ACTA ARITHMETICA
XLIII (1983)

Улучшение теоремы Харди–Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$

Ян Мозер (Братислава)

Пусть $N_0(T)$ обозначает количество нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, $t\in(0,T)$. Харди и Литтлвуд показали ([2], стр. 283), что имеет место оценка

(1) $$N_0(T+T^{1/2+\varepsilon})-N_0(T)>A(\varepsilon)T^{1/2+\varepsilon},\quad T\geqslant T_0(\varepsilon),\ \varepsilon>0.$$

В предлагаемой работе, пользуясь дискретным методом, получаем оценку

(2) $$N_0(T+T^{5/12}\psi\ln^3T)-N_0(T)>A(\psi)T^{5/12}\psi\ln^3T,$$

($\psi=\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция, $0<A(\psi)$ — постоянная зависящая от выбора ψ).

Показатель $5/12$ представляет собой 16,6 %-ое улучшение показателя $1/2$ в оценке Харди–Литтлвуда (1).

Напомним, что А. Сельберг ([7], стр. 46, Теорема А) получил оценку

$$N_0(T+T^{1/2+\varepsilon})-N_0(T)>A(\varepsilon)T^{1/2+\varepsilon}\ln T$$

и высказал гипотезу ([7], стр. 5), что показатель можно заменить числом $<1/2$. Следовательно, оценка (2) представляет собой первый шаг в этом направлении.

Кроме (2) мы получили новый результат в направлении Теоремы C А. Сельберга ([7], стр. 49).

Рукопись работы изучали в семинаре проф. А. А. Карацубы по аналитической теории чисел в Московском государственном университете. Выражаю большую благодарность проф. А. А. Карацубе за поддержку моих исследований по теории $\zeta(s)$.

I. Перечисление результатов

1. Пусть ([8], стр. 94, 383)

(3) $$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it),$$

(4) $$\vartheta(t)=-\tfrac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\ln\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}it)=\tfrac{1}{2}t\ln(t/2\pi)-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{8}\pi+O(1/t).$$

Пусть далее

$$\vartheta_1(t) = \tfrac{1}{2}t\ln(t/2\pi) - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{8}\pi \tag{5}$$

и $\{g_\nu\}$ обозначает последовательность определенную соотношением

$$\vartheta_1(g_\nu) = (\pi/2)\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Пусть

$$\omega = \frac{\pi}{\ln(T/2\pi)}, \quad U = T^{5/12}\psi\ln^3 T, \quad \ln T < M < \sqrt[3]{\psi}\ln T, \tag{7}$$

и

$$\bar{\nu} = \min\{\nu:\ g_\nu \in \langle T, T+U\rangle\},$$

$$\bar{\nu}+N = \max\{\nu:\ g_\nu \in \langle T, T+U\rangle\}, \tag{8}$$

$$\overline{\omega}_0 = \frac{\pi}{\ln(T/2\pi)} - \frac{\pi^2}{2}\,\frac{1}{T\ln^3(T/2\pi)} - \pi\,\frac{g_{\bar\nu}-T}{T\ln^2(T/2\pi)}, \tag{9}$$

$$Q = Q(T) = \frac{\pi}{T\ln^2(T/2\pi)}, \tag{10}$$

$$D(p) = \sum_{q=1}^{p}\{1-(1-Q)^q\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant N-1, \quad D(0) = 0. \tag{11}$$

Имеет место

Лемма A.

$$g_{\bar\nu+p+1} = g_{\bar\nu+1} + \overline{\omega}_0 p - \overline{\omega}_0 D(p) + O\left(\frac{U^3}{T^2\ln T}\right), \tag{12}$$

для $0 \leqslant p \leqslant N-1$.

Пусть

$$S_1(T, U, M) = \sum\sum_{m<n<P_0} \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T\leqslant g_\nu \leqslant T+U} \cos\left(g_\nu \ln\frac{n}{m} + \varphi_1\right), \tag{13}$$

где

$$\varphi_1 = k\omega\ln\frac{P_0}{m} - l\omega\ln\frac{P_0}{n}, \quad 0 \leqslant k, l \leqslant M, \ P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \tag{14}$$

(k, l — целые числа). Имеет место

Лемма B.

$$S_1(T, U, M) = O(MT^{5/12}\ln^3 T). \tag{15}$$

Пусть

$$S_2(T, U, M) = \sum\sum_{m,n<P_0} \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T\leqslant g_\nu \leqslant T+U} (-1)^\nu \cos\{g_\nu \ln(mn) - \varphi_2\}, \tag{16}$$

где

$$\varphi_2 = k\omega\ln\frac{P_0}{n} + l\omega\ln\frac{P_0}{m}. \tag{17}$$

Имеет место

Лемма C.

$$S_2(T, U, M) = O(T^{5/12}\ln^2 T). \tag{18}$$

2. Далее мы вводим следующую тройную сумму — дискретный аналог интегральной величины Харди–Литтлвуда:

$$J = J(T, U, M) = \sum_{T\leqslant g_\nu \leqslant T+U} \left\{\sum_{k=0}^{M} Z(g_\nu + \omega k)\right\}^2 = \tag{19}$$

$$= \sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leqslant g_\nu \leqslant T+U} Z(g_\nu+\omega k)Z(g_\nu+\omega l).$$

Имеет место

Лемма α.

$$J = AMU\ln^2 T + o(MU\ln^2 T), \tag{20}$$

($0 < A$ — *абсолютная постоянная*).

Так как (ср. [6], (32), $H \to U$)

$$Q_1 = \sum_{T\leqslant g_\nu \leqslant T+U} 1 = \frac{1}{\pi}\, U\ln\frac{T}{2\pi} + O(1), \tag{21}$$

то из (20) получается, что

$$\frac{J}{Q_1\cdot(M+1)^2} = \frac{1}{Q_1} \sum_{T\leqslant g_\nu \leqslant T+U} \left\{\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} Z(g_\nu+\omega k)\right\}^2 \sim A\,\frac{\ln T}{M}.$$

Значит, среднее арифметическое значений

$$\{Z(g_\nu+\omega k)\}_{k=0}^{M}$$

уменьшается (по абсолютному значению) в среднем, если M возрастает.

Следовательно, относительно дискретной совокупности

$$Z(g_\nu + \omega k); \quad T \leqslant g_\nu \leqslant T+U, \ k = 0, 1, \ldots, M \tag{22}$$

имеет место явление типа Харди–Литтлвуда (ср. [2], стр. 315).

В силу этого явления кажется весьма вероятным, что дискретная совокупность (22) содержит информацию о нулях нечетного порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$. Однако, чтобы действительно отыскать таковую, мы должны использовать еще следующую тройную сумму (дискретный аналог соответствующей интегральной величины Харди–Литтлвуда):

$$\mathbf{N} = \sum_{T\leqslant g_\nu \leqslant T+U} |\mathbf{K}|^2, \tag{23}$$

где

$$\mathbf{K} = \sum_{k=0}^{M}\{e^{-i\vartheta(g_\nu+k\omega)}Z(g_\nu+k\omega)-1\}. \tag{24}$$

Имеет место

Лемма β.

$$\mathbf{N} = O(MU\ln^2 T). \tag{25}$$

Теперь мы определим правильный промежуток относительно дискретной совокупности (22) (ср. [10], стр. 105). Положим (ср. (7))

$$M_1 = M_1(\delta, T) = [\delta \ln T], \quad \delta > 1. \tag{26}$$

Определение. Промежуток

$$\langle g_\nu + k(\nu)\omega,\ g_\nu + (k(\nu)+1)\omega\rangle,$$

где

$$g_\nu \in \langle T, T+U\rangle, \quad 0 \leqslant k(\nu) \leqslant M_1$$

и $k(\nu)$ — целое число, назовем *правильным*, если

$$Z\big(g_\nu + k(\nu)\omega\big)Z\big(g_\nu + (k(\nu)+1)\omega\big) < 0. \tag{27}$$

Пусть $G_1(T, U, \delta)$ обозначает количество не пересекающихся правильных промежутков $\subset \langle T, T+U\rangle$. Имеет место

Теорема 1 (основная). *Существуют* $\delta_0 > 1$, $A(\psi, \delta_0) > 0$, $T_0(\psi, \delta_0) > 0$ *такие, что*

$$G_1(T, U, \delta_0) > A(\psi, \delta_0)U, \quad T \geqslant T_0(\psi, \delta_0). \tag{28}$$

Так как правильный промежуток содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ (см. (3), (27)) то из (28) получаем

Следствие.

$$N_0(T+T^{5/12}\psi\ln^3 T) - N_0(T) > A(\psi)T^{5/12}\psi\ln^3 T,$$

где $A(\psi) = A(\psi, \delta_0)$.

