ACTA ARITHMETICA
XLII (1983)

Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le k-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de n

par

GUY ROBIN (Limoges)

0. Introduction. Désignons par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, par $\theta(x)$ la fonction de Tchebychef: $\theta(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p \text{ premier}}} \log p$ et par p_k le k-iéme nombre premier.

La première partie de ce travail étude le comportement asymptotique de $\theta(p_k)$ sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$. On montre en particulier (théorème 1) que l'équivalence $\theta(p_k) \sim k\log k$ est une proposition plus faible que le théorème des nombres premiers et que $\theta(p_k) > k\log k$ pour k assez grand dès que $\theta(x) < ax$ pour x assez grand $(a > 1)$.

La deuxième partie donne des encadrements explicites pour $\theta(p_k)$ lorsque p_k est la suite des nombres premiers usuels. Dans leur article ([15], p. 243), Rosser et Schoenfeld annoncent comme conséquence de calculs des zéros de la fonction ζ de Riemann qu'ils peuvent démontrer que $\theta(p_k) \geqslant k\log k$ pour $k \geqslant 13$. Nous donnons une démonstration simple de ce résultat (théorème 4) qui utilise seulement l'inégalité classique $\theta(x) < x\log 4$ pour $x > 0$ et le calcul des valeurs de $\theta(p_k)$ pour $k \leqslant 115$.

D'autres inégalités, utilisant les résultats de Rosser et Schoenfeld, sont données:

(Théorème 6) $\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1{,}0769)$ pour $k \geqslant 2$ avec égalité pour $k = 66$.

$$\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1) \quad \text{pour } k \leqslant 17 \text{ et } k \geqslant 5106,$$
$$\theta(p_k) < k(\log k + \log\log k - 1) \quad \text{pour } 18 \leqslant k \leqslant 5105.$$

Remarque. La $1^{\text{ère}}$ inégalité du théorème 6 signifie que:

$$\forall k \geqslant 2,\ k \neq 66, \quad \theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1{,}0769)$$

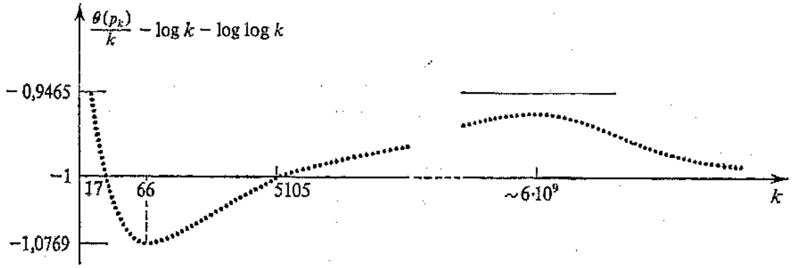
et que la constante C définie par

$$\theta(p_{66}) = 66(\log 66 + \log\log 66 - C)$$

vaut $C = 1{,}0768\ \ldots$

Cette remarque vaut pour toute la suite.

(Théorème 8) $\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k - 0{,}9465)$ pour $k \geqslant 14$ ce qui permet de tracer le graphe ci-dessous.



On montre aussi

(Théorème 7) $\theta(p_k) \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \dfrac{\log\log k}{\log k} - \dfrac{2{,}1454}{\log k}\right)$

pour $k \geqslant 3$ avec égalité pour $k = 4714$.

(Théorème 8) $\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \dfrac{\log\log k}{\log k} - \dfrac{1{,}9185}{\log k}\right)$

pour $k \geqslant 126$ et sous l'hypothèse de Riemann,

(Théorème 9) $|\theta(p_k) - \mathrm{li}^{-1}(k)| \leqslant 0{,}2377\, k^{1/2}(\log k)^{3/2}$ pour $k \geqslant 5$, avec

$$\mathrm{li}(x) = v\cdot p \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + 1{,}045\ \ldots$$

Nos calculs nous ont permis d'améliorer les encadrements de p_k donnés dans [12]: ainsi

pour $k \geqslant 2$ $\quad p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1{,}0072629)$,
pour $k \geqslant 2$ et $p_k \leqslant 10^{11}$ $\quad p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1)$,
pour $k \geqslant 7022$ $\quad p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0{,}9385)$.

Les troisième et quatrième parties portent sur l'étude des grandes valeurs, de la fonction $\omega(n)$: nombre de diviseurs premiers de l'entier n. Nous précisons certains résultats obtenus par Hardy et Ramanujan [4], Bateman, Chowla et Erdös [1] et Norton [8].

Dans la troisième partie tous les résultats donnés sont conséquence d'encadrement de type Tchebychef:

$$ax < \theta(x) < bx, \qquad a, b > 0$$

et peuvent donc se généraliser à des fonctions voisines de $\omega(n)$ par exemple $\omega_{k,l}(n)$ = nombre de facteurs premiers de $n \equiv k \bmod l$.

Nous obtenons

(Théorème 11)

$$\omega(n) \leqslant 1{,}3841 \frac{\log n}{\log\log n} \quad \text{pour } n \geqslant 3,$$

(Théorème 12)

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} + 1{,}45743 \frac{\log n}{(\log\log n)^2} \quad \text{pour } n \geqslant 3,$$

(Théorème 13)

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n - 1{,}1714} \quad \text{pour } n \geqslant 26.$$

Cette valeur 1,1714 améliore la constante 1,4 donnée par Norton ([8], p. 97).

Dans la dernière partie nous utilisons les résultats de Rosser et Schoenfeld pour prouver:

(Théorème 16)

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} + \frac{\log n}{(\log\log n)^2} + 2{,}89726 \frac{\log n}{(\log\log n)^3}, \quad n \geqslant 3.$$

Toutes ces formules sont les meilleures possibles puisque pour chacune d'elles il existe un n pour lequel il y a égalité.

Enfin en nous plaçant sous l'hypothèse de Riemann et en utilisant [16], on obtient:

(Théorème 17)

$$\omega(n) < \mathrm{li}(\log n) + 0{,}12(\log n)^{1/2} \quad \text{pour } n \geqslant 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7.$$

La démonstration des théorèmes des deux dernières parties se fait par l'intermédiaire de nombres jouant un rôle analogue aux nombres hautement composés supérieurs de Ramanujan [6] et [10].

