Conspectus materiae tomi XLIII, fasciculi 1

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange
Address of the Editorial Board and of the exchange
Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches
Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-04723-2 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Représentation multiplicative des entiers à l'aide de l'ensemble $\mathscr{P}+1$

par

J. Meyer (Reims)

Notations. $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, $\mathscr{P}+1$ l'ensemble des successeurs des nombres premiers et $\mathscr{P}'$ l'ensemble des puissances des nombres premiers:

$$\mathscr{P}' = \{p^r: p \in \mathscr{P},\ r \in N^*\}.$$

Soit n un entier $\geqslant 1$ et p un élément de $\mathscr{P}$. On désigne par $v_p(n)$ l'exposant de p dans le décomposition de n en facteurs premiers.

Soit p^r un élément de $\mathscr{P}'$. On dit que p^r divise exactement un entier $n \geqslant 1$ (et l'on note $p^r \| n$) si et seulement si $r = v_p(n)$.

Soit A une partie non vide de N^*. On note $\underline{d}A$ (resp. $\bar{d}A$) la densité inférieure (resp. supérieure) de A et dA la densité de A (quand elle existe). On désigne de manière analogue les densités logarithmiques $\underline{\delta}A$, $\bar{\delta}A$ et δA.

$\mathscr{M}_1(A)$ est l'ensemble des fonctions multiplicatives de module $\leqslant 1$ dont la restriction à A vaut 1.

χ_A est la fonction caractéristique de A.

1.1. On sait ([3], [7], [10]) que la représentation multiplicative des entiers à l'aide des éléments d'une partie donnée A de N^* est liée au fait que A est un ensemble d'unicité ou un ensemble unitaire, et donc dépend de résultats obtenus à partir de l'étude de fonctions additives et multiplicatives. En fait, on peut aller plus loin dans cette direction: cet article a pour but de montrer, dans le cas particulier où $A = \mathscr{P}+1$, comment à partir de résultats généraux sur les fonctions multiplicatives on peut obtenir des précisions importantes sur la représentation multiplicative des entiers.

1.2. Rappelons que P. D. T. A. Elliott [4] a, le premier, montré que l'ensemble $\mathscr{P}+1$ est un ensemble d'unicité, ce qui implique ([3], [7], [10]) la représentation de tout entier $n \geqslant 1$ sous la forme

$$n = (p_1+1)^{\alpha_1} \dots (p_k+1)^{\alpha_k}$$

où les a_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont des nombres *rationnels* dépendant de n, ainsi que l'entier k.

Pour sa part E. Wirsing ([9]) démontre l'existence de deux constantes c_1 et c_2 telles que tout entier $n \geqslant 1$ admet comme représentation:

$$n^a = (p_1+1)^{\varepsilon_1} \dots (p_k+1)^{\varepsilon_k}$$

où a et k sont des entiers $\leqslant c_1$, $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ et $n \leqslant p_i+1 \leqslant n^{c_2}$. Sa méthode permet aussi de démontrer l'existence d'un entier positif ν tel que toute fonction f élément de $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$ (ensemble des fonctions multiplicatives dont la restriction à $\mathcal{P}+1$ vaut 1) vérifie

$$\forall n \geqslant 1 \qquad [f(n)]^\nu = 1.$$

1.3. Ce dernier résultat peut être démontré par une autre voie ([7]) mais aucune des deux méthodes ne permet, semble-t-il, de déterminer l'entier ν (que l'on conjecture être égal à 1) ou même d'en donner un majorant.

Nous allons démontrer ici, à l'aide de résultats sur les fonctions multiplicatives dûs à H. Delange que le plus petit entier ν convenable est égal à la quantité

$$\max_{f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)} (1/d_f),$$

où d_f est la densité de l'ensemble $\{n \in \boldsymbol{N}^*\colon f(n) = 1\}$. Nous donnerons ensuite une minoration de cette quantité. Enfin nous établirons le lien entre ce résultat et la représentation multiplicative des entiers, obtenant comme corollaire le résultat suivant: tout entier $n \geqslant 1$ admet la représentation:

$$n^\nu = (p_1+1)^{a_1} \dots (p_k+1)^{a_k}$$

où les a_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont des *entiers* relatifs dépendant de n (ainsi que k) et ν est un nombre entier $\leqslant 8$.

2.1. Pour toute fonction multiplicative f appartenant à $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$, posons

$$\nu_f = \min\{a \in \boldsymbol{N}^*\colon f(n)^a = 1,\ \forall n \in \boldsymbol{N}^*\}$$

et

$$\nu = \min\{a \in \boldsymbol{N}^*\colon \forall f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1),\ \forall n \in \boldsymbol{N}^*\ f(n)^a = 1\}.$$

Remarquons que, d'après les résultats rappelés dans l'introduction, les quantités ν_f et ν existent. Il existe d'ailleurs une infinité d'entiers μ_f et μ tels que

$$f(n)^{\mu_f} = 1 \qquad \text{pour tout } n \in \boldsymbol{N}^*$$

et

$$f(n)^\mu = 1 \qquad \text{pour toute fonction } f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1) \text{ et tout } n \in \boldsymbol{N}^*.$$

Ce sont les multiples respectifs de ν_f et de ν.

On a les résultats suivants:

PROPOSITION 1. *Pour toute fonction f de $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$, la densité des entiers $n \geqslant 1$ tels que $f(n) = 1$, notée d_f, existe et vaut $1/\nu_f$.*

COROLLAIRE. *On a l'égalité:* $\nu = \max\limits_{f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)} (1/d_f)$.

2.2. Pour démontrer la proposition, on utilise un résultat de H. Delange ([1]) que nous allons énoncer après avoir rappelé quelques définitions.