3. В этой части мы покажем, как с помощью леммы α и β завершается

Доказательство теоремы 1. Положим

$$I(g_\nu) = \sum_{k=0}^{M} Z(g_\nu+k\omega), \quad L(g_\nu) = \sum_{k=0}^{M} |Z(g_\nu+k\omega)|. \tag{29}$$

Пусть $G_2 = G_2(T, U, M)$ обозначает количество таких $g_\nu^* \in \langle T, T+U\rangle$, для которых имеет место

$$|I(g_\nu^*)| = L(g_\nu^*). \tag{30}$$

Ясно, что при g_ν^* последовательность

$$\{Z(g_\nu^*+k\omega)\}_{k=0}^{M}$$

сохраняет знак. Имеем

$$\sum_{g_\nu^*} |I| = \sum_{g_\nu^*} L. \tag{31}$$

В силу (20), (24) получаем (соответственно)

$$\sum_{g_\nu^*} |I| \leqslant \sqrt{G_2}\Big(\sum_{g_\nu^*} I^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{G_2}\Big(\sum_{g_\nu} I^2\Big)^{1/2} = \tag{32}$$
$$= (G_2\mathbf{J})^{1/2} < A(G_2MU\ln^2 T)^{1/2},$$

$$L = \sum_{k=0}^{M} |Z(g_\nu+k\omega)| \geqslant \Big|\sum_{k=0}^{M} e^{-i\vartheta(g_\nu+k\omega)}Z(g_\nu+k\omega)\Big| = \tag{33}$$
$$= |\mathbf{K}+M+1| \geqslant M+1-|\mathbf{K}|.$$

Теперь, используя в надлежащем месте (25), получаем

$$\sum_{g_\nu^*} L \geqslant (M+1)G_2 - \sum_{g_\nu^*} |\mathbf{K}| \geqslant (M+1)G_2 - \sqrt{G_2}\Big(\sum_{g_\nu^*} |\mathbf{K}|^2\Big)^{1/2} \geqslant \tag{34}$$
$$\geqslant (M+1)G_2 - (G_2\mathbf{N})^{1/2} > (M+1)G_2 - A(G_2MU\ln^2 T)^{1/2}.$$

В силу (31)–(34),

$$(M+1)G_2 < A(G_2MU\ln^2 T)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$G_2 < A\,\frac{U\ln^2 T}{M}. \tag{35}$$

Теперь мы подразделим количество Q_1 (см. (21)) значений $g_\nu \in \langle T, T+U\rangle$ на

$$\left[\frac{Q_1}{2M}\right]$$

пар примыкающих друг к другу ячеек j_1, j_2 имеющих (кроме, быть может последней из j_2) длину M (ср. [8], стр. 266). Пусть μ — число ячеек j_1 состоящих только из точек g_ν^*. В силу (35) мы имеем

$$\mu M < A\,\frac{U\ln^2 T}{M},$$

т.е.

(36) $$\mu < A\,U\left(\frac{\ln T}{M}\right)^2.$$

Положим $M = M_1 = [\delta \ln T]$ (см. (26)). В силу (7), (21), (36), при достаточно большом δ (скажем, $= \delta_0$) получается

$$\left[\frac{Q_1}{2M_1}\right] - \mu > A_1\,\frac{U\ln T}{M_1} - A_2\,\frac{U^2}{M_1 T} - \mu >$$

$$> \frac{1}{\delta_0}\left(A_3 - \frac{A_4}{\delta_0}\right)U - A_5 > A(\psi,\,\delta_0)\,U.$$

Это неравенство дает оценку снизу количества таких ячеек $\tilde{j}_1$, каждая из которых содержит хотя бы одну точку g_ν, для которой (см. (29), (30))

$$|I(g_\nu)| \neq L(g_\nu).$$

Для такой точки члены последовательности

$$Z\{(g_\nu + k\omega)\}_{k=0}^{M_1(\delta_0)}$$

изменяют знак, т.е. существует $k(\nu) \in \langle 0,\, M_1(\delta_0)\rangle$ для которого имеет место (27). Так как не пересекающихся ячеек таково рода не менее чем $A(\psi,\,\delta_0)\,U$, то доказательство теоремы 1 завершено (с помощью леммы α и β).

4. Теперь мы получим новую информацию в вопросе о попадании нулей нечетного порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ в короткие промежутки — в направлении Теоремы С А. Сельберга (см. [7], стр. 49).

Пусть $G_3(T,\psi,\bar\psi)$ обозначает количество значений $g_\nu \in \langle T,\, T+U\rangle$ для которых промежуток

(37) $$(g_\nu,\; g_\nu + \bar\psi(g_\nu))$$

содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, где $\bar\psi = \bar\psi(T)$ есть функция типа $\psi = \psi(T)$, для которой имеет место (ср. (7))

(38) $$\psi/\sqrt[3]{\bar\psi} = o(1).$$

Имеет место

Теорема 2.

(39) $$G_3(T,\,\psi,\,\bar\psi) \sim \frac{1}{\pi}\,U\ln T.$$

Покажем как ~~завершается~~

Доказательство теоремы 2, с помощью соотношения (35) (которое мы доказали на основе леммы α и β). Итак, имеет место

$$\bar\psi(g_\nu) \geqslant \bar\psi(T), \qquad g_\nu \in \langle T,\, T+U\rangle$$

и

$$\frac{\bar\psi(T)}{\omega} \sim \frac{1}{\pi}\,\bar\psi\ln T > \frac{1}{2\pi}\,\bar\psi\ln T \geqslant \left[\frac{1}{2\pi}\,\bar\psi\ln T\right] = M_2$$

(см. (7) неравенство для M и (38)). Полагая в (35) $M = M_2$, получаем, что

$$G_2 < A\,\frac{U\ln T}{\bar\psi} = o(U\ln T)$$

где G_2 — число точек $g_\nu^* \in \langle T,\, T+U\rangle$ для которых значения

$$Z(g_\nu^* + k\omega), \qquad k = 0, 1, \ldots, M_2$$

сохраняют знак (см. (30)). Однако, для количества Q_1 всех $g_\nu \in \langle T,\, T+U\rangle$ имеет место (см. (21))

$$Q_1 \sim \frac{1}{\pi}\,U\ln T.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.

Еще мы обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть $N(T)$ обозначает количество нулей функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, попадающих в прямоугольник $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$. Очевидно (см. [8], стр. 211)

(40) $$N(T+U) - N(T) \sim \frac{1}{2\pi}\,U\ln T.$$

Примечание. Соотношение (39) не противоречит соотношению (40), так как, конечно, многие из промежутков типа (37) пересекаются.