Nous dirons que N est (f, g) hautement composé supérieur s'il existe $\lambda > 0$ tel que N maximise $f(n) - \lambda g(n)$. Pour Ramanujan $f(n) = \log d(n)$ et $g(n) = \log n$. Dans notre travail $f(n)$ et $g(n)$ prendront diverses valeurs. Nous obtiendrons toujours des sous familles des nombres $N_k = \prod_{p \leqslant p_k} p$ et dans la plupart des cas la caractérisation de ces sous familles est un problème ouvert.

1. Comportement asymptotique de $\theta(p_k)$. Nous dirons que $f(x) \asymp g(x)$ s'il existe $x_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$ tels que

$$\forall x \geqslant x_0 \quad af(x) \leqslant g(x) \leqslant bf(x).$$

THÉORÈME 1. *Les 4 propositions suivantes sont équivalentes*:

(1) $$\pi(x) \asymp x/\log x,$$

(2) $$\theta(x) \asymp x,$$

(3) $$p_k \asymp k\log k,$$

(4) $$\theta(p_k) = k\big(\log k + \log\log k + O(1)\big).$$

Démonstration. Montrons l'équivalence de (3) et (4). Remarquons que (3) s'écrit

$$\log p_k = \log k + \log\log k + O(1).$$

Par suite

$$\theta(p_k) = \sum_{i=1}^{k} \log p_i = \sum_{i=1}^{k} \log i + \sum_{i=1}^{k} \log\log i + O(k)$$
$$= k\big(\log k + \log\log k + O(1)\big).$$

Inversement: l'inégalité $\theta(p_k) \leqslant k\log p_k$ toujours vraie montre que

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + O(1).$$

D'autre part

$$\theta(p_{2k}) - \theta(p_k) = 2k\big(\log 2k + \log\log 2k + O(1)\big) - k\big(\log k + \log\log k + O(1)\big)$$
$$= k\big(\log k + \log\log k + O(1)\big).$$

Comme cette différence est supérieure à $k\log p_k$ il vient

$$\log p_k \leqslant \log k + \log\log k + O(1).$$

L'équivalence (3)$\Leftrightarrow$(4) montre que la suite $\log p_k$ a le même comportement que sa moyenne de Césaro $\dfrac{1}{k}\theta(p_k)$.

Les théorèmes précédents peuvent être précisés par l'étude des développements asymptotiques à l'ordre supérieur. On peut ainsi montrer (voir aussi [8], p. 14)

THÉORÈME 2. *Les trois premières propositions sont équivalentes et entraînent la quatrième.*

(a) $$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

(b) $$\theta(x) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

(c) $$p_k = k[\log k + \log\log k + O(1)],$$

(d) $$\theta(p_k) = k\left[\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} + O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right].$$

THÉORÈME 3. *Les trois premières propositions sont équivalentes et entraînent la quatrième.*

(a) $$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{1/2}\log x),$$

(b) $$\theta(x) = x + O(x^{1/2}\log^2 x),$$

(c) $$p_k = \mathrm{li}^{-1}(k) + O\big(k^{1/2}(\log k)^{5/2}\big),$$

(d) $$\theta(p_k) = \mathrm{li}^{-1}(k) + O\big(k^{1/2}(\log k)^{3/2}\big).$$

2. Estimations de $\theta(p_k)$. D'après les résultats de Tchebychef, nous avons $\theta(x) \asymp (x)$ ce qui entraîne d'après le théorème 1,

$$\theta(p_k) \geqslant k\log k \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

Nous précisons cette minoration dans le théorème 4 et une majoration dans le théorème 5 en utilisant les encadrements de Hanson ([3], voir aussi [2]).

(5) $$\theta(x) \leqslant x\log 3 \quad \text{pour } x > 0,$$

(6) $$\theta(n) \geqslant \tfrac{3}{4}n \quad \text{pour } n \geqslant 13.$$

La majoration classique $\theta(x) < x\log 4$ donne avec

(7) $$\pi(x) = \int_{2^-}^{x} \frac{d\big(\theta(t)\big)}{\log t} = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_{2}^{x} \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt,$$

(8) $$\pi(x) \leqslant 1{,}74\,\frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant 600$$

et de (6) on déduit

(9) $$\pi(x) \geqslant \frac{3}{4}\,\frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant 5.$$

Les théorèmes 6, 7 et 8 donnent des estimations plus fines à partir des résultats de Rosser et Schoenfeld [12]–[16],

(10) $$\theta(x) < x \quad \text{pour } x < 10^{11} \quad ([16], \text{ p. } 359),$$

(11) $$\theta(x) < x + 0{,}000081\,\frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant 1 \quad ([16], \text{ p. } 360),$$

(12) $$|\theta(x) - x| \leqslant \frac{0{,}007763x}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant 1{,}04\cdot 10^7 \quad ([16], \text{ p. } 359),$$

(13) $$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 3/2) \quad \text{pour } k \geqslant 2 \quad ([14], \text{ p. } 69),$$

(14) $$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 1/2) \quad \text{pour } k \geqslant 20 \quad ([14], \text{ p. } 69).$$

Théorème 4. *Si p_k est la suite des nombres premiers on a:*

(15) *pour* $k\geqslant 13$ $\quad \theta(p_k) > k\log k$

c'est-à-dire $p_1\times p_2\times\ldots\times p_k > k^k$.

Démonstration. Soit $3\leqslant k_0\leqslant k$ et supposons

$$\pi(x) < b\frac{x}{\log x}\qquad \text{pour } x\geqslant p_{k_0}$$

ou encore

$$p_i\geqslant \frac{i}{b}\log p_i\geqslant \frac{i\log i}{b}\qquad \text{pour } i\geqslant k_0.$$

On a alors

$$\theta(p_k)-\theta(p_{k_0}) = \sum_{i=k_0+1}^{k}\log p_i$$

$$\geqslant \sum_{i=k_0+1}^{k}(\log i+\log\log i-\log b)$$

$$\geqslant \int_{k_0}^{k}\log x\,dx+\int_{k_0}^{k}\log\log x\,dx-(k-k_0)\log b$$

$$= [x\log x-x]_{k_0}^{k}+[x\log\log x-\mathrm{li}(x)]_{k_0}^{k}-(k-k_0)\log b.$$

Posons

$$f(k) = \theta(p_k)-k\log k,\qquad g(x) = x\log\log x-x-x\log b-\mathrm{li}(x).$$

Alors $f(k)-f(k_0)\geqslant g(k)-g(k_0)$.