Pour toute fonction arithmétique complexe, on considère pour chaque $n \in \boldsymbol{N}^*$ une mesure μ_n sur $\boldsymbol{C}$ définie par

$$\forall E \in \mathcal{P}(\boldsymbol{C}), \qquad \mu_n(E) = \frac{1}{n}\, |\{m \in \boldsymbol{N}^*\colon m \leqslant n \text{ et } f(m) \in E\}|.$$

On dit d'une mesure sur $\boldsymbol{C}$ qu'elle est invariante par rotation si elle est invariante par toutes les rotations autout du point 0. On dit qu'elle possède une symétrie d'ordre ν si le groupe des rotations autour de 0 qui la conservent est formé des rotations d'angle multiple de $2\pi/\nu$ (et est donc d'ordre ν). Soit maintenant une fonction multiplicative f de module au plus égal à 1.

On a le théorème suivant:

THÉORÈME (Delange). *Pour que la suite $\{u_n\}$ converge vers une mesure μ non invariante par rotation, il faut et il suffit qu'il existe au moins un $m \in \boldsymbol{N}^*$ tel que la série*

$$\sum \frac{1}{p}\left(1 - f(p)^m\right)$$

soit convergente.

Cette série est alors convergente pour une infinité de m, qui sont les multiples d'un certain q, et la mesure μ possède une symétrie d'ordre q si $f(2^r)^q \neq -1$ pour au moins un $r \in \boldsymbol{N}^*$, d'ordre $2q$ dans le cas contraire.

2.3. Démontrons maintenant la proposition 1. Soit f un élément de $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$; les résultats rappelés dans l'introduction montrent que f est de module égal à 1 et que la série

$$\sum \frac{1}{p}\left(1 - f(p)^m\right)$$

est nulle pour au moins un entier $m \geqslant 1$. Les hypothèses du théorème sont donc satisfaites par la fonction f.

Soit le nombre q du théorème. Comme cet entier divise ν_f, posons:

$$\nu_f = \lambda_q, \qquad \text{où} \qquad \lambda \in \boldsymbol{N}^*.$$

Pour tout nombre premier p, $f(p)$ est une racine ν_f-ième de l'unité, de telle sorte que $f(p)^q$ est une racine λ-ième de l'unité. Donc il existe un nombre réel ζ strictement positif tel que pour tout p vérifiant $f(p)^q \neq 1$,

$$1-\mathrm{Re}[f(p)^q] \geqslant \zeta > 0.$$

Posons

$$S = \{p \in \mathscr{P}:\ f(p)^q \neq 1\}.$$

La convergence de la série

$$\sum \frac{1}{p}\left(1-f(p)^q\right)$$

implique les inégalités

$$\zeta \sum_{p\in S} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{p\in S} \frac{1}{p}\left(1-\mathrm{Re}[f(p)^q]\right) < \infty.$$

Donc la série $\sum\limits_{p\in S} 1/p$ converge. On peut alors utiliser un résultat obtenu dans [6] et dire que, pour chaque entier $n \geqslant 1$, il existe un nombre premier p tel que l'on ait

$$p+1 = 2nt$$

où t est sans facteur carré, est premier avec $2n$ et n'a aucun facteur premier dans S. Par conséquent $f(t)^q$ vaut 1, ainsi que $f(p+1)$ et $f(2)$ (car $f(2) = f(5+1)/f(2+1)$). Donc $f(n)^q = 1$, ce qui prouve que

$$\nu_f = q.$$

La mesure μ possède donc une symétrie d'ordre ν_f (et non d'ordre $2\nu_f$ car $f(2) = 1$). Par conséquent:

$$d\{n \in \boldsymbol{N}^*:\ f(n) = 1\} = 1/\nu_f.$$

2.4. Pour démontrer le corollaire, il suffit de voir que

$$\nu = \max_{f\in\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)} \nu_f.$$

D'après la définition de ν, $\max\limits_{f\in\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)} \nu_f \leqslant \nu$.

Il suffit donc de montrer que $\nu \leqslant \max\limits_{f\in\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)} \nu_f$.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_r$ les r valeurs distinctes prises par ν_f lorsque f parcourt l'ensemble $\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)$. On a l'égalité:

$$\nu = \text{p.p.c.m.}(a_1, a_2, \ldots, a_r).$$

Pour toute fonction f de $\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)$ et tout entier positif a, f^a appartient à $\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)$ et si $\nu_f = a\cdot b$, $\nu_{f^a} = b$ $(b \in \boldsymbol{N}^*)$. Il existe donc k éléments premiers entre eux $p_1', p_2', \ldots, p_k'$ de $\mathscr{P}'$ et k fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_k$ de $\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)$ telles que

$$\nu_{f_i} = p_i' \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

et

$$\nu = \text{p.p.c.m.}(\nu_{f_1}, \nu_{f_2}, \ldots, \nu_{f_k}) = \prod_{i=1}^{k} p_i'.$$

Pour toute fonction f de $\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)$ et tout entier $n \geqslant 1$, posons

$$\nu_f(n) = \inf\{a \in \boldsymbol{N}^*:\ f(n)^a = 1\}.$$

Clairement

$$\nu_f = \text{p.p.c.m.}\left(\nu_f(n)\right)_{n\geqslant 1},$$

et dans le cas particulier où ν_f est une puissance de nombre premier:

$$\nu_f = \max_{n\geqslant 1} \nu_f(n).$$

Il existe donc k entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tels que

$$(1 \leqslant i \leqslant k) \qquad \nu_{f_i} = \nu_{f_i}(n_i).$$

Posons maintenant

$$\nu_j' = \nu_{f_1f_2\ldots f_k}(n_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant k)$$

et montrons que p_j' divise ν_j'.

