_N(j) = a_N j^3 + b_N j^2 + c_N j + d_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N, c_N, d_N \in \mathbf{Z}$$
$$\text{für } N = 39 \text{ und } 41.$$

Also hat man 77 Unbekannte zu berechnen. Hierzu benötigen wir die Koeffizienten der q-Entwicklungen bis q^{130} von:

$$X_{41}^m \quad \text{für} \quad m = 3r, \quad r = 1, 3, \ldots, 13$$

und

$$X_{41}^m \gamma_2^s \quad \text{für} \quad \begin{cases} s = 1, & m = 1+3r, \; r = 0, 1, \ldots, 12, \\ s = 2, & m = 2+3r, \; r = 0, 1, \ldots, 10, \\ s = 3, & m = 3r, \; r = 1, 2, \ldots, 9, \\ s = 4, & m = 1+3r, \; r = 0, 1, \ldots, 8, \\ s = 5, & m = 2+3r, \; r = 0, 1, \ldots, 6, \\ s = 6, & m = 3r, \; r = 1, 2, 3, 4, 5, \\ s = 7, & m = 1+3r, \; r = 0, 1, 2, 3, 4, \\ s = 8, & m = 2+3r, \; r = 0, 1, 2, \\ s = 9, & m = 3, \\ s = 10, & m = 1. \end{cases}$$

Wir haben in der Multiplikatorgleichung j durch γ_2^3 ersetzt. Das ist der Grund, daß 10 als höchste Potenz von γ_2 auftritt.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares inhomogenes Gleichungssystem mit 77 Unbekannten. Die Lösung dieses Systems ergibt die gewünschte Multiplikatorgleichung. Wir haben von den numerischen Koeffizienten die Primzahlpotenzen von den Primzahlen $\leqslant 100\,000$ abgespalten.

Multiplikatorgleichung für $p = 41$ (mit Abspaltung der Primzahlpotenzen q^a mit $q < 100\,000$)

$$\begin{aligned} X^{42} - 41\{&2^4 \cdot 3X^{39} - 2 \cdot 3\gamma_2 X^{37} + 3^3 \cdot 79X^{36} + 2^3 \cdot 257\gamma_2 X^{34} - 2^2 \cdot 11 \cdot 14867X^{33} - \\ &- 11 \cdot 13^2 \cdot \gamma_2^2 X^{32} + 2^2 \cdot 3 \cdot 173 \cdot 419\gamma_2 X^{31} - 5 \cdot 11616509X^{30} - \\ &- 2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 1699\gamma_2^2 X^{29} - 2^3 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 71 \cdot 15349\gamma_2 X^{28} - (2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3533j - \\ &\quad - 2 \cdot 3^2 \cdot 191 \cdot 3669643)X^{27} + 51103153\gamma_2^2 X^{26} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (31j + 2 \cdot 10115534563)\gamma_2 X^{25} - (2^4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 9209j - \\ &\quad - 103 \cdot 31555389011)X^{24} + 2^3 \cdot 1123 \cdot 5581363\gamma_2^2 X^{23} - (7 \cdot 103 \cdot 38953j - \\ &\quad - 2^4 \cdot 23 \cdot 19381 \cdot 2936411)\gamma_2 X^{22} + (2^3 \cdot 3^3 \cdot 41 \cdot 4240493j + \\ &\quad + 2^3 \cdot 11 \cdot 331025367067)X^{21} - (2^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 41j + \\ &\quad + 2 \cdot 5^2 \cdot 41 \cdot 1523 \cdot 2212297)\gamma_2^2 X^{20} - (2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 228103657j + \\ &\quad + 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 79 \cdot 17747 \cdot 432251)\gamma_2 X^{19} - (2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 167 \cdot 89230753j + \\ &\quad + 61 \cdot 1451 \cdot 1947517003357)X^{18} - (2^2 \cdot 5 \cdot 281 \cdot 271409j + \\ &\quad + 2^2 \cdot 257 \cdot 4519 \cdot 215268377)\gamma_2^2 X^{17} - (11 \cdot 1521767522141j - \\ &\quad - 2^4 \cdot 13 \cdot 47 \cdot 379 \cdot 631 \cdot 964927)\gamma_2 X^{16} + (5 \cdot 323087j^2 - \\ &\quad - 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 25374359118707j + 2 \cdot 3^2 \cdot 1059372058806387173)X^{15} - \\ &- (2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 12499228333j^2 + 2 \cdot 5 \cdot 12550463191761367)\gamma_2^2 X^{14} - \\ &- (2j^2 + 2 \cdot 7 \cdot 37^2 \cdot 113068687231j - \\ &\quad - 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 419 \cdot 95713 \cdot 1329642037)\gamma_2 X^{13} - (2^2 \cdot 5 \cdot 127 \cdot 269 \cdot 33941j^2 + \\ &\quad + 2^4 \cdot 3 \cdot 1756224015730421j + 5 \cdot 67 \cdot 16865457693852685 99)X^{12} - \\ &- (2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 149 \cdot 257 \cdot 12113j - 2^3 \cdot 26249 \cdot 76543 \cdot 640175807)\gamma_2^2 X^{11} - \\ &- (2^4 \cdot 7^4 \cdot 431j^2 + 8192781137285431 1j + \\ &\quad + 2^3 \cdot 3 \cdot 307 \cdot 3011 \cdot 773792094473)\gamma_2 X^{10} + (2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 661 \cdot 3221 \cdot 9181j^2 + \\ &\quad + 2^3 \cdot 3^5 \cdot 457 \cdot 9844513084661j - \\ &\quad - 2^2 \cdot 11 \cdot 137 \cdot 173 \cdot 983 \cdot 1568741241649)X^9 - \\ &- (5 \cdot 7 \cdot 17j^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 43 \cdot 38113 \cdot 9999901j + \\ &\quad + 23 \cdot 41 \cdot 1721 \cdot 2683 \cdot 25111 \cdot 2799893)\gamma_2^2 X^8 - (2^2 \cdot 19 \cdot 73 \cdot 2023837j^2 - \\ &\quad - 2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 89 \cdot 20778742410493j - \\ &\quad - 2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 27767 \cdot 668750826704353)\gamma_2 X^7 - (2^2 \cdot 5 \cdot 1424987375831j^2 + \\ &\quad + 2^4 \cdot 5 \cdot 127 \cdot 850347940654819j + 3^3 \cdot 349 \cdot 95233 \cdot 1672940658841 3)X^6 + \\ &+ (2 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 19309j^2 - 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 16644548101j + \\ &\quad + 2 \cdot 3 \cdot 977 \cdot 10020756968429657)\gamma_2^2 X^5 - (2^4 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 1098443j^2 + \\ &\quad + 7 \cdot 19 \cdot 151 \cdot 1283 \cdot 9281 \cdot 47657j + 2^3 \cdot 605252159822652962 3)\gamma_2 X^4 - \\ &- (2^2 \cdot 5 \cdot 31j^3 - 5 \cdot 3191 \cdot 5266969j^2 + 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 56437 \cdot 295748287j - \\ &\quad - 2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 2311 \cdot 24202155897949)X^3 - (5 \cdot 47 \cdot 401j^2 + \\ &\quad + 2^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 1060223j + 31 \cdot 953 \cdot 56227133)\gamma_2^2 X^2\} - (j^3 - 2 \cdot 17 \cdot 73j^2 + \\ &\quad + 1499831j - 2 \cdot 3 \cdot 22204121)\gamma_2 X + 41 = 0. \end{aligned}$$