La fonction g a pour dérivée

$$g'(x) = \log\log x-1-\log b.$$

On a $g'(x)\geqslant 0$ si $x\geqslant x_0 = e^{eb}$.

Par suite pour $k\geqslant k_0\geqslant [x_0]+1$ on aura $g(k)\geqslant g(k_0)$ et donc $f(k)\geqslant f(k_0)$. Pour $k_0\geqslant 115$ on a $x_0\leqslant 113$ d'après (8). Donc $f(k) > f(115) > 0$ pour $k\geqslant 115$. Il ne reste plus qu'à calculer $\theta(p_k)$ pour $k\leqslant 115$.

Théorème 5.

(16) $\theta(p_k)\leqslant k(\log k+\log\log k)$ $\quad$ *pour* $k\geqslant 3$.

Démonstration. Pour $k\geqslant 2$ on a $p_k < ek\log k$. En effet d'après (9)

$$p_k\leqslant \tfrac{4}{3}k\log p_k < ek\log k\qquad \text{car}\qquad p_k < k^2.$$

Par suite $\log p_k\leqslant \log k+\log\log k+1$.

Pour $k\geqslant k_0\geqslant 2$ on peut alors écrire

$$\theta(p_{k-1})-\theta(p_{k_0}-1)\leqslant \int_{k_0}^{k}(\log x+\log\log x+1)\,dx$$

$$= [x\log x+x\log\log x-\mathrm{li}(x)]_{k_0}^{k}.$$

Prenons

$$f(k) = \theta(p_{k-1})-k(\log k+\log\log k)+\log(ek\log k),$$

$$g(x) = -\mathrm{li}(x)+\log(ex\log x).$$

On a $f(k)-f(k_0)\leqslant g(k)-g(k_0)$

$$g'(x) = -\frac{1}{\log x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\log x}\qquad \text{est négative pour } x\geqslant 7.$$

Donc $f(k)\leqslant f(k_0)$ pour $k\geqslant k_0\geqslant 4$, or $f(4) = -0{,}74 < 0$.

Par suite

$$\theta(p_k) = \theta(p_{k-1})+\log p_k\leqslant f(k)+k(\log k+\log\log k)$$

soit

$$\theta(p_k)\leqslant k(\log k+\log\log k),\qquad k\geqslant 4.$$

Et on vérifie à la main que la formule est encore valable pour $k=3$.

Avant d'anoncer les théorèmes sur des encadrements plus fins nous avons besoin de quelques lemmes. Les résultats sur les minorations sont meilleurs que ceux obtenus pour les majorations.

Minorations:

Lemme 1. *On suppose qu'il existe* $a>0$, k_0, k_1 *vérifiant* $e^a\leqslant \log k_0 < \log k_1$ *tels que*

$$\forall k;\ k_0\leqslant k\leqslant k_1\quad p_k\geqslant k(\log k+\log\log k-a)$$

alors on a

(17) $$\theta(p_k)-\theta(p_{k_0})\geqslant \int_{k_0}^{k}\left(\log x+\log\log x+\frac{\log\log x}{\log x}-\frac{\alpha}{\log x}\right)dx$$

avec $\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\log z-a)^2}{z}+a$ *où* z *est défini par*

$$z = \begin{cases}\log k_0 & si\quad \log k_0 > e^{a+2},\\ \log k_1 & si\quad \log k_1 < e^{a+2},\\ e^{a+2} & si\quad \log k_0\leqslant e^{a+2}\leqslant \log k_1.\end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + \log\left(1 + \frac{\log\log k - a}{\log k}\right).$$

Pour tout $x \geqslant e^a$ on a

$$\log\left(1 + \frac{\log x - a}{x}\right) \geqslant \frac{\log x - a}{x} - \frac{(\log x - a)^2}{2x^2}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{(\log x - a)^2}{x}$ est croissante dans l'intervalle $e^a < x \leqslant e^{a+2}$ et décroissante pour $x \geqslant e^{a+2}$. En appliquant cette remarque à $x = \log k$ il vient

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + \frac{\log\log k - \alpha}{\log k}$$

où α est défini dans l'énoncé.

Par suite pour $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \sum_{i=k_0+1}^{k}\left(\log i + \log\log i + \frac{\log\log i - \alpha}{\log i}\right).$$

Le lemme se démontre en remarquant alors que la fonction

$$x \mapsto \log x + \log\log x + \frac{\log\log x - \alpha}{\log x}$$

est croissante pour $x \geqslant 0$.

LEMME 2. *Pour* $k \geqslant e^{10}$

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1{,}13415).$$

Démonstration. Partons de

$$\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1) - \mathrm{li}(k) \qquad ([13],\ \text{p. } 216)$$

et

$$\theta(p_k) \leqslant p_k + \frac{0{,}021}{\log p_k} p_k \qquad \text{d'après (11).}$$

D'après l'inégalité (14), $p_k/\log p_k \leqslant k$ donc

$$\theta(p_k) \leqslant p_k + 0{,}021k$$

par suite $p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1{,}021) - \mathrm{li}(k)$.

On obtient le lemme en utilisant une table donnant $\mathrm{li}(k)$ en fonction de $k/\log k$. Ainsi pour

$$k \geqslant e^{10}, \quad \mathrm{li}(k) < 1{,}1315\frac{k}{\log k} \leqslant 0{,}11315\ k.$$

THÉORÈME 6. *Pour* $k \geqslant 2$

$$\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1{,}076868) \tag{18}$$

avec égalité pour $k = 66$.

Pour $k \leqslant 17$ *et* $k \geqslant 5106$

$$\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1). \tag{19}$$

Pour $18 \leqslant k \leqslant 5105$

$$\theta(p_k) < k(\log k + \log\log k - 1). \tag{20}$$

On suppose les hypothèses du lemme 1 vérifiées et $k_1 = \infty$. On a donc

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant [x\log x - x + x\log\log x - \mathrm{li}(x)]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log x - \alpha}{\log x}\,dx$$

et on pose

$$f(k) = \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 1),$$

$$g(x) = -\mathrm{li}(x) + \int_{k_0}^{x} \frac{\log\log x - \alpha}{\log x}\,dx, \qquad x \geqslant k_0,$$

on a alors $f(k) - f(k_0) \geqslant g(k) - g(k_0)$.