Comme $\left[\prod\limits_{i=1}^{k} f_i(n_j)\right]^{\nu} = 1$, ν_j' divise ν. Si p_j' ne divisait pas ν_j', ν_j' serait diviseur d'un nombre de la forme $(\nu/p_j')\lambda$ où λ est un diviseur strict de p_j', et on aurait l'égalité:

$$\left[\prod_{i=1}^{k} f_i(n_j)\right]^{(\nu/p_j')\lambda} = 1.$$

Compte tenu que pour $i \neq j$, $\left(f_i(n_j)\right)^{(\nu/p_j')\lambda} = 1$, l'égalité précédente devient

$$\left(f_j(n_j)\right)^{(\nu/p_j')\lambda} = 1.$$

D'après la définition de n_j, ceci implique que p_j' divise $(\nu/p_j')\lambda$ et donc que $\lambda = p_j'$.

Ainsi pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, p_j' divise n_j' et donc divise $\nu_{f_1f_2\ldots f_k}$. Par conséquent $\nu = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i'$ divise $\nu_{f_1f_2\ldots f_k}$ et cette dernière quantité est majorée par $\max\limits_{f\in\mathscr{M}_1(\mathscr{P}+1)} \nu_f$.

3.1.1. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres entiers $d \geqslant 1$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\text{(I)} \qquad d = \frac{p+1}{q+1},$$

où p et q sont deux nombres premiers impairs tels que $\big((p+1)/(q+1), q+1\big) = 1$. Elliott ([4]) a montré que $\underline{\delta}\mathcal{N} \geqslant c > 0$. Bien que la valeur de la constante c ne figure pas dans l'article d'Elliott, son calcul ne soulève aucune difficulté et permet de trouver une première majoration de l'entier ν via le corollaire de la proposition 1 car, pour toute fonction f de $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$, $\mathcal{N}$ est inclus dans l'ensemble $\{n \in \boldsymbol{N}^*\colon f(n) = 1\}$ et donc:

$$c \leqslant \underline{\delta}\mathcal{N} \leqslant \inf_{f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)} d_f.$$

3.1.2. P étant un entier impair, soit $\mathcal{N}_P$ l'ensemble des nombres entiers $d \geqslant 1$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\text{(II)} \qquad d = \frac{p+1}{P(q+1)},$$

où p et q sont deux nombres premiers impairs vérifiant:

$$q \equiv 1\ (P) \quad \text{et} \quad \big(d, P(q+1)\big) = 1.$$

Par une méthode légèrement différente de celle d'Elliott, nous allons montrer que $\underline{d}\mathcal{N}_P$ est strictement positive pour tout P et qu'en particulier $\underline{d}\mathcal{N}_1 \geqslant 1/118{,}2$ (remarquons que $\mathcal{N}_1$ est identique à $\mathcal{N}$) et $\underline{d}\mathcal{N}_{3\cdot5\cdot\ldots\cdot23} \geqslant 1/54{,}0121$.

Enfin nous modifierons l'ensemble $\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23}$ en un ensemble $\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23}$, encore inclus dans l'ensemble $\{n \in \boldsymbol{N}^*\colon f(n) = 1\}$ pour toute fonction f de $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$, et dont la densité inférieure est supérieure ou égale à $1/8{,}96$. Toujours via le corollaire de la proposition 1, on aura obtenu le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit*

$$\nu = \min\{a \in \boldsymbol{N}^*;\ \forall f \in \mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1),\ f^a \equiv 1\}.$$

On a l'inégalité:

$$\nu \leqslant 8.$$

3.2. v étant un nombre réel vérifiant $0 < v < 1$, on désigne pour tout nombre réel $x \geqslant 1$ et tout entier $d \geqslant 2$ par $N_v(d, x)$ le nombre de couples $(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ tels que

$$p+1 = Pd(q+1),$$
$$\big(d, P(q+1)\big) = 1,$$

$$q \equiv 1\ (P),$$
$$3 \leqslant p \leqslant x \quad \text{et} \quad 3 \leqslant q \leqslant x^v - 1.$$

Nous allons évaluer de deux manières distinctes la somme $\sum_{2 \leqslant d \leqslant x^{1-v}/P} N_v(d, x)$.

(i) $N_v(d, x)$ peut tout d'abord être majoré par la méthode du crible de Selberg ([5], p. 119):

$$N_v(d, x) \leqslant |\{q \leqslant x^v\colon\ q \equiv 1\ (P),\ (Pd)q + (Pd-1) \text{ premier}\}|$$
$$\leqslant 8a_2 \frac{g(Pd)}{\varphi(P)} \cdot \frac{x^v}{v^2 \log^2 x}\left[1 + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right]$$

où l'on a posé

$$a_2 = \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

et défini la fonction g sur les entiers $\geqslant 2$ par

$$g(n) = \prod_{2 < p \mid n(n-1)} \frac{p-1}{p-2}.$$

La majoration de $N_v(d, x)$ étant uniforme, on obtient l'inégalité:

$$(1) \qquad \sum_{2 \leqslant d \leqslant x^{1-v}/P} N_v(d, x)$$
$$\leqslant \frac{8a_2}{\varphi(P)} \cdot \frac{x^v}{v^2 \log^2 x}\left[1 + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right] \sum_{\substack{2 \leqslant d \leqslant x^{1-v}/P \\ N_v(d,x) > 0}} g(d).$$