Наконец заметим, что Теорема С А. Сельберга не дает никакую информацию даже в случае

$$g_\nu \in \langle T,\, T+T^{1/2+\varepsilon}\rangle,$$

так как множество этих значений имеет меру ноль, т.е. это множество является исключительным для Теоремы С А. Сельберга.

II. Доказательство леммы А

5. Имеет место соотношение (ср. [6], (31), H→U)

(41) $$g_{\nu+1} - g_\nu = \frac{\pi}{\ln(T/2\pi)} + O\left(\frac{U}{T\ln^2 T}\right),$$

$g_\nu,\ g_{\nu+1}\in\langle T,T+U\rangle$. Однако это соотношение оказывается недостаточно точным для наших целей и мы должны выделить следующие члены в этом соотношении. Так как (см. (5))

$$\vartheta_1'(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi},\qquad \vartheta_1''(t)=\frac{1}{2t},\qquad \vartheta_1^{(3)}=-\frac{1}{2t^2},\tag{42}$$

то (ν здесь пробегает все значения $\geqslant 1$, не только целые)

$$\frac{dg_\nu}{d\nu}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\vartheta_1'(g_\nu)}=\frac{\pi}{\ln(g_\nu/2\pi)},$$

$$\frac{d^2g_\nu}{d\nu^2}=-\frac{\pi^2}{4}\frac{\vartheta_1''(g_\nu)}{\{\vartheta_1'(g_\nu)\}^3}=-\frac{\pi^2}{g_\nu\ln^3(g_\nu/2\pi)},$$

$$\frac{d^3g_\nu}{d\nu^3}=-\frac{\pi^3}{8}\frac{\vartheta_1^{(3)}}{(\vartheta_1')^4}+\frac{3\pi^3}{8}\frac{(\vartheta_1'')^2}{(\vartheta_1')^5}=O\left(\frac{1}{g_\nu^2\ln^4 g_\nu}\right)$$

и, пользуясь формулой Тейлора,

$$g_{\nu+1}-g_\nu=\frac{\pi}{\ln(g_\nu/2\pi)}-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{g_\nu\ln^3(g_\nu/2\pi)}+O\left(\frac{1}{g_\nu^2\ln^4 g_\nu}\right).$$

Далее, для $g_\nu\in\langle T,T+U\rangle$,

$$\frac{1}{\ln(g_\nu/2\pi)}=\frac{1}{\ln(T/2\pi)}-\frac{g_\nu-T}{T\ln^2(T/2\pi)}+F(T)\cdot(g_\nu-T)^2+O\left(\frac{U^3}{T^3\ln^2T}\right),$$

где

$$F(T)=\frac{1}{2T^2\ln^2(T/2\pi)}\left(1+\frac{2}{\ln(T/2\pi)}\right),\tag{43}$$

и

$$\frac{1}{g_\nu\ln^3(g_\nu/2\pi)}=\frac{1}{T\ln^3(T/2\pi)}+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right).$$

Значит, (см. (10)),

$$g_{\nu+1}-g_\nu=\varpi-Q\cdot(g_\nu-T)+\pi F\cdot(g_\nu-T)^2+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right),\tag{44}$$

где

$$\varpi=\frac{\pi}{\ln(T/2\pi)}-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{T\ln^3(T/2\pi)}.\tag{45}$$

6. Имеет место (см. (8), (41), (43), (44), $1\leqslant p\leqslant N-1$)

$$g_{\bar\nu+p+1}-g_{\bar\nu+p}-(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})=$$

$$=-Q\cdot(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})+\pi F\cdot[(g_{\bar\nu+p}-T)^2-(g_{\bar\nu+p-1}-T)^2]+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right)=$$

$$=-Q\cdot(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})+\pi F\cdot(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})[(g_{\bar\nu+p}-T)+$$

$$+(g_{\bar\nu+p-1}-T)]+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right)=$$

$$=-Q\cdot(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})+O\left(\frac{1}{T^2\ln^2T}\cdot\frac{1}{\ln T}\cdot U\right)+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right)=$$

$$=-Q\cdot(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})+O\left(\frac{U}{T^2\ln^2T}\right),$$

т.е.

$$g_{\bar\nu+p-1}-g_{\bar\nu+p}=(1-Q)(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right)=$$

$$=(1-Q)(g_{\bar\nu+p}-g_{\bar\nu+p-1})+R_1(p)$$

и, следовательно,

$$g_{\bar\nu+p+1}-g_{\bar\nu+p}=(1-Q)^p(g_{\bar\nu+1}-g_{\bar\nu})+\sum_{l=0}^{p-1}(1-Q)^lR_1(p-l)=\tag{46}$$

$$=(1-Q)^p(g_{\bar\nu+1}-g_{\bar\nu})+O\left(\frac{UN}{T^2\ln^3T}\right),$$

так как $0<(1-Q)^l\leqslant 1$, (см. (10)). Складывая соотношения (46) получаем

$$g_{\bar\nu+p+1}-g_{\bar\nu+1}=(g_{\bar\nu+1}-g_{\bar\nu})\sum_{q=1}^{p}(1-Q)^q+O\left(\frac{UN^2}{T^2\ln^3T}\right).\tag{47}$$

Однако (см. (9), (43)–(45))

$$g_{\bar\nu+1}-g_{\bar\nu}=\frac{\pi}{\ln(T/2\pi)}-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{T\ln^3(T/2\pi)}-\pi\frac{g_{\bar\nu}-T}{T\ln^2(T/2\pi)}+\tag{48}$$

$$+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right)=\varpi_0+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3T}\right).$$

Следовательно (см. (11), (21), (47), (48))

$$g_{\bar\nu+p+1}=g_{\bar\nu+1}+\varpi_0\sum_{q=1}^{p}(1-Q)^q+O\left(\frac{UN}{T^2\ln^3T}\right)+O\left(\frac{UN^2}{T^2\ln^3T}\right)=$$

$$=g_{\bar\nu+1}+\varpi_0p-\varpi_0D(p)+O\left(\frac{U^3}{T^2\ln^2T}\right),$$

т.е. имеет место (12).

III. Доказательство леммы B

7. Имеем (см. (8), (13), (14))

$$\sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U}\cos\left(g_\nu\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right)=\cos\left(g_{\bar\nu}\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right)+W_1, \tag{49}$$

где (см. (12))

$$\begin{aligned}W_1&=\sum_{p=0}^{N-1}\cos\left(g_{\bar\nu+p+1}\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right)=\\&=\sum_{p=0}^{N-1}\cos\left\{g_{\bar\nu+1}\ln\frac{n}{m}+\varpi_0 p\ln\frac{n}{m}-\varpi_0 D(p)\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right\}+\\&\qquad\qquad+O\left(\frac{U^3N}{T^2\ln T}\right)=\\&=\sum_{p=0}^{N-1}\cos D_1\cos(\Omega_1p+\varphi_3)+\sum_{p=0}^{N-1}\sin D_1\sin(\Omega_1p+\varphi_3)+O\left(\frac{U^4}{T^2}\right)\end{aligned} \tag{50}$$

и

$$D_1=D_1(p;\ m,n)=\varpi_0D(p)\ln\frac{n}{m}, \tag{51}$$

$$\Omega_1=\varpi_0\ln\frac{n}{m},\qquad \varphi_3=g_{\bar\nu+1}\ln\frac{n}{m}+\varphi_1. \tag{52}$$

Далее

$$1-(1-Q)^q=Q\sum_{m=0}^{q-1}(1-Q)^{q-1-m}<Qq$$

и (см. (10), (11), (21))

$$D(p)=\sum_{q=1}^{p}\{1-(1-Q)^q\}=O(Qp^2)=O(QN^2)=O(U^2/T). \tag{53}$$

Следовательно (см. (9), (51), (53))

$$D_1=O\left(\frac{1}{\ln T}\cdot\frac{U^2}{T}\cdot\ln P_0\right)=O\left(\frac{U^2}{T}\right)=o(1). \tag{54}$$