3.3. Multiplikatorgleichung für $p \equiv 7$ (12). In diesem Fall tritt die Funktion γ_3, aber nicht γ_2 *direkt* in der Multiplikatorgleichung auf.

Multiplikatorgleichung für $p = 31$. Unter Beachtung der Tatsache, daß $\gamma_3^2 = j - 1728$ ist, kann man die Multiplikatorgleichung so schreiben:

$$\begin{aligned} X^{32} &+ A_1(j)\gamma_3 X^{31} + A_2(j)X^{30} + A_3(j)\gamma_3 X^{29} + A_4(j)X^{28} + A_5(j)\gamma_3 X^{27} + \\ &+ A_6(j)X^{26} + A_7(j)\gamma_3 X^{25} + A_8(j)X^{24} + A_9(j)\gamma_3 X^{23} + A_{10}(j)X^{22} + \\ &+ A_{11}(j)\gamma_3 X^{21} + A_{12}(j)X^{20} + A_{13}(j)\gamma_3 X^{19} + A_{14}(j)X^{18} + \\ &+ A_{15}(j)\gamma_3 X^{17} + A_{16}(j)X^{16} + A_{17}(j)\gamma_3 X^{15} + A_{18}(j)X^{14} + \\ &+ A_{19}(j)\gamma_3 X^{13} + A_{20}(j)X^{12} + A_{21}(j)\gamma_3 X^{11} + A_{22}(j)X^{10} + \\ &+ A_{23}(j)\gamma_3 X^9 + A_{24}(j)X^8 + A_{25}(j)\gamma_3 X^7 + A_{26}(j)X^6 + A_{27}(j)\gamma_3 X^5 + \\ &+ A_{28}(j)X^4 + A_{29}(j)\gamma_3 X^3 + A_{30}(j)X^2 + A_{31}(j)\gamma_3 X - 31 = 0, \end{aligned}$$

wobei $A_N(j) \in \mathbf{Z}[j]$ für alle $N = 1, 2, \ldots, 31$.

Man berechnet jetzt die q-Entwicklungen der Wurzeln:

$$X_{31}(\omega) := 31\,\frac{\eta^2(31\omega)}{\eta^2(\omega)} = 31 q^{5/2}\cdot\prod_{\substack{n=1\\ 31\nmid n}}^{\infty}(1-q^n)^{-2}$$

und

$$X_{31_\nu}(\omega) := -\frac{\eta^2\left(\dfrac{12\nu+\omega}{31}\right)}{\eta^2(\omega)} = -q^{-5/62}\cdot\zeta_{31}^{\nu}\prod_{\substack{n=1\\ 31\nmid n}}^{\infty}\left(1-(\zeta_{31}^{12\nu}q^{1/31})^n\right)^2.$$

Wie früher erhält man den kleinsten Exponenten der q-Entwicklung von $A_N(j)$, $N=1,2,\ldots,41$ unter Berücksichtigung von (3.1.4) approximativ als: $-5N/62+t/2$, wobei $t=0,1$, je nachdem ob $N\equiv 0,1\ (2)$ ist.