(ii) Par ailleurs nous avons les égalités suivantes:

$$\sum_{2 \leqslant d \leqslant x^{1-v}/P} N_v(d, x) = \sum_{\substack{3 \leqslant q \leqslant x^v - 1 \\ q \equiv 1\ (P)}} \sum_{\substack{2 \leqslant d \leqslant x^{1-v}/P \\ Pd(q+1)-1 \leqslant x \\ (d, P(q+1)) = 1}} \chi_{\mathcal{P}}\big(Pd(q+1) - 1\big)$$

$$= \sum_{\substack{3 \leqslant q \leqslant x^v - 1 \\ q \equiv 1\ (P)}} \sum_{\substack{p \leqslant x^{1-v}(q+1) - 1 \\ ((p+1)/P(q+1), P(q+1)) = 1 \\ p \equiv -1\ (P(q+1)) \\ p \neq P(q+1) - 1}} 1 = \sum_{\substack{3 \leqslant q \leqslant x^v - 1 \\ q \equiv 1\ (P)}} \sum_{\substack{p \leqslant x^{1-v}(q+1) \\ ((p+1)/P(q+1), P(q+1)) = 1 \\ p \equiv -1\ (P(q+1))}} 1 + R_1(x, v)$$

où $R_1(x, v) = O\big(\pi(x^v)\big)$.

$$\sum_{2 \leqslant d \leqslant x^{1-v}/P} N_v(d, x) = \sum_{\substack{3 \leqslant q \leqslant x^v - 1 \\ q \equiv 1\ (P)}} \sum_{\substack{p \leqslant x^{1-v}(q+1) \\ p \equiv -1\ (P(q+1))}} \sum_{r \mid ((p+1)/P(q+1), P(q+1))} \mu(r) + R_1(x, v)$$

$$= \sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} \sum_{r|P(q+1)} \mu(r)\pi\big(x^{1-v}(q+1),\, rP(q+1),\, -1\big) + R_1(x, v)$$

$$= \sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} \sum_{r|P(q+1)} \mu(r)\, \frac{\mathrm{li}\big(x^{1-v}(q+1)\big)}{\varphi\big(rP(q+1)\big)} + R_2(x, v)$$

où

$$R_2(x, v) = R_1(x, v) + \sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} \sum_{r|P(q+1)} \mu(r) E\big(x^{1-v}(q+1),\, rP(q+1),\, -1\big).$$

[Par définition, pour tout nombre réel $y \geqslant 2$ et tout couple d'entiers $(d, l) \in \boldsymbol{N}^* \times \boldsymbol{N}^*$, on pose:

$$E(y, d, l) = \pi(y, d, l) - \frac{\mathrm{li}\, y}{\varphi(d)}$$

et

$$E(y, d) = \max_{2\leqslant z\leqslant y}\ \max_{(l,d)=1} |E(y, d, l)|.]$$

Le théorème bien connu de Bombieri ([5], p. 111) permet d'estimer $R_2(x, v)$ lorsque l'on suppose v strictement inférieur à $1/2$ et x suffisamment grand car:

$$|R_2(x, v)| \leqslant |R_1(x, v)| + \sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} \Big(\sum_{\substack{r|P(q+1)\\ r\leqslant \log^8 x}} E\big(x, rP(q+1)\big)\Big) + $$

$$+ \sum_{\substack{r|P(q+1)\\ r>\log^8 x}} E\big(x, rP(q+1)\big).$$

Si $r \leqslant \log^8 x$,

$$\sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} E\big(x, rP(q+1)\big) = O_v\left(\frac{x}{\log^{11} x}\right);$$

pour $r > \log^8 x$, on utilise la majoration triviale

$$E\big(x, rP(q+1)\big) = O\left(\frac{x}{rP(q+1)}\right).$$

Ainsi:

$$|R_2(x, v)| \leqslant R_1(x, v) + O_v\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) + O\left(x \sum_{s\leqslant x^v} \frac{1}{s} \sum_{r>\log^8 x} \frac{1}{r^2}\right),$$

$$R_2(x, v) = O_v\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

D'autre part, comme r divise $P(q+1)$

$$\frac{\mu(r)}{\varphi\big(rP(q+1)\big)} = \frac{\mu(r)}{r\varphi\big(P(q+1)\big)}.$$

Donc:

$$\sum_{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P} N_v(d, x) = \sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} \frac{\mathrm{li}\big(x^{1-v}(q+1)\big)}{P(q+1)} + R_2(x, v)$$

$$= \sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} \frac{x^{1-v}}{P\log\big(x^{1-v}(q+1)\big)} + R_3(x, v)$$

où

$$R_3(x, v) = R_2(x, v) + \sum_{\substack{3\leqslant q\leqslant x^v-1\\ q\equiv 1\,(P)}} \frac{1}{P(q+1)} \left(\mathrm{li}\big(x^{1-v}(q+1)\big) - \frac{x^{1-v}(q+1)}{\log\big(x^{1-v}(q+1)\big)}\right),$$

$$R_3(x, v) = R_2(x, v) + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) = O_v\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

On obtient alors la minoration:

$$\sum_{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P} N_v(d, x) \geqslant \frac{x^{1-v}}{P\log x}\, \pi(x^v, P, 1) + O_v\left(\frac{x}{\log^3 v}\right)$$

$$\geqslant \frac{x}{P\varphi(P)}\, \frac{1}{v\log^2 x} + O_v\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

Tenant compte de la majoration (1), on a l'inégalité:

$$\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ N_v(d,x)>0}} g(Pd) \geqslant \frac{v}{8a_2}\, \frac{x^{1-v}}{P} \left[\frac{1+O_v(1/\log x)}{1+O(\log\log x/\log x)}\right]. \tag{2}$$

(iii) Il reste maintenant à majorer l'expression de gauche. Définissons une fonction g_P sur les entiers $\geqslant 2$ par

$$g_P(n) = \prod_{2<p|n(Pn-1)} \frac{p-1}{p-2}.$$

Lorsque n est premier avec P, on a l'égalité

$$g(Pn) = g_P(n) \prod_{p|P} \frac{p-1}{p-2}.$$

Par suite on obtient l'inégalité

$$\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ N_v(d,x)>0}} g_P(d)\geqslant \frac{v}{8a_2}\cdot\prod_{p|P}\frac{p-2}{p-1}\cdot\frac{x^{1-v}}{P}\big(1+\sigma_v(1)\big). \tag{3}$$