L'étude de la fonction g montre que si

$$\frac{\log\log k_0 - (\alpha + 1)}{\log k_0} \geqslant 0 \tag{21}$$

alors $\forall k \geqslant k_0 \quad g(k) \geqslant g(k_0)$ et par suite $f(k) \geqslant f(k_0)$.

On prend $k_0 = e^{10}$, $a = 1{,}13415$ (lemme 2) alors $\alpha = 1{,}22122$ et (21) est vérifié.

On constate que $f(k_0) > 0$ et on termine au calculateur pour $k < k_0$.

LEMME 3. *Pour* $p_k \leqslant 10^{11}$ *et* $k \geqslant 2$

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1).$$

Pour $p_k \geqslant 10^{11}$

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1{,}0077629).$$

Démonstration. On procède comme dans le lemme 2.

Pour $p_{5106} \leqslant p_k \leqslant 10^{11}$ on utilise (19) et (10).
Pour $p_k \geqslant 10^{11}$ on utilise (19) et (12).

THÉORÈME 7. *Pour* $k \geqslant 3$

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{2{,}1454}{\log k}\right) \tag{22}$$

avec égalité pour $k = 4714$.

Démonstration. Sous les hypothèses du lemme 1, la formule (17) peut être écrite:

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \Big[x\log x - x + x\log\log x - \mathrm{li}(x) - $$
$$- a\,\mathrm{li}(x) + \frac{x\log\log x}{\log x}\Big]_{k_0}^{k} - \int_{k_0}^{k} t\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)' dt.$$

Pour $\beta > 0$ posons

$$f(k) = \theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - \beta}{\log k}\right)$$

et pour $x \geqslant k_0$

$$g(x) = \frac{\beta x}{\log x} - (1+a)\,\mathrm{li}(x) - \int_{k_0}^{x} t\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)' dt.$$

On choisit,

$$\beta = \frac{\log k_0(1+a) - \log\log k_0 + 1}{\log k_0 - 1}$$

alors on aura $\beta \geqslant 1+a$ si $\log\log k_0 < a+2$; dans ce cas g est alors croissante et $f(k) \geqslant f(k_0)$ pour $k_0 \leqslant k < k_1$.

On applique alors successivement le lemme 1 pour les valeurs indiquées dans le tableau suivant. La dernière colonne indique le choix de β.

k_0	k_1	a	α	β
$\pi(10^{11})$	∞	1,0077629	1,1063729	2,106893
400 000	$\pi(10^{11})$	1	1,09957	2,1452
250 000	400 000	1	1,0939889	2,1442
210 000	250 000	1	1,092948	2,1451
200 000	210 000	1	1,092526	2,14523

On conclut que pour $k \geqslant 200000$ $f(k) \geqslant f(200000)$ pour le choix de $\beta = 2{,}1453$. On vérifie à l'ordinateur que pour $3 \leqslant k \leqslant 200000$ $f(k) > 0$. D'où le théorème.

Terminons cette étude en précisant selon les intervalles les meilleures minorations

$13 \leqslant k \leqslant 5105$

$$\theta(p_k) > k\log k \quad (\text{valable } \forall k \geqslant 13),$$

$5106 \leqslant k \leqslant 5139$

$$\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1) \quad (k \geqslant 5106),$$

$k \geqslant 5140$

$$\theta(p_k) > k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 2{,}1454}{\log k}\right) \quad (k \geqslant 3).$$

Majorations. Nous nous proposons de déterminer $a > 0$ pour que

$$\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k - a) \quad \forall k \geqslant k_0.$$

Nous ne donnerons pas la meilleure valeur de a, les calculs étant trop longs. En effet, en admettant l'hypothèse de Riemann (voir théorème 9), $\theta(p_k)$ est très proche de $\mathrm{li}^{-1}(k)$. La fonction $x \mapsto \log x + \log\log x - \dfrac{\mathrm{li}^{-1}(k)}{x}$ admet un minimum dans l'intervalle $[516\cdot 10^7, 520\cdot 10^7]$ qui vaut environ $0{,}952\ldots$ Il faudrait donc calculer $\theta(p_k)$ jusqu'à $k = 6\cdot 10^9$ pour trouver la meilleure valeur de a, sous l'hypothèse de Riemann. Sans hypothèse, il résultera de l'inégalité (24) qu'il faudrait pousser le calcul jusqu'à $k = 10^{15}$.

LEMME 4. *Supposons* $\exists a > 0$ *tel que* $\forall k \geqslant k_0$

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - a) \quad \textit{et} \quad \log\log k_0 \geqslant \max(a, 1)$$

alors

$$\frac{p_k}{\log p_k} \leqslant k\left(1 - \frac{a_1}{\log k}\right) \quad \textit{pour } k \geqslant k_0 \textit{ avec } a_1 = a\,\frac{1}{1 + \log\log k_0/\log k_0}.$$

Démonstration. On a

$$\frac{p_k}{\log p_k} \leqslant \frac{k(\log k + \log\log k - a)}{\log k + \log\log k + \log\left(1 + \dfrac{\log\log k - a}{\log k}\right)}$$
$$\leqslant \frac{k(\log k + \log\log k - a)}{\log k + \log\log k} \quad \text{puisque } \log\log k \geqslant a.$$

On obtient le lemme en remarquant que $k \mapsto \dfrac{\log\log k}{\log k}$ décroît si $\log\log k > 1$.

LEMME 5. *Si*
$$\theta(x) \geqslant x - \beta\frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant p_{k_0},\ k_0 > 0.$$
Si
$$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - b}{\log k}\right) \quad \text{pour } k \geqslant k_0$$
alors
$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - a) \quad \text{pour } k \geqslant k_0$$
avec $a = 1 - \beta - \exp\left(-(b+1+a_1\beta)\right)$ *où* a_1 *a été défini au lemme* 4.

Démonstration. On a
$$p_k\left(1 - \frac{\beta}{\log p_k}\right) \leqslant \theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - b}{\log k}\right).$$
Donc
$$p_k \leqslant k\left(\log k + \log\log k - (1-\beta) + \frac{\log\log k - b - a_1\beta}{\log k}\right),$$
d'après le lemme 4.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\log x - c}{x}$ $(x > 0)$ a un maximum pour $x = e^{c+1}$ valant $e^{-(c+1)}$ d'où le résultat.