Используя в (50) формулу Тейлора, получаем (см. (49))

$$\begin{aligned}\sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U}&\cos\left(g_\nu\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right)=\\&=\cos\left(g_{\bar\nu}\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right)+\sum_{p=0}^{N-1}\cos(\Omega_1p+\varphi_3)+\\&+\sum_{p=0}^{N-1}\left\{-\frac{D_1^2}{2!}+\frac{D_1^4}{4!}+O(D_1^6)\right\}\cos(\Omega_1p+\varphi_3)+\\&+\sum_{p=0}^{N-1}\left\{D_1-\frac{D_1^3}{3!}+O(D_1^5)\right\}\sin(\Omega_1p+\varphi_3)+O\left(\frac{U^4}{T^2}\right).\end{aligned} \tag{55}$$

8. Положим (ср. (13))

$$S_{11}=\sum_{m<n<P_0}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}\cos(\Omega_1p+\varphi_3) \tag{56}$$

так как (см. (9), (52), $m<n$)

$$0<\Omega_1<\frac{\pi}{\ln(T/2\pi)}\ln\frac{n}{m}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\ln(n/m)}{\ln P_0}<\frac{\pi}{2}, \tag{57}$$

то, аналогично случаю [4], (25) получается

Лемма 1.

$$\begin{aligned}2S_{11}&=\sum_{m<n<P_0}\sum\frac{\cos\varphi_3}{\sqrt{mn}}+\sum_{m<n<P_0}\sum\frac{\cos(\Omega_1\bar N+\varphi_3)}{\sqrt{mn}}-\\&-\sum_{m<n<P_0}\sum\frac{\operatorname{ctg}(\frac12\Omega_1)}{\sqrt{mn}}\sin\varphi_3+\sum_{m<n<P_0}\sum\frac{\operatorname{ctg}(\frac12\Omega_1)}{\sqrt{mn}}\sin(\Omega_1\bar N+\varphi_3)=\\&=S_{111}+S_{112}-S_{113}+S_{114},\qquad \bar N=N-1.\end{aligned} \tag{58}$$

Так как (см. (14), (52))

$$S_{111}=\operatorname{Re}\left\{e^{i(k-l)\omega\ln P_0}\sum_m\frac{1}{\sqrt m}e^{-i(g_{\bar\nu+1}+k\omega)\ln m}\times\right.\left.\times\sum_n\frac{1}{\sqrt n}e^{i(g_{\bar\nu+1}+l\omega)\ln n}\right\}, \tag{59}$$

то (ср. [11], стр. 197) имеет место

Лемма 2.

$$S_{111},\, S_{112} = O(T^{5/12}\ln T). \tag{60}$$

Так как (см. (14), (52))

$$\varphi_3 = (g_{\bar r+1}+l\omega)\ln\frac{n}{m}+(k-l)\,\omega\ln\frac{P_0}{m} = T_1\ln\frac{n}{m}+\varrho_1, \tag{61}$$

то

$$S_{113} = \frac{2}{\varpi_0}\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{\Omega_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\Omega_1}{2}\cos\varrho_1\frac{\sin\big(T_1\ln(n/m)\big)}{\sqrt{mn}\,\ln(n/m)}+ \tag{62}$$

$$+\frac{2}{\varpi_0}\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{\Omega_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\Omega_1}{2}\sin\varrho_1\frac{\cos\big(T_1\ln(n/m)\big)}{\sqrt{mn}\,\ln(n/m)} =$$

$$=\frac{2}{\varpi_0}S^1_{113}+\frac{2}{\varpi_0}S^2_{113}.$$

Положим

$$S^1_{113} = S^1_{113}\ (m<n<2m)+S^1_{113}\ (n\geqslant 2m) = S^{11}_{113}+S^{12}_{113}. \tag{63}$$

Так как суммы S^{11}_{113}, S^{12}_{113} родственны суммам U_2, U_3 в работе [11], стр. 196, 197, мы попробуем показать, что оценки наших сумм получаются методом Е. К. Титчмарша [11], стр. 197, 198.

Разница заключается в том, что у Е. К. Титчмарша встречается следующая m-сумма ([11], стр. 198, $n = m+r$, $r\leqslant\lambda$; [9], стр. 136)

$$\sigma_1 = \sum_{K/2<m\leqslant K}\frac{\left(\dfrac{m+r}{m}\right)^{iT}}{\sqrt{m(m+r)}\ln\dfrac{m+r}{m}} =$$

$$= O(K^{-1/2}T^{1/2}r^{-1/2})+O(K^{3/2}T^{-1/2}r^{-3/2})$$

а в нашем случае,

$$\sigma_2 = \sum_{K/2<m\leqslant K}A_1(m,r)A_2(m)\frac{\sin\left(T_1\ln\dfrac{m+r}{m}\right)}{\sqrt{m(m+r)}\ln\dfrac{m+r}{m}}, \tag{63'}$$

где

$$A_1 = \frac{\Omega_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\Omega_1}{2},\qquad A_2 = \cos\varrho_1.$$

Однако, последовательность $\{A_1\}$, $m\in(\frac{1}{2}K, K\rangle$ (при фиксированном r) возрастает и ограничена единицей (см. (57)). Далее (см. (7), (14), (61))

$$\varrho_1 = O(M).$$

Следовательно, промежуток $(\frac{1}{2}K, K\rangle$ можно подразделить на $O(M)$ промежутков так, что на всяком:

(а) или $A_2>0$ и $\{A_2\}$ возрастает (убывает),

(б) или $-A_2$ обладает этими свойствами.

Применяя преобразование Абеля (в количестве $O(M)$), получаем

$$\sigma_2 = O(M\cdot K^{-1/2}T^{1/2}r^{-1/2})+O(M\cdot K^{3/2}T^{-1/2}r^{-3/2}).$$

Значит,

$$S^{11}_{113} = O(MT^{5/12}\ln^2 T).$$

В случае S^{12}_{113} мы получаем (ср. [11], стр. 197, U_3)

$$S^{12}_{113} = O(MT^{5/12}\ln T),$$

и, следовательно, (см. (63)),

$$S^1_{113} = O(MT^{5/12}\ln^2 T). \tag{64}$$

Что же касается суммы S^2_{113} (см. (62)) то, аналогично изложенному выше, получаем

$$S^2_{113} = O(MT^{5/12}\ln^2 T) \tag{65}$$

и (см. (9), (62), (64), (65)),

$$S_{113},\, S_{114} = O(MT^{5/12}\ln^3 T), \tag{66}$$

притом, в случае S_{114} имеем (см. (52), (61))

$$\Omega_1\bar N+\varphi_3 = T_2\ln\frac{n}{m}+\varrho_1,\qquad T_2 = T_1+\varpi_0\bar N.$$

Значит, имеет место (см. (58), (60), (66))

Лемма 3.

$$S_{11} = O(MT^{5/12}\ln^3 T). \tag{67}$$

9. Положим

$$S_{12} = \sum\sum_{m<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}\sin(\Omega_1 p+\varphi_3). \tag{68}$$

Так как

$$\sin(\Omega_1 p+\varphi_3) = \cos(\Omega_1 p+\varphi_3-\pi/2) = \cos(\Omega_1 p+\varphi_4)$$

то аналогичным образом получается

Лемма 4.

$$S_{12} = O(MT^{5/12}\ln^3 T).$$

Положим $(s = 1, \ldots, 4, N_1 \leqslant N-1)$

$$S_{13} = \sum_{m<n<P_0}\sum \frac{(\ln(n/m))^s}{\sqrt{mn}} \sum_{p=0}^{N_1} \sin(\Omega_1 p + \varphi_3).$$

Для этой суммы (как в случае S_{12}) получается оценка

$$S_{13} = O(MT^{5/12}\ln^7 T), \tag{69}$$

так как $\{\ln(n/m)\}^s$ вносит в общий член соответствующей суммы типа σ_2 (см. (63')) множитель

$$A_3(m, r, s) = \left(\ln \frac{m+r}{m}\right)^s = \left\{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)\right\}^s < A\ln^4 T,$$

и $\{A_3\}$ убывает для $m \in (\frac{1}{2}K, K\rangle$.