Soient u et u' deux nombres réels supérieurs ou égaux à 1, tels que $1/u+$ $+1/u'=1$. Appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ N_v(d,x)>0}} g_P(d)\leqslant\Big(\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ N_v(d,x)>0}}1\Big)^{1/u}\Big(\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} g_P(d)^{u'}\Big)^{1/u'}. \tag{4}$$

Définissons une fonction multiplicative f par

$$f(2^r)=1\qquad \forall r\in N^*,$$

$$p>2\qquad f(p^r)=\frac{p-1}{p-2}\qquad \forall r\in N^*,$$

de sorte que

$$\forall d\geqslant 2\qquad g_P(d)=f(d)f(Pd-1).$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} g_P(d)^{u'}\leqslant\Big(\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} f(d)^{2u'}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} f(Pd-1)^{2u'}\Big)^{1/2}.$$

Pour estimer les deux expressions de droite, on va utiliser des théorèmes bien connus sur la valeur moyenne des fonctions multiplicatives ([2]):

$$\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} f(d)^{2u'}=\frac{x^{1-v}}{P}\prod_{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{f(p)^{2u'}\chi_{2P}(p)}{p-1}\Big)+\sigma(x^{1-v}),$$

[χ_{2P} désigne le caractère principal modulo $2P$.]

$$\sum_{\substack{1\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} f(d)^{2u'}=\frac{x^{1-v}}{P}\prod_{p|2P}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{p\nmid 2P}\Big(1+\frac{f(p)^{2u'}-1}{p}\Big)+\sigma(x^{1-v}).$$

D'autre part:

$$\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} f(Pd-1)^{2u'}=\sum_{r|2P}\mu(r)\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ d\equiv 0\ (r)}} f(Pd-1)^{2u'}$$

$$=\sum_{r|2P}\mu(r)\sum_{\substack{n\leqslant x^{1-v}-1\\ n\equiv -1\ (Pr)}} f(n)^{2u'}$$

$$=x^{1-v}\sum_{r|2P}\frac{\mu(r)}{\varphi(Pr)}\prod_{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{f(p)^{2u'}\chi_{rP}(p)}{p-1}\Big)+\sigma(x^{1-v}),$$

[χ_{rP} désigne le caractère principal modulo rP.]

$$\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} f(Pd-1)^{2u'}=x^{1-v}\prod_{p\nmid 2P}\Big(1+\frac{f(p)^{2u'}-1}{p}\Big)\times$$

$$\times\sum_{r|P}\mu(r)\Big\{\frac{\varphi(P)}{P\varphi(rP)}-\frac{\varphi(2P)}{2P\varphi(2rP)}\Big\}+\sigma(x^{1-v})$$

$$=\frac{x^{1-v}}{P}\prod_{p\nmid 2P}\Big(1+\frac{f(p)^{2u'}-1}{p}\Big)\frac{\varphi(P)}{2P}+\sigma(x^{1-v})$$

Ainsi, posant

$$a_P(u)=\prod_{p\nmid 2}\Big(1+\frac{\big((p-1)/(p-2)\big)^{2u'}-1}{p}\Big),$$

on obtient:

$$\sum_{\substack{2\leqslant d\leqslant x^{1-v}/P\\ (d,2P)=1}} g_P(d)^{u'}\leqslant\frac{x^{1-v}}{P}\cdot\frac{\varphi(P)}{2P}a_P(u)+\sigma(x^{1-v}). \tag{5}$$

Regroupant les inégalités (3), (4) et (5) on obtient la minoration

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^{1-v}/P\\ N_v(d,x)>0}}1\geqslant\frac{x^{1-v}}{P}\cdot\Big(\frac{v}{8a_2}\Big)^u\Big(\frac{2P}{\varphi(P)a_P(u)}\Big)^{u/u'}\Big(\prod_{p|P}\frac{p-2}{p-1}\Big)^u+\sigma_v(x^{1-v}).$$

Donc:

$$\underline{d}\mathcal{N}_P\geqslant\Big(\frac{v}{8a_2}\prod_{p|P}\frac{p-2}{p-1}\Big)^u\Big(\frac{2P}{\varphi(P)a_P(u)}\Big)^{u/u'}$$

et comme v est un nombre réel quelconque inférieur à $1/2$, on obtient

$$\underline{d}\mathcal{N}_P\geqslant\left(\frac{\prod_{p|P}\frac{p-2}{p-1}}{16a_2}\right)^u\Big(\frac{2P}{\varphi(P)a_P(u)}\Big)^{u/u'}. \tag{6}$$

Enfin, comme pour tout nombre premier impair p on a l'égalité:

$$\frac{p-2}{p-1} = \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

on obtient, en posant $a_{2P} = \prod_{p\nmid 2P}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$, la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Pour tout nombre réel $u>1$, on a la minoration*

$$\underline{d}\mathcal{N}_P \geqslant \frac{\varphi(P)}{P}\,\frac{1}{(16a_{2P})^u\big(a_P(u)/2\big)^{u-1}}. \tag{7}$$

3.3.1. Faisons $P=1$ dans l'inégalité (7). On obtient

$$\underline{d}\mathcal{N}_1 \geqslant \frac{1}{(16a_2)^u}\,\frac{1}{\big(a_1(u)/2\big)^{u-1}}. \tag{8}$$

La valeur de $a_2 = 0{,}66016\ldots$ figure dans [8]. Le calcul de $a_1(u)$ est assez délicat pour les valeurs de u très proches de 1, mais le maximum de l'expression de droite de (8), en tant que fonction de u, semble atteint en une valeur voisine de $u = 10/9$.