LEMME 6. *Si* $p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - a)$ *pour* $k \geqslant k_0$ *soit* $\mu = \dfrac{\log k_0}{k_0} + \dfrac{1}{k_0}$ *et* b *vérifiant*
$$\log(1+a-b-\mu) + b + 2 \geqslant 0.$$
Supposons $\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \dfrac{\log\log k - b}{\log k}\right)$ *pour* $k = k_0$ *alors cette inégalité est vérifiée pour* $k \geqslant k_0$.

Démonstration. On a
$$\log p_k \leqslant \log k + \log\log k + \frac{\log\log k - a}{\log k}.$$
Donc
$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) \leqslant \int_{k_0}^{k}\left(\log x + \log\log x + \frac{\log\log x - a}{\log x}\right)dx$$
$$\leqslant \left(x\log x - x + x\log\log x - \mathrm{li}(x)(1+a) + \frac{x\log\log x}{\log x}\right)_{k_0}^{k} - \int_{k_0}^{k} t\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)' dt.$$

Posons
$$f(k) = \theta(p_{k-1}) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - b}{\log k}\right) + \log k + \log\log k + \nu,$$
$$\nu = \frac{\log\log k_0 - a}{\log k_0}$$
et
$$g(x) = -(a+1)\,\mathrm{li}(x) + \frac{bx}{\log x} - \int_{k_0}^{k} t\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)' dt + \log x + \log\log x + \nu.$$
On a donc $f(k) - f(k_0) \leqslant g(k) - g(k_0)$.

Si b vérifie la relation de l'énoncé alors g est décroissante pour $k \geqslant k_0$ et le lemme est démontré. En effet:
$$g'(x) = \frac{b-a-1}{\log x} - \frac{b+1}{\log^2 x} + \frac{\log\log x}{\log^2 x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x},$$
$$g'(x) < \frac{b-a-1-\mu}{\log x} + \frac{\log\log x - (b+1)}{\log^2 x}$$
expression du signe de $\log x(b-a-1-\mu) + \log\log x - (b+1)$.

Cette expression est maximum en x_1 tel que
$$1/\log x_1 = a+1-b-\mu.$$
Par suite ce maximum sera négatif si b vérifie
$$\log(1+a-b-\mu) + 2 + b \geqslant 0.$$

THÉORÈME 8.
$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0{,}9385) \quad \forall k \geqslant 7022, \tag{23}$$
$$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 1{,}9185}{\log k}\right) \quad \forall k \geqslant 126, \tag{24}$$
$$\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k - 0{,}9465) \quad \forall k \geqslant 14. \tag{25}$$

Démonstration. On suppose $p_k \geqslant 1{,}04\times 10^7$, soit $k \geqslant p_k/\log p_k = 643672$. On peut donc prendre dans le lemme 4, $a_1/a = 0{,}83759$, dans le lemme 5, $\beta = 0{,}007763$ et dans le lemme 6, $\mu = 2{,}23\times 10^{-5}$.

On part de la relation (14) avec $a = 0{,}5$, on obtient successivement en utilisant les lemmes 6 et 5

$b = 1{,}46$, $a = 0{,}90708$,
$b = 1{,}88$, $a = 0{,}93643$,
$b = 1{,}915$, $a = 0{,}93836$,
$b = 1{,}9184$, $a = 0{,}9385$.
$b = 1{,}9185$

Pour $p_k \leqslant 1{,}04 \times 10^7$ on utilise l'ordinateur; l'inégalité (25) de déduit de (24).

THÉORÈME 9. *Sous l'hypothèse de Riemann*

$$\begin{aligned} &\textit{pour } k \geqslant 312 && |\theta(p_k) - \mathrm{li}^{-1}(k)| \leqslant 0{,}1224 k^{1/2} (\log k)^{3/2}, \\ (26)\qquad &\textit{pour } k \geqslant 5 && |\theta(p_k) - \mathrm{li}^{-1}(k)| \leqslant 0{,}2377 k^{1/2} (\log k)^{3/2}, \\ &\textit{pour } k \geqslant 5 && \theta(p_k) \geqslant \mathrm{li}^{-1}(k) - 0{,}12 k^{1/2} (\log k)^{3/2}. \end{aligned}$$

Démonstration. On procède comme dans les théorèmes précédents en utilisant les encadrements de Shoenfeld [16].

$$(27)\qquad \pi(x) < \mathrm{li}(x) + x^{1/2}\log x / 8\pi, \quad x \geqslant 1{,}5,$$

$$(28)\qquad \pi(x) > \mathrm{li}(x) - x^{1/2}\log x / 8\pi, \quad x \geqslant 2657.$$

On démontre d'abord le résultat pour $k \geqslant 12481$ puis on regarde à l'ordinateur pour $k < 12481$.

3. Grandes valeurs de la fonction $\omega(N)$. Dans cette partie on n'utilisera, que des majorations du type Tchebychef c.a.d. essentiellement les formules (5) et (6).

On pose $N_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$. Ces nombres sont fondamentaux dans notre étude. On a $\log N_k = \theta(p_k)$.

THÉORÈME 10.

$$\omega(N_k) > \frac{\log N_k}{\log\log N_k}, \quad k \geqslant 3.$$

C'est une conséquence du théorème 5.

THÉORÈME 11. *Pour* $n \geqslant 3$

$$(29)\qquad \omega(n) \leqslant 1{,}38402 \frac{\log n}{\log\log n}$$

avec égalité pour $n = N_9$.

Remarquons d'abord que la fonction $f(n) = \dfrac{\omega(n)\log\log n}{\log n}$ atteint son maximum sur un nombre N_k.

En effet comme $N_k \leqslant n < N_{k+1}$ entraîne $\omega(n) \leqslant k$, et puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{\log\log x}{\log x}$ est décroissante pour $x \geqslant 16$ on a $f(n) < f(N_k)$ pour $N_k \leqslant n < N_{k+1}$ et $k \geqslant 3$. On calcule $f(N_k)$ pour $k = 3, 4, \ldots, 12$; le maximum est atteint pour $k = 9$ et vaut $1{,}38401\ldots$ Pour $n < N_3 = 30$ on vérifie à la main que $f(n) < f(N_9)$.