Ist dieser Exponent positiv, so ist der zugehörige Koeffizient der Multiplikatorgleichung gleich Null. Damit ergibt sich:

$$A_1(j) = A_3(j) = A_5(j) = 0$$

und wie früher

$$A_N(j) = a_N\in\mathbf{Z}\quad \text{für}\quad N = 2,4,6,7,8,9,10,11,12,13,15 \text{ und } 17$$

$$A_N(j) = a_N j + b_N \quad\text{mit}\quad a_N, b_N\in\mathbf{Z}$$
$$\text{für}\quad N = 14,16,18,19,20,21,22,23,24,25,27 \text{ und } 29$$

$$A_N(j) = a_N j^2 + b_N j + c_N \quad\text{mit}\quad a_N, b_N, c_N\in\mathbf{Z}$$
$$\text{für}\quad N = 26,28,30 \text{ und } 31.$$

Also sind hier 48 unbekannte ganze rationale Zahlen zu bestimmen. Dazu braucht man die Koeffizienten der q-Entwicklung bis q^{75} von:

$$X_{31}^m \quad\text{für}\quad m = 2,4,6,\ldots,30,$$

und

$$X_{31}^m\gamma_3^s \quad\text{für}\quad \begin{cases} s=1, & m=1,3,5,\ldots,25,\\ s=2, & m=2,4,6,\ldots,18,\\ s=3, & m=1,3,5,\ldots,13,\\ s=4, & m=2,4,6,\\ s=5, & m=1.\end{cases}$$

Löst man das zugehörige lineare Gleichungssystem, so findet man die

Multiplikatorgleichung für $p = 31$

$$\begin{aligned}
X^{32} &+ 31\{2X^{30} - 15X^{28} - 4202X^{26} + 11\gamma_3 X^{25} - 80401X^{24} + 1602\gamma_3 X^{23} +\\
&+ 2364756X^{22} + 30588\gamma_3 X^{21} + 95726890X^{20} - 1758726\gamma_3 X^{19} +\\
&+ (1088\gamma_3^2 + 153859016)X^{18} - 73788576\gamma_3 X^{17} + (185194\gamma_3^2 -\\
&- 32187296898)X^{16} - 49887990\gamma_3 X^{15} + (19800219\gamma_3^2 -\\
&- 337057755224)X^{14} - (2\gamma_3^2 - 33749270294)\gamma_3 X^{13} + (506305034\gamma_3^2 +\\
&+ 2672782228634)X^{12} + (23131\gamma_3^2 + 427483248210)\gamma_3 X^{11} +\\
&+ (13156678521\gamma_3^2 + 6058596377604)X^{10} - (4138166\gamma_3^2 +\\
&+ 1876496422560)\gamma_3 X^9 + (108231461458\gamma_3^2 + 427578948303103)X^8 +\\
&+ (90380504\gamma_3^2 - 15058563327630)\gamma_3 X^7 + (66\gamma_3^4 + 375168038307\gamma_3^2 -\\
&- 799549642386706)X^6 - (235920686\gamma_3^2 - 2154657591250 8)\gamma_3 X^5 +\\
&+ (5175\gamma_3^4 + 8666712701 0\gamma_3^2 + 369156284111481)X^4 + (25942243\gamma_3^2 -\\
&- 393232563126)\gamma_3 X^3 + (1770\gamma_3^4 + 28173760\gamma_3^2 + 45476485114)X^2\} +\\
&+ (\gamma_3^4 + 2458\gamma_3^2 + 1320317)\gamma_3 X - 31 = 0.
\end{aligned}$$

Multiplikatorgleichung für $p=43$. Die Multiplikatorgleichung hat eine ähnliche Form wie für $p=31$. Mit $A_N(j)\in\mathbf{Z}[j]$ für $N=1,2,\ldots$ $\ldots,43$ lautet sie:

$$X^{44} + \sum_{i=0}^{20}\left[A_{2i+1}(j)\gamma_3 X^{44-2i-1} + A_{2i+2}(j)X^{44-2i-2}\right] + A_{43}(j)\gamma_3 X - 43 = 0.$$

Die q-Entwicklung der Wurzeln ist

$$X_{43}(\omega) := 43\,\frac{\eta^2(43\omega)}{\eta^2(\omega)} = 43 q^{7/5}\prod_{\substack{n=1\\ 43\nmid n}}^{\infty}(1-q^n)^{-2}$$

und

$$X_{43_\nu}(\omega) := -\frac{\eta^2\left(\dfrac{\omega+12\nu}{43}\right)}{\eta^2(\omega)} = -\zeta_{43}^{\nu}q^{-7/86}\prod_{\substack{n=1\\ 43\nmid n}}^{\infty}\left(1-(\zeta_{43}^{12\nu}q^{1/43})^n\right)^2,$$
$$\nu = 0,1,\ldots,42.$$

Also ist der kleinste Exponent in der q-Entwicklung von $A_N(j)$, $N=1,2,\ldots,43$ approximativ $-7N/86+t/2$, wobei $t=0,1$, je nachdem ob $N\equiv 0,1\ (2)$ ist. Man findet jetzt leicht, daß

$$A_1(j) = A_3(j) = A_5(j) = 0$$

und

$$A_N(j) = a_N\in\mathbf{Z}\quad\text{für}\quad N = 2,4,6,7,8,9,10,11,12,13,15 \text{ und } 17,$$

$$A_N(j) = a_N j + b_N \quad\text{mit}\quad a_N, b_N\in\mathbf{Z}$$
$$\text{für}\quad N = 14,16,18,19,20,21,22,23,24,25,27 \text{ und } 29,$$

$$A_N(j) = a_N j^2 + b_N j + c_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N, c_N \in \boldsymbol{Z}$$
$$\text{für} \quad N = 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39 \text{ und } 41,$$
$$A_N(j) = a_N j^3 + b_N j^2 + c_N j + d_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N, c_N, d_N \in \boldsymbol{Z}$$
$$\text{für} \quad N = 38, 40, 42 \text{ und } 43 \text{ ist.}$$