Далее (см. (52))

$$S_{14} = \sum_{p=0}^{N-1}\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{D_1^s}{\sqrt{mn}} \sin(\Omega_1 p + \varphi_3) =$$

$$= \overline{\omega}_0^s \sum_{p=0}^{N-1} D^s(p) \sum_{m<n<P_0}\sum \frac{(\ln(n/m))^s}{\sqrt{mn}} \sin(\Omega_1 p + \varphi_3).$$

Так как последовательность $D^s(p)$ возрастает (см. (11)) то, применяя преобразование Абеля, в силу (53), (54), (69) получаем

$$S_{14} = O\left(\frac{1}{\ln T}\cdot\frac{U^2}{T}\cdot \max_{N_1 \leqslant N-1} |S_{13}|\right) = O(MT^{1/4}\psi^2\ln^{12} T).$$

Следовательно, имеет место

Лемма 5.

$$\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{p=0}^{N-1} D_1^s \exp\{i(\Omega_1 p + \varphi_3)\} = O(MT^{1/4}\psi^2\ln^{12} T), \tag{70}$$

$$s = 1, \ldots, 4.$$

Наконец (см. (21), (54), (55))

$$\begin{aligned} &\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{p=0}^{N-1} O(D_1^5) = O(T^{1/12}\psi^{11}\ln^{34} T),\\ &\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}}\, O\left(\frac{U^4}{T^2}\right) = O(T^{1/6}\psi^4\ln^{12} T), \end{aligned} \tag{71}$$

и, очевидно, (см. (59)),

$$\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left(g_{\bar\nu}\ln\frac{n}{m} + \varphi_1\right) = O(T^{5/12}\ln T). \tag{72}$$

Следовательно (см. (13), (56), (67), (70)–(72))

$$S_1(T, U, M) = O(MT^{5/12}\ln^3 T). \tag{73}$$

IV. Доказательство леммы C

10. Прежде всего (ср. (16), (17), (55), $mn \geqslant 2$; очевидно S_2 $(m = n = 1) = O(1)$),

$$\sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U} (-1)^\nu \cos\{g_\nu \ln(mn) + \varphi_2\} =$$

$$= (-1)^{\bar\nu}\cos\{g_{\bar\nu}\ln(mn)+\varphi_2\} + (-1)^{\bar\nu+1}\sum_{p=0}^{N-1}(-1)^p\cos(\Omega_2 p + \varphi_5) +$$

$$+ (-1)^{\bar\nu+1}\sum_{p=0}^{N-2}\left\{-\frac{D_2^2}{2!} + \frac{D_2^4}{4!} + O(D_2^6)\right\}(-1)^p\cos(\Omega_2 p + \varphi_5) +$$

$$+ (-1)^{\bar\nu+1}\sum_{p=1}^{N-1}\left\{D_2 - \frac{D_2^3}{3!} + O(D_2^5)\right\}(-1)^p \sin(\Omega_2 p + \varphi_5) + O\left(\frac{U^4}{T^2}\right),$$

где (ср. (52))

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \overline{\omega}_0 \ln(nm), \qquad \varphi_5 = g_{\bar\nu+1}\ln(mn) + \varphi_2,\\ D_2 &= \overline{\omega}_0 D(p)\ln(mn). \end{aligned} \tag{74}$$

Положим

$$S_{21} = \sum_{\substack{m,n<P_0\\ mn\geqslant 2}}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p\cos(\Omega_2 p + \varphi_5).$$

Так как (ср. (57), $\Omega_2 \in (0, \pi)$) то (ср. [3], (51), (53)) имеет место

Лемма 6.

$$2S_{21} = \sum_{m,n}\sum \frac{\cos\varphi_5}{\sqrt{mn}} + (-1)^{\bar N}\sum_{m,n}\sum \frac{\cos(\Omega_2 \bar N + \varphi_5)}{\sqrt{mn}} +$$

$$+ \sum_{m,n}\sum \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\Omega_2)}{\sqrt{mn}}\sin\varphi_5 - (-1)^{\bar N}\sum_{m,n}\sum \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\Omega_2)}{\sqrt{mn}}\sin(\Omega_2\bar N + \varphi_5) =$$

$$= S_{211} + S_{212} + S_{213} - S_{214}, \qquad \bar N = N-1.$$

Обычным способом получаются оценки

$$S_{211},\ S_{212} = O(T^{5/12}\ln T). \tag{75}$$

Положим (см. (9), (74))

$$\overline{\omega}_0 = \frac{\pi}{2\ln P_0} - \delta_1, \qquad 0 < \delta_1 = O\left(\frac{1}{T\ln^3 T}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}\Omega_2 = \tfrac{1}{2}\overline{\omega}_0 \ln(mn) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ln(mn)}{\ln P_0^2} - \delta_2 = \frac{\pi}{2} - X_1 - \delta_2,$$

где

$$X_1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ln(P_0^2/mn)}{\ln P_0^2}, \qquad \delta_2 = \tfrac{1}{2}\delta_1 \ln(mn).$$

Очевидно,

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\Omega_2) = \operatorname{ctg}(X_1 + \delta_2) = \operatorname{ctg} X_2,$$

$$\frac{dX_2}{dn} = -\frac{\pi}{2n\ln P_0^2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\,\delta_1 \ln P_0^2\right) < 0,$$

(так как $\frac{1}{2}\Omega_2 \in (0, \pi/2)$, то $X_2 \in (0, \pi/2)$). Далее,

$$S_{213} = \sum_{m,n}{}'\sum{}' \frac{\operatorname{ctg} X_2}{\sqrt{mn}} \sin\varphi_5 =$$

$$= \frac{4}{\pi}\ln P_0 \sum_{m,n}{}'\sum{}' X_2 \operatorname{ctg} X_2 \cdot \frac{X_1}{X_1 + \delta_2} \cdot \frac{\sin\varphi_5}{\sqrt{mn}\ln(P_0^2/mn)} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\ln P_0 \cdot \operatorname{Im}\left\{\sum_m{}' \frac{e^{i\varrho_2}}{\sqrt{m}} \sum_n{}' B_1 \cdot B_2 \cdot \frac{e^{iT_3 \ln n}}{\sqrt{n}\ln(P_0^2/mn)}\right\},$$

где (см. (74))

$$B_1 = X_2 \operatorname{ctg} X_2, \qquad B_2 = \frac{X_1}{X_1 + \delta_2}, \qquad \varphi_5 = T_3 \ln n + \varrho_2,$$

$$T_3 = g_{\bar{\nu}+1} + k\omega, \qquad \varrho_2 = (g_{\bar{\nu}+1} + l\omega)\ln m - (k+l)\,\omega \ln P_0$$

и $\{B_1(n)\}$, $\{B_2(n)\}$ – монотонные последовательности при фиксированном m. Наконец, $B_1, B_2 \in (0, 1)$.