Pour les nombres N_k avec $k \geqslant 13$ utilisons $\theta(p_k) \geqslant k\log k$ (théorème 4).

Compte tenu de la décroissance de $x \mapsto \dfrac{\log x}{x}$ pour $x > e$ on a

$$f(N_k) = \frac{k\log\theta(p_k)}{\theta(p_k)} \leqslant \frac{k\log(k\log k)}{k\log k} \leqslant 1 + \frac{\log\log k}{\log k} \leqslant 1 + \frac{\log e}{e} \leqslant 1{,}37.$$

THÉORÈME 12. *Pour* $n \geqslant 3$ *on a*

$$(30)\qquad \omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} + 1{,}45743 \frac{\log n}{(\log\log n)^2}$$

avec égalité pour $n = N_{47}$.

On peut procéder comme dans le théorème 10 en montrant que l'égalité ne peut avoir lieu que sur un nombre N_k et en utilisant une minoration de $\theta(p_k)$ de la forme

$$\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - a).$$

En utilisant $a = 1{,}0768$ obtenu dans le théorème 6 on constate qu'il est nécessaire de faire des vérifications pour $k \leqslant k_0 = 50000$. Si on utilise seulement $\theta(x) < x\log 3$ alors k_0 devient 1000000. Néanmoins cette dernière majoration et $k_0 = 500$ sont suffisants pour la méthode que nous présentons maintenant, déjà utilisée pour la fonction somme des diviseurs: voir [7] et [11].

DÉFINITION. Nous dirons que N est *ω-hautement composé supérieur* s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\omega(n) - \lambda\log n$ soit maximum en N. On dira alors que N est un nombre ω-h.c.s. pour le paramètre λ.

On vérifie alors que

si $\dfrac{1}{\log p_{k+1}} < \lambda < \dfrac{1}{\log p_k}$ N_k est ω-h.c.s. pour λ,

si $\lambda = \dfrac{1}{\log p_k}$ N_k et N_{k-1} sont ω-h.c.s. pour λ.

LEMME 7. *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{N}^*$ à valeurs dans $\mathbf{R}$; g est croissante positive.*

Supposons que

1) *N maximise $f(n) - \varepsilon' g(n)$ sur $\mathbf{N}^*$ pour $\varepsilon' > 0$;*

2) *Il existe $M > N$, $\varepsilon > 0$ tels que $\forall n \geqslant N$*

$$f(M) - \varepsilon g(M) \geqslant f(n) - \varepsilon g(n)$$

alors M maximise $f(n) - \varepsilon g(n)$ sur $\mathbf{N}^*$.

Démonstration évidente.

LEMME 8. *Soient f et g deux fonctions C^2 définies sur $\mathbf{R}^+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que f soit strictement croissante pour $t \geqslant t_0$ et $g \circ f^{-1}$ concave* *sur l'intervalle* $[f(t_0), \infty[$, c.a.d. $\dfrac{g''f'-g'f''}{f'^2}(t) < 0$ *pour* $t \geqslant t_0$. *Si* $X \geqslant t_0$ *et* $x \geqslant t_0$ *alors*

$$g(x) - \frac{g'(X)}{f'(X)} f(x) \leqslant g(X) - \frac{g'(X)}{f'(X)} f(X).$$

Démonstration. $g \circ f^{-1}$ étant concave on peut écrire pour y, $Y \geqslant f(t_0)$

$$g \circ f^{-1}(y) - g \circ f^{-1}(Y) \leqslant (y-Y)(g \circ f^{-1})'(Y).$$

Par suite en posant $y = f(x)$ et $Y = f(X)$ on a

$$g(x) - g(X) \leqslant \big(f(x) - f(X)\big) g'(X)/f'(X)$$

d'où le résultat.

LEMME 9. *Soit* $\lambda > 1$; *si* N *maximise* $g_\lambda^{(1)}(n) = \omega(n) - \dfrac{\lambda \log n}{\log\log n}$ *et si* $N \geqslant N_5$ *alors* N *est un nombre* ω*-h.c.s. pour*

$$\lambda' = \lambda \frac{\log\log N - 1}{(\log\log N)^2}. \tag{31}$$

Démonstration. Ecrivons:

$$\omega(n) - \lambda' \log n = \left(\omega(n) - \frac{\lambda \log n}{\log\log n}\right) + \left(\frac{\lambda \log n}{\log\log n} - \lambda' \log n\right),$$

$\omega(n) - \dfrac{\lambda \log n}{\log\log n}$ est maximum en N. En prenant dans le lemme 8

$$f(t) = t, \quad g(t) = \frac{t}{\log t}, \quad t_0 = e^2, \quad x = \log n, \quad X = \log N, \quad n \geqslant N_5, \quad N \geqslant N_5$$

et en posant $\lambda' = \lambda g'(\log N)$ on obtient:

$$\frac{\lambda \log n}{\log\log n} - \lambda' \log n = \lambda \left[\frac{\log n}{\log\log n} - g'(\log N) \log n\right]$$
$$\leqslant \lambda \left[\frac{\log N}{\log\log N} - g'(\log N) \log N\right].$$

Par suite $\forall n \geqslant N_5$

$$\omega(n) - \lambda g'(\log N) \log n \leqslant \omega(N) - \lambda g'(\log N) \log n$$

et d'après le lemme 7, N est un nombre ω-h.c.s. pour

$$\lambda' = \lambda g'(\log N) = \lambda \frac{\log\log N - 1}{(\log\log N)^2}.$$

Remarque. Le théorème 11 montre que N_9 maximise $g_\lambda^{(1)}(n)$ pour le paramètre $\lambda = 1{,}38401$; les nombres suivants maximisant $g_\lambda^{(1)}(n)$ sont $N_{11}, N_{12}, N_{14}, \ldots$

LEMME 10. *Soit* $\lambda > 1$; *si* N *maximise*

$$g_\lambda^{(2)}(n) = \omega(n) - \frac{\log n}{\log\log n} - \lambda \frac{\log n}{(\log\log n)^2}$$

et si $N \geqslant N_{14}$ *alors* N *maximise* $g_{\lambda'}^{(1)}(n)$ *pour*

$$\lambda' = 1 + \lambda \frac{\log\log N - 2}{\log\log N (\log\log N - 1)}. \tag{32}$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 9; on applique le lemme 8 pour

$$f(t) = \frac{t}{\log t}, \quad g(t) = \frac{t}{\log^2 t}, \quad t_0 = e^{2+\sqrt{2}}, \quad x = \log n,$$
$$X = \log N, \quad n \geqslant N_{14}, \quad N \geqslant N_{14}$$

et en posant

$$\lambda' = 1 + \lambda \frac{g'(\log N)}{f'(\log N)}$$

on obtient le résultat d'après le lemme 7 puisque $\log N_{14} > t_0$ et que N_{14} maximise $g_\lambda^{(1)}(n)$ d'après la remarque ci-dessus.