Es gibt 88 Unbekannte. Um diese zu bestimmen, benötigt man die Koeffizienten der q-Entwicklung bis q^{147} von

$$X_{43}^m \quad \text{für} \quad m = 2, 4, 6, \ldots, 42,$$

und

$$X_{43}^m \gamma_3^s \quad \text{für} \quad \begin{cases} s = 1, & m = 1, 3, 5, \ldots, 37, \\ s = 2, & m = 2, 4, 6, \ldots, 30, \\ s = 3, & m = 1, 3, 5, \ldots, 25, \\ s = 4, & m = 2, 4, 6, \ldots, 18, \\ s = 5, & m = 1, 3, 5, \ldots, 13, \\ s = 6, & m = 2, 4, 6, \\ s = 7, & m = 1. \end{cases}$$

Man bildet jetzt das System, dessen Lösung die Koeffizienten der Multiplikatorgleichung liefert:

Multiplikatorgleichung für $p = 43$ (mit Abspaltung der Primzahlpotenzen q^a, $q < 50000$)

$$\begin{aligned}
X^{44} + 43\{&-2X^{42} + 2\cdot 3\cdot 79X^{40} - 2\cdot 13\cdot 23\cdot 67X^{38} - 2\cdot 13\gamma_3 X^{37} + 13\cdot 214351X^{36} + \\
&+ 3\cdot 1621\gamma_3 X^{35} - 2^2\cdot 3^2\cdot 263\cdot 16823X^{34} - 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 5527\gamma_3 X^{33} + \\
&+ 3\cdot 5\cdot 11\cdot 17\cdot 19\cdot 31\cdot 4729X^{32} + 2\cdot 11^2\cdot 17\cdot 14389\gamma_3 X^{31} + \\
&+ (23\cdot 619\gamma_3^2 - 2\cdot 3\cdot 113\cdot 481722359)X^{30} - 2\cdot 3\cdot 13\cdot 349\cdot 148933\gamma_3 X^{29} - \\
&- (2\cdot 1527457\gamma_3^4 - 2\cdot 3^2\cdot 677\cdot 10103\cdot 96013)X^{28} + 3\cdot 7\cdot 10148294291\gamma_3 X^{27} + \\
&+ (2\cdot 3^2\cdot 23376959\gamma_3^2 - 2^4\cdot 3\cdot 97\cdot 78435890849)X^{26} + (5\cdot 7\gamma_3^2 - \\
&\quad - 2\cdot 127\cdot 37640566013)\gamma_3 X^{25} - (2^2\cdot 17\cdot 113\cdot 4041773\gamma_3^2 - \\
&\quad - 3\cdot 5^2\cdot 13441\cdot 9563075243)X^{24} - (2\cdot 1701239\gamma_3^2 - \\
&\quad - 2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 1748291038567)\gamma_3 X^{23} + (2\cdot 43\cdot 947\cdot 26200747\gamma_3^2 - \\
&\quad - 2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 4214304555557533)X^{22} - (2\cdot 13\cdot 19\cdot 43\cdot 2969\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2^5\cdot 3\cdot 43\cdot 2582232253241)\gamma_3 X^{21} - (2\cdot 5\cdot 17\cdot 37\cdot 43201\cdot 303493\gamma_3^2 - \\
&\quad - 3\cdot 1286941240936069687)X^{20} + (2\cdot 3\cdot 5\cdot 113\cdot 20689883\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2^2\cdot 6566998956065641 9)\gamma_3 X^{19} + (2^5\cdot 7\cdot 97\gamma_3^4 + \\
&\quad + 11\cdot 19\cdot 23\cdot 41\cdot 14835691709\gamma_3^2 - 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 2329059510175846 73)X^{18} + \\
&+ (8709802527739\gamma_3^2 - 2^5\cdot 3\cdot 545052008292214 19)\gamma_3 X^{17} + \\
&+ (2\cdot 7^2\cdot 59^2\cdot 727\gamma_3^4 - 2^5\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 5009\cdot 204268919\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2\cdot 3^4\cdot 3954767456639519851)X^{16} - (2^2\cdot 7\cdot 4219800558989\gamma_3^2 - \\
&\quad - 2\cdot 3^2\cdot 18451\cdot 2251418834067 43)\gamma_3 X^{15} + (2\cdot 57505456699\gamma_3^4 + \\
&\quad + 5\cdot 359\cdot 2659\cdot 3991999197 59\gamma_3^2 - \\
&\quad - 2\cdot 3\cdot 11\cdot 44971\cdot 1984306064829007)X^{14} - \\
&- (2\gamma_3^4 + 2^3\cdot 2293\cdot 372370958363\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2\cdot 31\cdot 3163\cdot 3579914496956051)\gamma_3 X^{13} + (3\cdot 13\cdot 19\cdot 8287\cdot 1801727\gamma_3^4 - \\
&\quad - 2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 53\cdot 900724781729051\gamma_3^2 + \\
&\quad + 3\cdot 5\cdot 131\cdot 22477143792906966649)X^{12} + (3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 1319\gamma_3^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad - 2^2\cdot 7\cdot 71\cdot 131\cdot 9491\cdot 22076407\gamma_3^2 + \\
&\quad + 3\cdot 7^3\cdot 29\cdot 587\cdot 2659\cdot 108726880271)\gamma_3 X^{11} + \\
&+ (2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 373\cdot 6030173627\gamma_3^4 + 2\cdot 99129827154191615959\gamma_3^2 - \\
&\quad - 2^2\cdot 3^2\cdot 4078910319167023 9075417)X^{10} - (2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 251\cdot 12983\gamma_3^4 - \\
&\quad - 5\cdot 787\cdot 174104886075629\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2\cdot 3\cdot 19\cdot 223\cdot 409\cdot 719\cdot 3341926661147)\gamma_3 X^9 + \\
&+ (3\cdot 67\cdot 577\cdot 160417599 61\gamma_3^4 - 2^2\cdot 17\cdot 19^2\cdot 131\cdot 1787\cdot 78951290597\gamma_3^2 + \\
&\quad + 5\cdot 13\cdot 14222894310024057108943)X^8 + (7\cdot 17\cdot 19\cdot 1327\cdot 7583\gamma_3^4 - \\
&\quad - 2\cdot 3\cdot 11^2\cdot 3212028051130021\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2\cdot 16525111668451874725877)\gamma_3 X^7 + (2\cdot 11\cdot 13\gamma_3^6 + \\
&\quad + 2\cdot 11\cdot 2699\cdot 32233\cdot 978323\gamma_3^4 + 2\cdot 3^2\cdot 1567\cdot 1085175590172418 9\gamma_3^2 - \\
&\quad - 2\cdot 5\cdot 113\cdot 15569\cdot 782732716626 2957)X^6 - \\
&- (2^2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 67\cdot 499\cdot 3583\gamma_3^4 - 2\cdot 13\cdot 23297017176994087\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 349\cdot 2398492413874535 9)\gamma_3 X^5 + (2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 43\gamma_3^6 + \\
&\quad + 2\cdot 7\cdot 5806904391053\gamma_3^4 + 2\cdot 59\cdot 1847\cdot 29171528259043\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2\cdot 3\cdot 2552725998950361282179)X^4 + (3^2\cdot 113\cdot 359\cdot 5113\gamma_3^4 - \\
&\quad - 2\cdot 180385120340027\gamma_3^2 + 3\cdot 5\cdot 461\cdot 5443\cdot 3695123223 1)\gamma_3 X^3 + \\
&+ (2\cdot 5\cdot 1223\gamma_3^6 + 2^5\cdot 7\cdot 937\cdot 5849\gamma_3^4 + 6679\cdot 8363\cdot 106949\gamma_3^2 + \\
&\quad + 2^2\cdot 17\cdot 59\cdot 61\cdot 27694153849)X^2\} + (\gamma_3^6 + 2\cdot 1721\gamma_3^4 + 5\cdot 7\cdot 101203\gamma + \\
&\quad + 2\cdot 4999\cdot 98939)\gamma_3 X - 43 = 0.
\end{aligned}$$