Теперь оценка суммы S_{213} получается методом Е. К. Титчмарша (применяя в надлежащем месте преобразование Абеля):

(а) S_{213} $(m < n < 2m)$ – способом [11], стр. 205, см. V_1,

(б) S_{213} $(n \geqslant 2m)$ – способом [11], стр. 206, см. W_1.

В результате получаем

$$S_{213} = O(\ln T \cdot T^{5/12}\ln T) = O(T^{5/12}\ln^2 T). \tag{76}$$

Аналогичным способом,

$$S_{214} = O(T^{5/12}\ln^2 T), \tag{77}$$

притом

$$\Omega_2 \bar{N} + \varphi_5 = T_4 \ln n + \varrho_3, \qquad T_4 = T_3 + \bar{N}\overline{\omega}_0, \qquad \varrho_3 = \bar{N}\overline{\omega}_0 \ln m + \varrho_2.$$

Следовательно (см. (75)–(77)) имеет место

Лемма 7.

$$S_{21} = O(T^{5/12}\ln^2 T).$$

Наконец, способом (68)–(73) получаем оценку (18).

V. Доказательство леммы α

11. Пусть (N_2 — целое положительное число)

$$G(N_2, u) = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}N_2 u)}{\sin^2(\frac{1}{2}u)}, \qquad F_1(N_2) = \int_0^{\pi/6} G(N_2, u)\,du. \tag{78}$$

Имеет место

Лемма 8.

$$F_1(N_2) = AN_2 + O(1), \tag{79}$$

где $0 < A$ *— абсолютная постоянная.*

Доказательство. Так как ([1], стр. 44)

$$\tfrac{1}{2}G(N_2, u) = \tfrac{1}{2}N_2 + \sum_{k=1}^{N_2-1} (N_2 - k)\cos(ku), \tag{80}$$

то $(N_2 - 1 = 6N_3 + r,\ 0 \leqslant r \leqslant 5)$

$$\frac{1}{2}F_1(N_2) - \frac{\pi}{12}N_2 = \sum_{k=1}^{N_2-1}{}' \frac{N_2 - k}{k}\sin\left(\frac{\pi}{6}k\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N_3}{}' \sum_{q=1}^{5}{}' \frac{N_2 - (6n+q)}{6n+q}\sin\left\{\frac{\pi}{6}(6n+q)\right\} + O(1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N_3}{}' (-1)^n \sum_{q=1}^{5}{}' \frac{N_2 - (6n+q)}{6n+q}\sin\left(\frac{\pi}{6}q\right) + O(1) =$$

$$= N_2 \sum_{n=0}^{N_3} (-1)^n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{6n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{6n+2} + \frac{1}{6n+3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{6n+4} + \frac{1}{2} \frac{1}{6n+5} \right) + O(1) =$$

$$= N_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+5} \right) + \frac{1}{6n+3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{6n+2} + \frac{1}{6n+4} \right) \right\} + O(1) =$$

$$= \frac{1}{2} AN_2 + O(1).$$

12. Пусть

$$V_1(T, M) = 2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{M} \sum_{l=0}^{M} \cos\left\{ (k-l)\omega \ln \frac{P_0}{n} \right\}. \tag{81}$$

Имеет место

Лемма 9.

$$V_1(T, M) = AM \ln \frac{T}{2\pi} + O(\ln T). \tag{82}$$

Доказательство. Так как (см. (7))

$$0 < \omega \ln \frac{P_0}{n} \leqslant \omega \ln P_0 = \frac{\pi}{2}, \tag{83}$$

то, используя обычную формулу (см. [3], (52)),

$$\sum_{k=0}^{M} \cos\left(k\omega \ln \frac{P_0}{n} - l\omega \ln \frac{P_0}{n} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{M} \cos(\Omega k + \varphi) = \frac{\sin\{\frac{1}{2}(M+1)\Omega\}}{\sin(\frac{1}{2}\Omega)} \cos(\tfrac{1}{2}M\Omega + \varphi)$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{M} \sum_{l=0}^{M} \cos\left\{ (k-l)\omega \ln \frac{P_0}{n} \right\} = \frac{\sin\{\frac{1}{2}(M+1)\Omega\}}{\sin(\frac{1}{2}\Omega)} \sum_{l=0}^{M} \cos(\Omega l - \tfrac{1}{2}M\Omega) =$$

$$= G(M+1, \Omega)$$

где

$$\Omega = \Omega(T, n) = \omega \ln \frac{P_0}{n}.$$

Значит (см. (81)),

$$V_1(T, M) = 2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{n} G(M+1, \Omega) = \tag{84}$$

$$= 2 \left(\sum_{n<P_0^{2/3}} + \sum_{P_0^{2/3} \leqslant n < P_0} \right) \frac{1}{n} G(M+1, \Omega) = V_2 + V_3.$$

Так как в случае суммы V_2,

$$\frac{1}{2}\Omega = \frac{1}{2}\omega \ln \frac{P_0}{n} \geqslant \frac{1}{2}\omega \ln \frac{P_0}{P_0^{2/3}} = \frac{\pi}{12},$$

то

$$V_2 = O(\ln T). \tag{85}$$

Для изучения V_3 мы применим формулу суммирования Эйлера–Маклорена ([8], стр. 19)

$$\sum_{a \leqslant n < b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (x - [x] - \tfrac{1}{2}) f'(x)\,dx + \tag{86}$$

$$+ (a - [a] - \tfrac{1}{2}) f(a) - (b - [b] - \tfrac{1}{2}) f(b),$$

в случае

$$a = P_0^{2/3}, \quad b = P_0, \quad f(x) = \frac{1}{x} G\left(M+1, \omega \ln \frac{P_0}{x} \right). \tag{87}$$

Прежде всего (см. (78), (79))

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{P_0^{2/3}}^{P_0} G\left(M+1, \omega \ln \frac{P_0}{x} \right) \frac{dx}{x} = \tag{88}$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/6} G(M+1, u)\,du = \frac{1}{\omega} F_1(M+1) = AM \ln \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

Далее (см. (87), $x \in \langle P_0^{2/3}, P_0 \rangle$)

$$f'(x) = O\left(\frac{M^2}{x^2} \right) - \frac{\omega}{x^2} \frac{\partial G(M+1, u)}{\partial u}, \quad u = \omega \ln \frac{P_0}{x}.$$

Однако, (см. (80)),

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G(M+1, u)}{\partial u} = - \sum_{k=1}^{M} k(M+1-k) \sin ku = O(M^3).$$

Следовательно,

$$f'(x) = O\left(\frac{M^2}{x^2}\right) + O\left(\frac{M^3\omega}{x^2}\right),$$

и (см. (7))

$$(89) \qquad \int_{P_0^{2/3}}^{P_0} (x-[x]-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx = O\left(P_0\frac{M^2+\omega^2M^3}{T^{2/3}}\right) = o(1).$$

Еще заметим, что (см. (83), (87))

$$(90) \qquad f(P_0^{2/3}) = O(T^{-1/3}) = o(1), \quad f(P_0) = O(M^2T^{-1/2}) = o(1).$$

Теперь, в силу (84)–(86), (88)–(90) получаем (82), т.е. доказательство леммы 9 закончено.