Démonstration du théorème 12. Si l'on calcule

$$h(n) = \left(\omega(n) - \frac{\log n}{\log\log n}\right) \frac{(\log\log n)^2}{\log n}$$

sur les premiers nombres N_k on s'aperçoit que le maximum est atteint pour $k = 47$ et que ce maximum vaut $\lambda_0 = 1{,}45742\ldots$

Montrons que N_{47} donne effectivement le maximum ce qui prouvera le théorème. Nous avons donc à démontrer que N_{47} maximise

$$g_{\lambda_0}^{(2)}(n) = \omega(n) - \frac{\log n}{\log\log n} - \lambda_0 \frac{\log n}{(\log\log n)^2}.$$

Si $N \geqslant N_{14}$ et si N maximise $g_\lambda^{(2)}(n)$ alors d'après les lemmes 9 et 10, N est un nombre ω-h.c.s. pour le paramètre

$$\varepsilon = \frac{\log\log N_k - 1}{(\log\log N_k)^2} + \lambda \frac{\log\log N_k - 2}{(\log\log N_k)^3}.$$

Ce paramètre doit être inférieur à $1/\log p_k$ donc

$$\lambda \leqslant \left(\frac{\log\log N_k}{\log p_k}\left(\frac{\log\log N_k}{\log p_k}-1\right)\log p_k+1\right)\left(\frac{\log\log N_k}{\log\log N_k-2}\right)$$

et d'après la majoration (5) il vient

$$\lambda \leqslant \left(1+\log\log 3+\frac{(\log\log 3)^2}{\log p_k}\right)\frac{\log\log N_k}{\log\log N_k-2}.$$

Le membre de droite est fonction décroissante de k et pour $k \geqslant 500$, $\lambda \leqslant 1{,}451$.

On vérifie à la main pour $k \leqslant 500$.

Théorème 13. *Pour* $n \geqslant 26$ $(> \exp\exp 1{,}1714)$

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n - 1{,}1714} \tag{33}$$

avec égalité pour $n = N_{189}$.

Démonstration. Soit $\beta > 0$. Dans le lemme 8 prenons

$$f(t) = t, \quad g(t) = \frac{t}{\log t - \beta}, \quad t_0 = e^{\beta+2}, \quad x = \log n \quad \text{et} \quad X = \log N.$$

On en déduit avec le lemme 7 que si $N \geqslant N_{k_0} \geqslant e^{\beta+2}$ et si N maximise $\omega(n)-\lambda\,\dfrac{\log n}{\log\log n-\beta}$, que N est un nombre N_k pour le paramètre

$$\lambda' = \lambda g'(\log N) = \lambda\,\frac{\log\log N-\beta-1}{(\log\log N-\beta)^2}.$$

Prenons $\beta = \log\log N_{189} - \dfrac{\log N_{189}}{189} = 1{,}1713\ldots$ ce qui permet de choisir $k_0 = 11$.

On aura $\lambda' \leqslant 1/\log p_k$ si $\lambda \leqslant A/\log p_k$ avec

$$A = \log\theta(p_k)-\beta+1+\frac{1}{\log\theta(p_k)-(\beta+1)}.$$

En prenant $\theta(x) < x\log 3$, on obtient $\lambda < 1$ pour $k \geqslant 265000$.

Pour $k \leqslant 265000$ on prend $\theta(x) < x$ et l'on a $\lambda < 1$ pour $k \geqslant 440$.

Pour $11 \leqslant k \leqslant 440$ on vérifie que $\omega(N_k) - \dfrac{\log N_k}{\log\log N_k-\beta}$ est maximum en $k = 189$.

Pour $26 \leqslant n < N_{11}$ on montre que dans chaque intervalle $[N_i, N_{i+1}]$, $i = 3, \ldots, 11$

$$\omega(n) - \frac{\log n}{\log\log n-\beta} < 0.$$

4. Précisions supplémentaires sur le comportement de $\omega(n)$ en utilisant le théorème des nombres premiers.

Théorème 14. *La fonction*

$$f(n) = \frac{\omega(n)\log\log n}{\log n}$$

est décroissante sur les N_k *pour* $k \geqslant 9$.

Démonstration. On doit prouver que $f(N_{k+1}) < f(N_k)$ pour $k \geqslant 9$. Posons

$$\frac{b}{\log p_{k+1}} = \omega(N_{k+1}) - \frac{\log N_{k+1}}{\log p_{k+1}} = \omega(N_k) - \frac{\log N_k}{\log p_{k+1}}.$$

L'inégalité s'écrit:

$$(b+\log N_{k+1})\frac{\log\log N_{k+1}}{\log N_{k+1}} < (b+\log N_k)\frac{\log\log N_k}{\log N_k}$$

soit

$$\log\log N_{k+1} + b\,\frac{\log\log N_{k+1}}{\log N_{k+1}} < \log\log N_k + b\,\frac{\log\log N_k}{\log N_k}.$$

La fonction $t \mapsto t + bte^{-t}$ est pour $b > e^2$ décroissante dans l'intervalle $[2, a]$, a étant défini par:

$$1+be^{-a}(1-a) = 0.$$

Or pour $k \geqslant 9$, $b \geqslant e^2$; il reste donc à prouver que $\log\log N_{k+1} < a$ c'est-à-dire compte tenu que $x \mapsto 1+be^{-x}(1-x)$ est croissante si $x \geqslant 2$ que

$$\omega(N_{k+1})\log p_{k+1} > \log N_{k+1} + \frac{\log N_{k+1}}{\log\log N_{k+1}-1}$$

ce qui est une conséquence du lemme suivant:

Lemme 11.

$$\pi(x)\log\theta(x) - \theta(x) > \frac{\theta(x)}{\log\theta(x)-1} \quad \textit{pour } x \geqslant 29. \tag{34}$$

Démonstration. Nous utiliserons les encadrements de Schoenfeld [16], page 359

$$x - \frac{bx}{\log x} < \theta(x) < x + \frac{ax}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant x_0 = 59 \tag{35}$$

avec $a = 0{,}12$ et $b = 1-a$.