On trouve

$$a_1\left(\frac{10}{9}\right)^{1/10} = 7{,}442\ldots \quad \text{et} \quad \underline{d}\mathcal{N}_1 \geqslant \frac{1}{118{,}2}.$$

3.3.2. Faisons dans (7) le choix $P = 3\cdot5\cdot\ldots\cdot23$ et $u = 50/49$ On trouve:

$$a_{2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot23} = \prod_{2<p\leqslant 23}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}\cdot a_2 = 0{,}99126\ldots$$

et

$$a_{3\cdot\ldots\cdot23}\left(\frac{50}{49}\right)^{1/49} \leqslant 1{,}067.$$

Par conséquent:

$$\underline{d}\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23} \geqslant \frac{\varphi(3\cdot5\cdot\ldots\cdot23)}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot23}\cdot\frac{1}{17{,}6715} = \frac{1}{54{,}0121}.$$

3.4.1. Introduisons maintenant l'ensemble $\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23}$. Posons

$$P' = 2^7\cdot3^4\cdot5^3\cdot7^3\cdot11^2\cdot13^2\cdot17^2\cdot19^2\cdot23,$$

et

$$\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23} = \bigcup_{\delta|P'}\delta\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23}.$$

Il est clair que:

$$\underline{d}\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23} \geqslant \sum_{\delta|P'}\underline{d}(\delta\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23}) = \Big(\sum_{\delta|P'}1/\delta\Big)\,\underline{d}\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23} \geqslant \frac{\sigma(P')}{P'}\,\underline{d}\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23}.$$

Ainsi:

$$\underline{d}\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23} \geqslant (6{,}0391)\,\underline{d}\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23} \geqslant \frac{1}{8{,}96}.$$

3.4.2. Il reste maintenant à montrer que, pour toute fonction f élément de $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$, $f_{|\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23}} = 1$.

A l'exception du nombre 32, tout entier d diviseur de P' et puissance d'un nombre premier peut se mettre sous la forme:

$$d = \frac{p+1}{q+1},$$

où p et q sont deux nombres premiers et $(d, q+1) = 1$. [Voir tableau en annexe.] D'autre part:

$$32\cdot7 = 223+1.$$

Il est donc clair que $f_{|\mathcal{D}_{P'}} = 1$. En particulier $f(3\cdot5\cdot\ldots\cdot23) = 1$.

Comme tout entier n' de $\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23}$ peut se mettre sous la forme (II),

$$f_{|\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23}} = 1.$$

Enfin tout entier n élément de $\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23}$ s'écrit comme produit $n = dn'$, où $d|P'$, $n'\in\mathcal{N}_{3\cdot\ldots\cdot23}$ et $(d, n') = 1$. Par conséquent

$$f_{|\mathcal{N}'_{3\cdot\ldots\cdot23}} = 1.$$

3.5.1. Plus généralement à tout entier impair P, on peut associer un ensemble $\mathcal{N}'_P(P')$ en faisant choix d'un nombre P' dont les diviseurs premiers impairs sont ceux de P:

$$\mathcal{N}'_P(P') = \bigcup_{\delta|P'}\delta\mathcal{N}_P.$$

Il est clair que

$$\underline{d}\mathcal{N}'_P(P') \geqslant \frac{\sigma(P')}{P'}\,\underline{d}\mathcal{N}_P,$$

et que l'on ne peut espérer obtenir pour $\underline{d}\mathcal{N}'_P(P')$ (à partir de cette inégalité) une minoration meilleure que $\big(2P/\varphi(2P)\big)\,\underline{d}\mathcal{N}_P$, autrement dit meilleure que

$$\frac{2}{(16a_{2P})^u\big(a_P(u)/2\big)^{u-1}}. \tag{9}$$

Or on peut montrer que, u étant fixé, $a_{2P}^{u}(a_P(u)/2)^{u-1}$ est une fonction décroissante de P, pour P supérieur ou égal à une constante dépendant de u. En effet, pour tout nombre premier impair p, on a:

$$\left(\frac{p-1}{p-2}\right)^{2u'}-1=\left(1+\frac{1}{p-2}\right)^{2u'}-1\geqslant\frac{2u'}{p-2};$$

Ainsi:

$$\left(1+\frac{((p-1)/(p-2))^{2u'}-1}{p}\right)^{1/u'}\geqslant\left(1+\frac{2u'}{p(p-2)}\right)^{1/u'},$$

et cette dernière quantité peut être minorée, pour p assez grand par $1+$ $+1/p(p-2)$ (car la fonction $h\mapsto(1+h)^{1/u}-1-h/2u'$ est positive dans un intervalle $[0,h_0]$, la constante h_0 dépendant de u').

Par conséquent, pour p assez grand:

$$\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^u\left(1+\frac{((p-1)/(p-2))^{2u'}-1}{p}\right)^{u/u'}$$
$$\geqslant\left[\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\right]^u\geqslant 1.$$

On ne peut donc obtenir pour l'expression (9) une majoration supérieure à

$$\frac{1}{8}\,\frac{1}{\lim\limits_{P\to\infty}a_{2P}^{u}(a_P(u)/2)^{u-1}}=\frac{1}{8}.$$

Pour l'exposant ν du théorème, on ne peut donc avoir un meilleur résultat par cette méthode que $\nu\leqslant 8$.