3.4. Multiplikatorgleichungen für $p \equiv 11(12)$. Für $p \equiv 11(12)$ treten γ_2 und γ_3 direkt in der Multiplikatorgleichung auf. Dieser Fall führt zu den bisher schwierigsten Rechnungen.

Auch bei unserer Methode zur Lösung des Klassenzahl 2 Problems ergaben sich in dieser Situation beträchtliche Komplikationen; so war es schon für $p = 11$ unmöglich, eine diophantische Gleichung zu erhalten.

Multiplikatorgleichung für $p = 47$: Genauso wie früher hat die Multiplikatorgleichung die folgende Gestalt: (beachte: $\gamma_2^3 = j$, $\gamma_3^2 = j - 1728$!)

$$\begin{aligned}
X^{48} &+ A_1(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^{47} + A_2(j)\gamma_2 X^{46} + A_3(j)\gamma_3 X^{45} + A_4(j)\gamma_2^2 X^{44} + \\
&+ A_5(j)\gamma_2\gamma_3 X^{43} + A_6(j)X^{42} + A_7(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^{41} + A_8(j)\gamma_2 X^{40} + \\
&+ A_9(j)\gamma_3 X^{39} + A_{10}(j)\gamma_2^2 X^{38} + A_{11}(j)\gamma_2\gamma_3 X^{37} + A_{12}(j)X^{36} + \\
&+ A_{13}(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^{35} + A_{14}(j)\gamma_2 X^{34} + A_{15}(j)\gamma_3 X^{33} + A_{16}(j)\gamma_2^2 X^{32} + \\
&+ A_{17}(j)\gamma_2\gamma_3 X^{31} + A_{18}(j)X^{30} + A_{19}(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^{29} + A_{20}(j)\gamma_2 X^{28} + \\
&+ A_{21}(j)\gamma_3 X^{27} + A_{22}(j)\gamma_2^2 X^{26} + A_{23}(j)\gamma_2\gamma_3 X^{25} + A_{24}(j)X^{24} + \\
&+ A_{25}(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^{23} + A_{26}(j)\gamma_2 X^{22} + A_{27}(j)\gamma_3 X^{21} + A_{28}(j)\gamma_2^2 X^{20} + \\
&+ A_{29}(j)\gamma_2\gamma_3 X^{19} + A_{30}(j)X^{18} + A_{31}(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^{17} + A_{32}(j)\gamma_2 X^{16} + \\
&+ A_{33}(j)\gamma_3 X^{15} + A_{34}(j)\gamma_2^2 X^{14} + A_{35}(j)\gamma_2\gamma_3 X^{13} + A_{36}(j)X^{12} + \\
&+ A_{37}(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^{11} + A_{38}(j)\gamma_2 X^{10} + A_{39}(j)\gamma_3 X^9 + A_{40}(j)\gamma_2^2 X^8 + \\
&+ A_{41}(j)\gamma_2\gamma_3 X^7 + A_{42}(j)X^6 + A_{43}(j)\gamma_2^2\gamma_3 X^5 + A_{44}(j)\gamma_2 X^4 + \\
&+ A_{45}(j)\gamma_3 X^3 + A_{46}(j)\gamma_2^2 X^2 + A_{47}(j)\gamma_2\gamma_3 X - 47 = 0
\end{aligned}$$