Положим

$$(91) \qquad V_4 = \sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U} V_1(T, M).$$

В силу (21), (82) (см. (7)) имеет место

Лемма 10.

$$(92) \qquad V_4 = AMU\ln^2T + O(U\ln^2T).$$

13. Исходим из формулы Римана–Зигеля ([8], стр. 94)

$$Z(t) = 2\sum_{n\leqslant \bar t}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta - t\ln n) + O(t^{-1/4}), \quad \bar t = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Так как $U<\sqrt{T}$ то (см. (4), (5), ср. [5], (30), (31))

$$(93) \qquad Z(t) = 2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta - t\ln n) + O(T^{-1/4}) =$$

$$= 2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta_1 - t\ln n) + O(T^{-1/4}), \quad t\in\langle T, T+U\rangle.$$

Далее, (см. (5), (7), (42)),

$$(94) \qquad \vartheta_{1,k} = \vartheta_1(g_\nu+k\omega) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\nu + \vartheta_1'(g_\nu)k\omega + \frac{1}{2}\vartheta_1''(d)(k\omega)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\nu + k\omega\ln P_0 + O\left(\frac{k\omega U}{T}\right) + O\left(\frac{k^2\omega^2}{T}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\nu + k\omega\ln P_0 + O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right),$$

где $d = g_\nu + k\omega\delta_3$, $0<\delta_3<1$. Значит,

$$(95) \qquad \begin{aligned}\vartheta_{1,k}+\vartheta_{1,l} &= \pi\nu + (k+l)\omega\ln P_0 + O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right),\\ \vartheta_{1,k}-\vartheta_{1,l} &= (k-l)\omega\ln P_0 + O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right).\end{aligned}$$

Так как ([8], стр. 94, 109)

$$(96) \qquad Z(t) = O(t^{1/6}\ln T), \quad \sum_{m,n<P_0}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}} = O(\sqrt{T}),$$

то из (93) получаем

$$(97) \qquad Z(g_\nu+k\omega)Z(g_\nu+l\omega) =$$

$$= 2\sum_{m,n<P_0}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(g_\nu\ln\frac{n}{m} + k\omega\ln\frac{P_0}{m} - l\omega\ln\frac{P_0}{n}\right) +$$

$$+ 2\sum_{m,n<P_0}\sum\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}}\cos\left\{g_\nu\ln(mn) - k\omega\ln\frac{P_0}{n} - l\omega\ln\frac{P_0}{m}\right\} +$$

$$+ O\left(\sqrt{T}\frac{MU}{T\ln T}\right) + O(T^{-1/12}\ln T) =$$

$$= S_3 + S_4 + O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right) + O(T^{-1/12}\ln T).$$

Теперь, (см. (91), (92)),

$$(98) \qquad \sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U} S_3\ (m=n) = AMU\ln^3T + O(U\ln^2T),$$

и (см. (15), (18)),

$$(99) \qquad \begin{aligned}\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U} S_3\ (m\neq n) &= O(M^3T^{5/12}\ln^3T),\\ \sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U} S_4 &= O(M^2T^{5/12}\ln^2T).\end{aligned}$$

Далее (см. (21), (97))

$$(100) \qquad \sum_k\sum_l\sum_{g_\nu}\left\{O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right) + O(T^{-1/12}\ln T)\right\} =$$

$$= O\left(\frac{M^3U^2}{\sqrt{T}}\right) + O(M^2UT^{-1/12}\ln^2T)$$

и (см. (19), (97)–(100))

$$J = AMU\ln^2T + O(U\ln^2T) + O(M^3T^{5/12}\ln^3T) + \tag{101}$$
$$+ O\left(\frac{M^3U^2}{\sqrt{T}}\right) + O(M^2UT^{-1/12}\ln^2T) =$$
$$= AMU\ln^2T + R_2 + R_3 + R_4 + R_5.$$

Так как следующие величины

$$\frac{R_2}{MU\ln^2T} = O\left(\frac{1}{M}\right), \qquad \frac{R_3}{MU\ln^2T} = O\left(\frac{M^2}{\psi\ln^2T}\right),$$
$$\frac{R_4}{MU\ln^2T} = O\left(\frac{M^2U}{\sqrt{T}\ln^2T}\right), \qquad \frac{R_5}{MU\ln^2T} = O\left(\frac{M}{T^{1/12}}\right),$$

стремятся к нулю при $T \to \infty$ в случае (7), то из (101) следует (20).

VI. Доказательство леммы β

14. Положим (ср. (24))

$$|K|^2 = \mathrm{Re}\{e^{-i\vartheta(g_\nu+k\omega)}Z(g_\nu+k\omega)-1\}\{e^{i\vartheta(g_\nu+l\omega)}Z(g_\nu+l\omega)-1\} = \tag{102}$$
$$= \mathrm{Re}\{(e^{-i\vartheta_k}Z_k-1)(e^{i\vartheta_l}Z_l-1)\} =$$
$$= Z_kZ_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) - Z_k\cos\vartheta_k - Z_l\cos\vartheta_l + 1.$$

Отсюда, полагая

$$Z_k = 2\cos\vartheta_k + \bar{Z}_k; \qquad g_k = g_\nu + k\omega,$$

где (см. (93))

$$\bar{Z}_k = 2\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta_k - g_k\ln n) + O(T^{-1/4}) \tag{103}$$

получается

$$|K|^2 = \bar{Z}_k\bar{Z}_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) + \tag{104}$$
$$+ 2\bar{Z}_k\cos\vartheta_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) + 2\bar{Z}_l\cos\vartheta_k\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) -$$
$$- \bar{Z}_k\cos\vartheta_k - \bar{Z}_l\cos\vartheta_l +$$
$$+ 4\cos\vartheta_k\cos\vartheta_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) - 2\cos^2\vartheta_k - 2\cos^2\vartheta_l + 1.$$

Наконец, (см. (23), (24), (102), (104)),

$$N = \sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U}\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}|K|^2 = \tag{105}$$
$$= \sum_{g_\nu}\sum_k\sum_l \bar{Z}_k\bar{Z}_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) +$$
$$+ 4\sum_{g_\nu}\sum_k\sum_l \bar{Z}_k\cos\vartheta_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) -$$
$$- 2\sum_{g_\nu}\sum_k\sum_l \bar{Z}_k\cos\vartheta_k +$$
$$+ \sum_{g_\nu}\sum_k\sum_l \{4\cos\vartheta_k\cos\vartheta_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) - 4\cos^2\vartheta_k + 1\} =$$
$$= W_2 + W_3 + W_4 + W_5.$$

15. В этой части мы изучим величину W_5. Имеем (см. (4), (5), (94), (95))

$$4\cos\vartheta_k\cos\vartheta_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) = \tag{106}$$
$$= 2\cos^2(\vartheta_k-\vartheta_l) + 2\cos(\vartheta_k+\vartheta_l)\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) =$$
$$= 1 + \cos\{2(\vartheta_k-\vartheta_l)\} + \cos(2\vartheta_k) + \cos(2\vartheta_l) =$$
$$= 1 + \cos\{2(\vartheta_{1,k}-\vartheta_{1,l})\} + \cos(2\vartheta_{1,k}) + \cos(2\vartheta_{1,l}) + O(1/T) =$$
$$= 1 + \cos\{2(k-l)\omega\ln P_0\} + \cos(\pi\nu + 2k\omega\ln P_0) +$$
$$+ \cos(\pi\nu + 2l\omega\ln P_0) + O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right) + O\left(\frac{1}{T}\right) =$$
$$= 1 + (-1)^{k+l} + (-1)^{\nu+k} + (-1)^{\nu+l} + O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right),$$

$$-4\cos^2\vartheta_k = -2 - 2\cos(2\vartheta_k) = \tag{107}$$
$$= -2 - 2\cos(\pi\nu + 2k\omega\ln P_0) + O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right) =$$
$$= -2 - 2(-1)^{\nu+k} + O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right),$$