3.5.2. Conjectures. Une première conjecture est que le facteur 8 qui figure dans la majoration de $N_v(d,x)$ peut être divisé par 4 (conjecture de Hardy–Littlewood); une seconde est que le théorème de Bombieri peut s'appliquer à toute valeur de l'exposant v (celui qui figure dans la définition de $N_v(d,x)$) inférieur à 1 (conjecture d'Elliott–Halberstam), ce qui permettrait de multiplier par 2 les résultats obtenus. On aurait alors l'inégalité $\underline{d}\mathcal{N}'_{3,\ldots,23}\geqslant 1/1{,}12$ et on en conclurait que l'entier ν du théorème 1 vaut 1, c'est-à-dire que la seule fonction élément de $\mathcal{M}_1(\mathcal{P}+1)$ est l'identité.

4.1. Cette partie établit le lien entre le résultat obtenu sur les fonctions multiplicatives et la représentation des entiers naturels comme produit ou quotient d'éléments d'un ensemble d'entiers donné A.

Les démonstrations employées sont calquées sur celle du théorème caractérisant les ensembles unitaires ([7], proposition 4) qui devient

alors un simple cas particulier (cas où $\nu=1$) du théorème énoncé ci-dessous:

Théorème. *Soit $A=\{a_i\}_{i\in I}$ une partie de $\mathbf{N}^*$ et ν un entier $\geqslant 1$. Il est équivalent de dire*

(i) *Pour toute fonction multiplicative f dont la restriction à A vaut 1, la fonction f^ν est identiquement égale à 1.*

(ii) *Toute fonction additive g, dont la restriction à A est à valeurs dans $\mathbf{Z}$, vérifie:*

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad \nu g(n)\in\mathbf{Z}.$$

(iii) *Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, il existe une suite $(a_i(n))_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbf{Z}$, presque tous nuls, telle que:*

$$\forall p\in\mathcal{P},\ \forall r\in\mathbf{N}^*,\qquad \sum_{\substack{i\in I\\ p^r\| a_i}}a_i(n)=\begin{cases}\nu & si\ p^r\|n,\\ 0 & si\ p^r\nparallel n.\end{cases}$$

4.2. Avant de démontrer le théorème, donnons-en une application.

Corollaire. *Il existe un entier $\nu\leqslant 8$ tel que pour tout entier $n\geqslant 1$, il existe une suite $(a_p(n))_{p\in\mathcal{P}}$ d'entiers relatifs presque tous nuls telle que*

$$n^\nu=\prod_{p\in\mathcal{P}}(p+1)^{a_p(n)}.$$

Démonstration. Le théorème 1 permet de dire que l'ensemble $\mathcal{P}+1$ satisfait la condition (i) du théorème précédent pour un certain entier $\nu\leqslant 8$. Et la condition équivalente (iii) implique la représentation donnée de tout entier n.

4.3. Démonstration du théorème. Démontrons d'abord que (i) implique (ii). Soit g une fonction additive telle que

$$\forall a\in A,\quad g(a)\in\mathbf{Z}.$$

La fonction multiplicative $f=e^{2i\pi g}$ vérifie

$$\forall a\in A,\quad f(a)=1;$$

la condition (i) implique alors

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad f^\nu(n)=1.$$

On en déduit:

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad \nu g(n)\in\mathbf{Z}.$$

Montrons maintenant que (ii) implique (iii).

Remarquons tout d'abord que la condition (ii) implique que A est un ensemble d'unicité pour les fonctions additives. En effet, soit f une fonction additive telle que

$$f(A) = \{0\}.$$

Ceci implique, d'après (ii) que $f(n) \in \boldsymbol{Z}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Considérons la fonction additive $g = f/\sqrt{2}$; g est nulle sur A et, par conséquent, $g(n) \in \boldsymbol{Z}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour que $\nu f(n)$ et $\nu g(n)$ appartiennent simultanément à $\boldsymbol{Z}$, il faut que $f(n) = g(n) = 0$.

On a ainsi démontré que f est identiquement nulle.

Soit maintenant $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants et $\mathscr{P}' = \{p_1', p_2', \ldots, p_k', \ldots\}$ l'ensemble des puissances de nombres premiers rangés dans l'ordre naturel:

$$\mathscr{P}' = \{2, 3, 2^2, 5, 7, \ldots\}:$$

On définit une fonction additive L par

$$L(p_k') = \xi_k \quad \forall k \geqslant 1.$$

Et l'on note:

V_L le $\boldsymbol{Q}$-espace vectoriel engendré par $\{L(p_k')\}_{k\geqslant 1}$,
U_L le $\boldsymbol{Q}$-sous-espace engendré par $\{L(a_i)\}_{i\in I}$,
M_L le $\boldsymbol{Z}$-module engendré par $\{L(p_k')\}_{k\geqslant 1}$,
N_L le $\boldsymbol{Z}$-sous-module engendré par $\{L(a_i)\}_{i\in I}$.

Montrons que la condition (ii) implique

$$\forall n \geqslant 1, \quad \nu L(n) \in N_L$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\forall p' \in \mathscr{P}', \quad \nu L(p') \in N_L.$$

Supposons qu'il existe un élément p_0' de $\mathscr{P}'$ tel que $\nu L(p_0') \notin N_L$. Soit $\{u_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ une base de N_L (qui est libre comme sous-module d'un module libre sur un anneau principal); $\{u_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ est aussi une base de U_L qui est identique à V_L car, d'après la remarque faite au début du paragraphe, A est un ensemble d'unicité. Par suite il existe des coefficients rationnels $\big(a_k(p_0')\big)_{k\in\boldsymbol{N}}$ presque tous nuls tels que

$$\nu L(p_0') = \sum_{k\in\boldsymbol{N}} \nu a_k(p_0') u_k,$$

et il en existe au moins un, appelons a_{k_0}, tel que

$$\nu a_{k_0} \notin \boldsymbol{Z}.$$

Soit φ l'application linéaire de V_L dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \varphi(u_{k_0}) = 1, \\ \varphi(u_k) = 0 \qquad \forall k \in \boldsymbol{N} - \{k_0\} \end{cases}$$

et g_φ la fonction additive égale à $\varphi \circ L$.