mit $A_N(j) \in \boldsymbol{Z}[j]$ für $N = 1, \ldots, 47$.

Um die genaue Form der Koeffizienten $A_N(j)$, $N = 1, 2, \ldots, 47$ zu bestimmen, braucht man die q-Entwicklung der Wurzeln der Multiplikatorgleichung. Diese sind:

$$X_{47}(\omega) := 47\,\frac{\eta^2(47\omega)}{\eta^2(\omega)} = 47 q^{23/6} \prod_{\substack{n=1\\ 47\nmid n}}^{\infty} (1-q^n)^{-2}, \qquad q = e^{2\pi i\omega},\ \omega \in H$$

und

$$X_{47_\nu}(\omega) := -\frac{\eta^2\left(\dfrac{\omega+12\nu}{47}\right)}{\eta^2(\omega)} = -\zeta_{47}^{\nu} q^{-23/282} \prod_{\substack{n=1\\ 47\nmid n}}^{\infty} \left(1-(\zeta_{47}^{12\nu} q^{1/47})^n\right)^2.$$

Der kleinste Exponent in der q-Entwicklung von $A_N(j)$, $N = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 47$ ist nach (3.1.4) approximativ $-23N/182 + t/6$, wobei $t = 0, 7, 2, 3, 4, 5$, je nachdem ob $N \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\ (6)$.

Daraus folgt:

$$A_1(j) = A_2(j) = A_3(j) = A_4(j) = A_5(j) = A_7(j) = A_{13}(j) = 0$$

und

$$A_N(j) = a_N \in \mathbf{Z} \quad \text{für} \quad N = 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19 \text{ und } 25,$$

$$A_N(j) = a_N j + b_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N \in \mathbf{Z}$$
$$\text{für} \quad N = 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31 \text{ und } 37,$$

$$A_N(j) = a_N j^2 + b_N j + c_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N, c_N \in \mathbf{Z}$$
$$\text{für} \quad N = 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41 \text{ und } 43,$$

$$A_N(j) = a_N j^3 + b_N j^2 + c_N j + d_N \quad \text{mit} \quad a_N, b_N, c_N, d_N \in \mathbf{Z}$$
$$\text{für} \quad N = 42, 44, 45, 46 \text{ und } 47.$$

Es gibt 89 ganze rationale Unbekannte. Wir ersetzen in $A_N(j)$, j durch γ_2^3 und berechnen die Koeffizienten der q-Entwicklung bis q^{161} von

$$X_{47}^m \qquad m = 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,$$

$$X_{47}^m\gamma_2^s \quad \text{mit} \quad \begin{cases} s = 1, & m = 4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28,\ 34,\ 40,\\ s = 2, & m = 2,\ 8,\ 14,\ 20,\ 26,\ 32,\ 38,\\ s = 3, & m = 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\\ s = 4, & m = 4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28,\\ s = 5, & m = 2,\ 8,\ 14,\ 20,\ 26,\\ s = 6, & m = 6,\ 12,\ 18,\\ s = 7, & m = 4,\ 10,\ 16,\\ s = 8, & m = 2,\ 8,\ 14,\\ s = 9, & m = 6,\\ s = 10, & m = 4,\\ s = 11, & m = 2; \end{cases}$$

$$X_{47}^m\gamma_3 \qquad m = 3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27,\ 33,\ 38,$$

$$X_{47}^m\gamma_2^s\gamma_3 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} s = 1, & m = 1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37,\\ s = 2, & m = 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\\ s = 3, & m = 3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27,\\ s = 4, & m = 1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\\ s = 5, & m = 5,\ 11,\ 17,\\ s = 6, & m = 3,\ 9,\ 15,\\ s = 7, & m = 1,\ 7,\ 13,\\ s = 8, & m = 5,\\ s = 9, & m = 3,\\ s = 10, & m = 1. \end{cases}$$

Die Lösung des Systems, welches man mit Hilfe dieser Koeffizienten findet, ergibt die