так как (см. (7))

$$2\omega\ln P_0 = \pi. \tag{108}$$

Следовательно, в силу (21), (105)–(107),

$$W_5=\sum_{g_\nu}\sum_{k}\sum_{l}(-1)^{k+l}+O\left(M^2U\ln T\cdot\frac{MU}{T\ln T}\right)= \tag{109}$$

$$=O(U\ln T)+O\left(\frac{M^3U^2}{T}\right).$$

16. В этой части мы изучим величину W_2. В силу (4), (5), (95), (96), (103) $(m,n\in\langle 2,P_0))$,

$$\bar{Z}_k\bar{Z}_l=2\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos(\vartheta_k+\vartheta_l-g_k\ln n-g_l\ln m)+$$

$$+2\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos(\vartheta_k-\vartheta_l-g_k\ln n+g_l\ln m)+O(T^{-1/12}\ln T)=$$

$$=2\sum_{m,n}\sum\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}}\cos\{g_\nu\ln(mn)-(k+l)\,\omega\ln P_0+k\omega\ln n+l\omega\ln m\}+$$

$$+2\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left\{g_\nu\ln\frac{n}{m}+(l-k)\,\omega\ln P_0+k\omega\ln n+l\omega\ln m\right\}+$$

$$+O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T).$$

Далее (ср. (97))

$$\bar{Z}_k\bar{Z}_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l)= \tag{110}$$

$$=\bar{Z}_k\bar{Z}_l\cos\{(k-l)\,\omega\ln P_0\}+O\left(\frac{MU\ln T}{T^{2/3}}\right)=$$

$$=\sum_{m,n}\sum\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}}\cos\{g_\nu\ln(mn)-2l\omega\ln P_0+k\omega\ln n+l\omega\ln m\}+$$

$$+\sum_{m,n}\sum\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}}\cos\{g_\nu\ln(mn)-2k\omega\ln P_0+k\omega\ln n+l\omega\ln m\}+$$

$$+\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(g_\nu\ln\frac{n}{m}+k\omega\ln n-l\omega\ln m\right)+$$

$$+\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left\{g_\nu\ln\frac{n}{m}-2(k-l)\,\omega\ln P_0+k\omega\ln n-l\omega\ln m\right\}+$$

$$+O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T)+O\left(\frac{MU\ln T}{T^{2/3}}\right)=$$

$$=S_5+S_6+S_7+S_8+O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T).$$

Прежде всего,

$$\sum_{k}\sum_{l}\sum_{g_\nu}\{S_5+S_6+S_7\ (m\neq n)+S_8\ (m\neq n)\}= \tag{111}$$

$$=O(M^3T^{5/12}\ln^3T)$$

в силу оценок типа (15), (18). Далее (ср. (78), (84))

$$S_{71}=\sum_{k}\sum_{l}S_7\,(m=n)=\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{n}\,\boldsymbol{G}(M+1,\omega\ln n).$$

Так как (см. (7))

$$0<\frac{1}{2}\omega\ln n=\frac{\pi}{4}\,\frac{\ln n}{\ln P_0}<\frac{\pi}{4},$$

то

$$\sin(\tfrac{1}{2}\omega\ln n)>A\omega\ln n$$

и

$$S_{71}=O\left(\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\right)=O(\ln^2T).$$

Следовательно (см. (21))

$$\sum_{g_\nu}S_{71}=O(U\ln T\cdot\ln^2T)=O(U\ln^3T). \tag{112}$$

Аналогичным образом,

$$S_{81}=\sum_{k}\sum_{l}S_8\ (m=n)=\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{n}\,\boldsymbol{G}\left(M+1,\ln\frac{P_0^2}{n}\right).$$

Так как

$$\frac{1}{2}\,\omega\ln\frac{P_0^2}{n}=\frac{\pi}{2\ln P_0^2}\ln\frac{P_0^2}{n},$$

то

$$\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}\,\omega\ln\frac{P_0^2}{n}<\frac{\pi}{2}$$

и

$$\sin\left(\frac{1}{2}\omega\ln\frac{P_0^2}{m}\right) > A > 0.$$

Значит,

$$S_{81} = O\left(\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{n}\right) = O(\ln T),$$

и следовательно,

$$\sum_{g_\nu} S_{81} = O(U\ln^2 T). \tag{113}$$

Наконец (см. (105), (110)–(113)) в случае (7),

$$W_2 = O(M^3T^{5/12}\ln^3 T) + O(U\ln^3 T) + \tag{114}$$

$$+O\left(\frac{MU^2}{\sqrt{T}}\right) + O(M^2UT^{-1/12}\ln^2 T) = O(MU\ln^2 T).$$

17. В силу (103), (ср. (105)),

$$4\bar{Z}_k\cos\vartheta_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l) = \tag{115}$$

$$= \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\cos(g_k\ln n) + \sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(2\vartheta_k - g_k\ln n) +$$

$$+\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(2\vartheta_k-g_k\ln n) + \sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(2\vartheta_k-2\vartheta_l-g_k\ln n) + O(T^{-1/4}) =$$

$$= W_{31}+W_{32}+W_{33}+W_{34}+O(T^{-1/4}),$$

где $g_k = g_\nu + k\omega$. Далее (см. (4), (5), (21), (94), (108))

$$W_{32}^1 = \sum_{T\leqslant g_\nu\leqslant T+U} W_{32} = \sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{g_\nu}\cos(\pi\nu+2k\omega\ln P_0 - g_k\ln n) +$$

$$+O\left\{U\ln T\cdot T^{1/4}\cdot\left(\frac{1}{T}+\frac{MU}{T\ln T}\right)\right\} =$$

$$= (-1)^k\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{g_\nu}\cos(\pi\nu - g_\nu\ln n - k\omega\ln n) + O(MU^2T^{-3/4}) =$$

$$= (-1)^k\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{g_\nu}\cos(\pi\nu + g_\nu\ln n + k\omega\ln n) + O(MU^2T^{-3/4}).$$

g_ν-сумме соответствует следующая функция (ср. [10], стр. 99–100)

$$\chi(\nu) = \frac{1}{2\pi}(\pi\nu + g_\nu\ln n + k\omega\ln n).$$

Следовательно (см. (5), (6), $g_\nu\in\langle T, T+U\rangle$)

$$\chi'(\nu) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\,\frac{\ln n}{\ln\sqrt{\dfrac{g_\nu}{2\pi}}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,\frac{\ln n}{\ln P_0}+O\left(\frac{U}{T\ln T}\right)$$

и $\chi''(\nu) < 0$. Значит, $\chi'(\nu)\in(1/2, 3/4+\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0, 1/4)$ и (ср. [10], стр. 100)

$$W_{32}^1 = O\left(\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O(MU^2T^{-3/4}) = O(T^{1/4}).$$

Аналогичные оценки получаем для величин W_{31}^1, W_{33}^1, W_{34}^1. Следовательно (см. (105), (115))

$$W_3 = O(M^2T^{1/4}) \tag{116}$$

и, действуя аналогичным образом,

$$W_4 = O(M^2T^{1/4}). \tag{117}$$

Наконец, в силу (105), (109), (114), (116), (117) получаем (25)

Литература

[1] Д. Джексон, *Ряды Фурье и ортогональные полиномы*, Москва 1948

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*, Math. Z. 10 (1921), стр. 283–317.

[3] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.

[4] — *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), стр. 45–51.

[5] — *О законе Грама в теории дзета-функции Римана*, ibid. 32 (1977), стр. 107–113.

[6] — *О поведении функции* $\mathrm{Re}\{\zeta(s)\}$, $\mathrm{Im}\{\zeta(s)\}$ *в критической полосе*, ibid. 34 (1977), стр. 25–35.

[7] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skrifter Norske Vid. Akad. Oslo (1942), No 10.

[8] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[9]–[11] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, III, IV, V*, Quart. J. Math. 3 (1932), стр. 133–141, 5 (1934), стр. 98–105, 195–210.

Поступило 26. 10. 1981 (1269)