Pour tout élément a de A, il existe une suite $\big(a_k(a)\big)_{k\in\boldsymbol{N}}$ d'éléments de $\boldsymbol{Z}$, presque tous nuls, telle que:

$$L(a) = \sum_{k\in\boldsymbol{N}} a_k(a) u_k.$$

Ainsi

$$g_\varphi(a) = a_{k_0}(a) \in \boldsymbol{Z}.$$

On a donc construit une fonction additive g_φ dont la restriction à A est à valeurs dans $\boldsymbol{Z}$ sans que νg_φ le soit (car $\nu g_\varphi(p_0') = \nu a_{k_0} \notin \boldsymbol{Z}$).

Par conséquent on a montré que (ii) implique

$$\forall n \geqslant 1, \quad \nu L(n) \in N_L.$$

Donc il existe, pour tout entier $n \geqslant 1$, des coefficients entiers relatifs $\big(a_i(n)\big)_{i\in I}$, presque tous nuls, tel que

$$\nu L(n) = \sum_{i\in I} a_i(n) L(a_i).$$

Il suffit maintenant de remarquer que la fonction additive δ_{p^r} (où p^r est un élément quelconque de $\mathscr{P}'$) vérifie

$$\nu \delta_{p^r}(n) = \sum_{i\in I} a_i(n) \delta_{p^r}(a_i)$$

pour prouver la condition (iii).

Démontrons enfin que (iii) implique (i).

La condition (iii) entraîne trivialement la condition (ii) du théorème caractérisant les ensembles d'unicité ([7]) et donc ([7], lemme p. 11) implique que toute fonction multiplicative dont la restriction à A vaut 1 est de module égal à 1.

Soit f une fonction multiplicative telle que $f_{|A} = 1$. D'après la remarque ci-dessus, on peut définir une fonction additive g par:

$$\forall p^r \in \mathscr{P}', \quad f(p^r) = e^{2\pi i g(p^r)}, \quad 0 \leqslant g(p^r) < 1.$$

Alors,

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(n) = e^{2\pi i g(n)}.$$

On a les égalités suivantes

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(n) = \prod_{p^r \| n} \exp\{2i\pi g(p^r)\} = \exp\Big\{2\pi i \sum_{p^r \| n} g(p^r)\Big\},$$

$$f(n) = \exp\Big\{2i\pi \sum_{p\in\mathscr{P}} \sum_{r\geqslant 1} (1/\nu)\Big(\sum_{\substack{i\in I \\ p^r \| a_i}} a_i(n)\Big) g(p^r)\Big\},$$

$$f(n)^{\nu} = \exp\Big\{2i\pi \sum_{i\in I} \alpha_i(n) \sum_{p\in\mathscr{P}} \sum_{\substack{r\geqslant 1\\ p^r\| a_i}} g(p^r)\Big\}$$

$$= \exp\Big\{2i\pi \sum_{i\in I} \alpha_i(n) g(a_i)\Big\}$$

$$= \prod_{i\in I} \big(\exp\{2i\pi g(a_i)\}\big)^{\alpha_i(n)}$$

$$= \prod_{i\in I} f(a_i)^{\alpha_i(n)} = 1.$$

Ce qui prouve la condition (i) et achève la démonstration du théorème.

Annexe

Tout entier d figurant dans la liste ci-dessous se met sous la forme

$$d = \frac{p+1}{q+1} \quad \text{où} \quad (d, q+1) = 1$$

d	q	p	d	q	p
2	2	5	7	5	41
2^2	2	11	7^2	5	293
2^3	2	23	7^3	17	6173
2^4	2	47	11	3	43
2^6	2	191	11^2	7	967
2^7	2	383	13	7	103
3	3	11	13^2	5	1013
3^2	7	71	17	5	101
3^3	3	107	17^2	5	1733
3^4	7	647	19	7	151
5	3	19	19^2	7	2887
5^2	5	149	23	5	137
5^3	3	499			

References

[1] H. Delange, *Sur la distribution des valeurs des fonctions multiplicatives complexes*, C. R. Acad. Sci., Paris 276 (1973) (15 janvier).

[2] — *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 3ème série, 78 (1961), p. 273–304.

[3] F. Dress et B. Volkmann, *Ensembles d'unicité pour les fonctions additives ou multiplicatives*, C. R. Acad. Sci., Paris 287 (1978) (10 juillet).

[4] P. D. T. A. Elliott, *A conjecture of Katái*, Acta Arith. 26 (1974), p. 11–20.

[5] H. Halberstam and H. E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press, London 1974.

[6] J. Meyer, *Sur les fonctions additives bornées sur les nombres de la forme $p+1$, avec p premier*, Bull. Soc. Math. France 105 (1977), p. 33–45.

[7] J. Meyer, *Ensembles d'unicité pour les fonctions additives. Etude analogue dans le cas des fonctions multiplicatives*, Publications Math. d'Orsay 81. 01 (1981), p. 50–66.

[8] N. M. Shah and B. M. Wilson, *On an empirical formula connected with Goldbach's theorem*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 19 (1919), p. 238–244.

[9] E. Wirsing, *Additive functions with restricted growth on the numbers of the form $p+1$*, Acta Arith. 37 (1981), p. 345–357.

[10] D. Wolke, *Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen*, Elements of Math. 33 (1978), p. 14–16.

UNIVERSITÉ DE REIMS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Moulin de la Housse
B.P. 347
51062 Reims Cedex

Reçu le 4. 5. 1981 (1251)