Multiplikatorgleichung für $p = 47$ (mit Primzerlegung der numerischen Koeffizienten bis 100000)

$$\begin{aligned}
X^{48} + 47\,\{&2^3\cdot 3^3 X^{42} - 2^4\cdot 233\gamma_2 X^{40} + 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 17\gamma_3 X^{39} - 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 17\gamma_2^2 X^{38} -\\
&- 2\cdot 7^2\gamma_2\gamma_3 X^{37} - 2^2\cdot 3529\cdot 15787 X^{36} - 2^5\cdot 3^4\cdot 20743\gamma_2 X^{34} +\\
&+ 2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 127\gamma_2 X^{33} - 2^3\cdot 3\cdot 16150237\gamma_2^2 X^{32} -\\
&- 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 79\cdot 90217\gamma_2\gamma_3 X^{31} + (2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 376801 j -\\
&\quad - 2^3\cdot 3^4\cdot 19\cdot 149\cdot 227\cdot 16547) X^{30} - 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 31\cdot 113\cdot 197\gamma_2^2\gamma_3 X^{29} +\\
&+ (2\cdot 17^2\cdot 31\cdot 47\cdot 97 j + 2^4\cdot 3\cdot 523397473279)\gamma_2 X^{28} + (2\cdot 499\cdot 4663 j -\\
&\quad - 2^2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 63653296543)\gamma_3 X^{27} + (11^2\cdot 953 j -\\
&\quad - 2^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 29\cdot 8595121313)\gamma_2^2 X^{26} +\\
&+ (43 j - 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 19\cdot 29\cdot 2141\cdot 467651)\gamma_2\gamma_3 X^{25} -\\
&- (2^3\cdot 11\cdot 47\cdot 11056550359 j - 2\cdot 3\cdot 1359989195469975 11) X^{24} +\\
&+ 2^4\cdot 3^3\cdot 17\cdot 23\cdot 47\cdot 5354729\gamma_2^2\gamma_3 X^{23} + (2^3\cdot 3^2\cdot 658990764431 j +\\
&\quad + 2^6\cdot 3^4\cdot 101\cdot 129948654487)\gamma_2^2 X^{22} + (2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 19\cdot 323946613 j +\\
&\quad + 2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 2161122689437)\gamma_3 X^{21} + (2^3\cdot 19\cdot 143091729017 j +\\
&\quad + 2^4\cdot 3\cdot 31\cdot 41\cdot 23011\cdot 72719\cdot 94427)\gamma_2^2 X^{20} +\\
&+ (2\cdot 5\cdot 101\cdot 467\cdot 2113\cdot 2729 j + 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 38402414404955771)\gamma_2\gamma_3 X^{19} -\\
&- (2^2\cdot 11\cdot 7309\cdot 899531 j^2 - 2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 643\cdot 65006171 j +\\
&\quad + 2^3\cdot 3^4\cdot 29\cdot 31\cdot 266351490548797 21) X^{18} - (2\cdot 3\cdot 8551601257 j -\\
&\quad - 2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 13\cdot 607\cdot 13619780188379)\gamma_2^2\gamma_3 X^{17} +\\
&+ (2^3\cdot 5\cdot 11\cdot 53\cdot 61\cdot 1303 j^2 + 2^2\cdot 615441736046264 3527 j +\\
&\quad + 2^4\cdot 3\cdot 7^2\cdot 29\cdot 27624334567568287 1)\gamma_2 X^{16} - (2^2\cdot 3\cdot 1056353 j^2 -\\
&\quad - 2^2\cdot 7\cdot 29\cdot 22702786116530423 j -\\
&\quad - 2^2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 1259\cdot 41109562080132583)\gamma_3 X^{15} + (2^3\cdot 2143 j^2 +\\
&\quad + 2\cdot 7\cdot 139\cdot 5887039865916191 j +\\
&\quad + 2^2\cdot 3^2\cdot 373\cdot 409\cdot 5903\cdot 23899\cdot 71951809)\gamma_2^2 X^{14} -\\
&- (2 j^2 - 2\cdot 17\cdot 19\cdot 53\cdot 67073\cdot 2143304689 j -\\
&\quad - 2\cdot 3\cdot 79\cdot 17341\cdot 7095443023680161)\gamma_2\gamma_3 X^{13} +\\
&+ (67\cdot 2002355452161162 1 j^2 + 2^3\cdot 5^2\cdot 13\cdot 1291\cdot 9491\cdot 962837040229 j +\\
&\quad + 2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 2803\cdot 28349\cdot 5622693975582353) X^{12} +\\
&+ (2^3\cdot 5^2\cdot 1132329783920113 j +\\
&\quad + 2^4\cdot 3^3\cdot 23\cdot 97\cdot 151\cdot 86263\cdot 2194825211)\gamma_2^2\gamma_3 X^{11} +\\
&+ (2\cdot 5\cdot 13\cdot 31\cdot 5820030469829 j^2 + 2^3\cdot 3^2\cdot 449\cdot 2393\cdot 116104330591019 j +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2^5\cdot 3^4\cdot 1277\cdot 5381\cdot 2167073948705441)\gamma_2 X^{10}+\\
&+(2\cdot 23\cdot 337\cdot 349\cdot 275460839j^2-2^2\cdot 3^3\cdot 167\cdot 53518162511434601j+\\
&+2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11\cdot 61\cdot 131\cdot 6899\cdot 10997335316479)\gamma_3 X^9+\\
&+(11\cdot 5368675003963j^2-2^3\cdot 7^2\cdot 19\cdot 3643\cdot 25749906918721j+\\
&+2^3\cdot 3\cdot 7^2\cdot 89\cdot 271\cdot 4373\cdot 85256818141241)\gamma_2^2 X^8+\\
&+(3\cdot 73\cdot 499\cdot 13673809j^2-2\cdot 643\cdot 2639560606919936 3j+\\
&+2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 29347\cdot 829722971 01790639)\gamma_2\gamma_3 X^7+\\
&+(3^3\cdot 14731\cdot 61871j^3+2^2\cdot 1187\cdot 8731\cdot 11621\cdot 12642131j^2+\\
&+2\cdot 3^3\cdot 19\cdot 11423\cdot 24616342399180943j-\\
&-2^3\cdot 3^3\cdot 7\cdot 1049\cdot 1523\cdot 14585443436005 4471)X^6+(3\cdot 17\cdot 5208887j^2-\\
&-2\cdot 3\cdot 7\cdot 48541\cdot 624277524 79j+\\
&+2^2\cdot 3\cdot 5^4\cdot 7\cdot 47\cdot 10663\cdot 81359\cdot 7127629)\gamma_2^2\gamma_3 X^5+(7\cdot 491\cdot 541j^3+\\
&+2^3\cdot 7\cdot 23\cdot 401\cdot 1303578893j^2+2\cdot 17\cdot 35386040971404 11881j+\\
&+2^4\cdot 101\cdot 467\cdot 35638413364347 7909)\gamma_2 X^4+(2\cdot 5\cdot 811j^3-\\
&-2^2\cdot 3\cdot 29\cdot 31\cdot 1409\cdot 54767j^2+2\cdot 5\cdot 11\cdot 37\cdot 311\cdot 503\cdot 1271477 11j-\\
&-2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 30661\cdot 88193886243583)\gamma_3 X^3+(2^2\cdot 5j^3+2^3\cdot 3457\cdot 4723j^2+\\
&+1052497850681j+2^2\cdot 3\cdot 32422914953993)\gamma_2^2 X^2\}+(j^3-2\cdot 5\cdot 199j^2+\\
&+13^2\cdot 5381j-2\cdot 28003499)\gamma_2\gamma_3 X-47=0.
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] J. A. Antoniadis, *Über die Kennzeichnung zweiklassiger imaginär-quadratischer Zahlkörper durch Lösungen diophantischer Gleichungen*, Erscheint demnächst in Crelle's Journal.

[2] M. Deuring, *Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation*, Enzykl. der Math. Wissensch. Bd. I, Teil 2 C, Teubner, Stuttgart 1958, S. 1–15.

[3] M. A. Kenku, *The modular curves $X_0(65)$ and $X_0(91)$ and rational isogeny*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), S. 15–20.

[4] — *The modular curve $X_0(169)$ and rational isogeny*, J. London Math. Soc. (2) 22 (1980), S. 239–244.

[5] L. Kiepert, *Über Theilung und Transformation der elliptischen Funktionen*, Math. Ann. 26 (1886), S. 369–454.

[6] F. Klein, *Über Multiplikatorgleichungen*, ibid. 15 (1879), S. 86–88.

[7] — *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*, Vorlesungen Göttingen SS 1896, Teubner 1907, S. 60–68.

[8] C. Meyer, *Imaginäre bizyklische biquadratische Zahlkörper als Klassenkörper*, Sympos. Math. 15 (1975), S. 365–387.

[9] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. 3, 2. Auflage, Braunschweig Vieweg 1908, S. 248–256.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT TESSALONIKI
Griechenland

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
Weyertal 86-90
5000 Köln 41, BRD

Eingegangen am 5.4.1982 (1298)

ACTA ARITHMETICA
XLIII (1984)

Sur le prolongement des fonctions ζ associées a un système de nombres premiers généralisés de Beurling

par

J.-P. Borel (Limoges)

Soit $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ un système de nombres premiers généralisés de Beurling (ou G.P.S.), c'est-à-dire une suite de nombres réels tels que:

$$1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_i \leqslant \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} p_i = +\infty.$$

Soit $\mathscr{N}$ le semi-groupe multiplicatif libre engendré par $\mathscr{P}$. On définit alors la fonction ζ associée à $\mathscr{P}$ par :

$$\zeta(s) = \zeta_{\mathscr{P}}(s) = \sum_{b\in\mathscr{N}} b^{-s} = \prod_{p\in\mathscr{P}} (1-p^{-s})^{-1}.$$

Si $\mathscr{P} = \boldsymbol{P}$ est l'ensemble des nombres premiers usuels, la fonction $\zeta_{\boldsymbol{P}}$ est la fonction ζ de Riemann. Nous dirons que $\mathscr{P} \in$ T.N.P. is $\mathscr{P}$ vérifie le théorème des nombres premiers, c'est-à-dire :

$$\pi(x) = \pi_{\mathscr{P}}(x) = \sum_{p_i\leqslant x} 1 = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Si $\mathscr{P} \in$ T.N.P., $\zeta_{\mathscr{P}}$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et non nulle sur ce domaine, le produit eulerien étant convergent. Le problème du prolongement analytique de $\zeta_{\mathscr{P}}$ à gauche de la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$ est intéressant : il est bien connu que le reste $\pi_{\boldsymbol{P}}(x) - \mathrm{Li}(x)$ (1) est lie aux zéros de $\zeta_{\boldsymbol{P}}$ dans le domaine $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1$. $\zeta_{\boldsymbol{P}}$ a un prolongement méromorphe sur $\boldsymbol{C}$, mais on sait construire $\mathscr{P}_0 \in$ T.N.P. tel que $\zeta_{\mathscr{P}_0}$ n'a pas de prolongement à gauche de la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$ (Ryavec [3]). Cela indique que le prolongement de ζ peut être très divers. C'est ce que nous allons préciser, en nous intéressant aux domaines complexes sur lesquels ζ se prolonge, et aux zéros et pôles de ce prolongement.

(1) On rappelle que $\mathrm{Li}(x) = \mathrm{v.p.}\left(\int_0^x \frac{dt}{\log t}\right) = \int_e^x \frac{dt}{\log t} + C.$