Posons

$$A(x) = \pi(x) - \frac{\theta(x)}{\log x} - \frac{\theta(x)}{\log x(\log\theta(x)-1)} \quad \text{pour } x \geqslant x_0$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\theta(u)\,du}{u\log^2 u} - \frac{\theta(x)}{\log x(\log\theta(x)-1)} + \int_{2}^{x_0} \frac{\theta(u)\,du}{u\log^2 u} \quad \text{d'après (7)}$$

$$> B(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1-\dfrac{b}{\log u}}{\log^2 u}\,du - \frac{x\left(1+\dfrac{a}{\log x}\right)}{\log x(\log x-1)} + \int_{2}^{x_0} \frac{\theta(u)\,du}{u\log^2 u},$$

$$B'(x) = \frac{1-\dfrac{b}{\log x}}{\log^2 x} -$$

$$- \frac{1}{\log^3 x(\log x-1)^2}\left(\log^3 x-(3-a)\log^2 x+(1-4a)\log x+2a\right)$$

et $B'(x)$ est positif.

En effet

$$B'(x) \geqslant \frac{1}{\log^2 x} - \frac{(1-a)}{\log^3 x} - \frac{1}{\log^3 x(\log x-1)^2}[\log x(\log x-1)^2 -$$

$$-(1-a)\log^2 x-4a\log x+2a]$$

$$\geqslant \frac{a-1}{\log^3 x} + \frac{1-a}{\log x(\log x-1)^2} + \frac{4a\log x-2a}{\log^3 x(\log x-1)^2} \geqslant 0.$$

On vérifie que $B(59)$ $(>0{,}14)$ est positif; il s'ensuit donc que $A(x) > B(x)$, est positif pour $x \geqslant 59$.

Pour $29 \leqslant x \leqslant 59$ on vérifie l'inégalité sur les nombres premiers et le lemme se trouve ainsi démontré.

Lemme 12. *Nous avons les majorations suivantes: Pour* $x \geqslant 2$

$$\frac{\pi(x)\log\theta(x)}{\theta(x)} \leqslant 1 + \frac{1}{\log\theta(x)} + \frac{2{,}89726}{\log^2\theta(x)} \tag{36}$$

avec égalité pour $x = p_{442}$,

$$\frac{\pi(x)\log\theta(x)}{\theta(x)} \leqslant 1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2{,}96690}{\log^2 x} \tag{37}$$

avec égalité pour $x = p_{224}-0$.

Démonstration. Nous démontrons d'abord (36) et (37) pour $x \geqslant e^{12,5}$ ce qui nous permet d'utiliser:

$$\theta(x) \geqslant x\left(1-\frac{1}{23\log x}\right) \quad ([16], \text{ p. } 359). \tag{38}$$

Compte tenu de cela et de (7) les inégalités (36) et (37) sont conséquence de

$$\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt \leqslant \frac{x}{\log^2 x}\left(1+\frac{2{,}843}{\log x}\right). \tag{39}$$

D'après (11), le 1[er] membre est moindre que

$$\mathrm{li}(x) - \frac{x}{\log x} + \frac{0{,}014}{\log^3 x}.$$

Il suffit donc, de vérifier que

$$\mathrm{li}(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - \frac{2{,}829x}{\log^3 x} < 0. \tag{40}$$

Or, le 1[er] membre de (40) est fonction décroissante pour $x \geqslant e^{12,5}$ et est négatif pour $x = e^{12,5}$.

Pour $x \leqslant e^{12,5}$, on verifie les formules (36) et (37) au calculateur.

Théorème 15. *Pour* $\varepsilon < 0{,}38$ (voir th. 11),

$$\omega(n) < (1+\varepsilon)\frac{\log n}{\log\log n}$$

dès que $\log n \geqslant 18{,}125 e^{1/\varepsilon}$.

Démonstration. D'après le théorème 14 on aura

$$\omega(n) < (1+\varepsilon)\frac{\log n}{\log\log n}$$

dès que $n \geqslant N_k$ avec

$$\omega(N_k) < (1+\varepsilon)\frac{\log N_k}{\log\log N_k}$$

ce qui est vérifié d'après la formule (36) si

$$\frac{1}{\log\theta(p_k)} + \frac{\beta}{\log^2\theta(p_k)} \leqslant \varepsilon, \quad \beta = 2{,}89726.$$

Il suffit pour cela que $\log\theta(p_k) > 1/\varepsilon+\beta$ soit $\log N_k \geqslant e^{1/\varepsilon}e^{\beta}$.

Le lemme 12 nous permet aussi de préciser les théorèmes 11 et 12 de la partie 3.

THÉORÈME 16. *Pour* $n \geqslant 3$

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} + \frac{\log n}{(\log\log n)^2} + 2{,}89726\,\frac{\log n}{(\log\log n)^3}$$

avec égalité pour $n = N_{442}$.

Démonstration. Le théorème est une conséquence du lemme 12, après avoir remarqué qu'il suffit de raisonner sur les nombres N_k.

THÉORÈME 17. *Sous l'hypothèse de Riemann on a*

$$\text{pour } n \geqslant N_4 \qquad \omega(n) \leqslant \mathrm{li}(\log n) + 0{,}12(\log n)^{1/2}.$$

Le théorème 9 donne $\theta(p_k) > \mathrm{li}^{-1}(k) - ak^{1/2}\log k^{1/2}$ pour $k \geqslant 5$ avec $a = 0{,}12$; on peut d'ailleurs prendre $a = 0$ pour $k \leqslant 12481$.

Par suite

$$k \leqslant \mathrm{li}\big(\theta(p_k) + ak^{1/2}(\log k)^{3/2}\big),$$

$$k \leqslant \mathrm{li}\big(\theta(p_k)\big) + a\,\frac{k^{1/2}(\log k)^{3/2}}{\log\theta(p_k)}.$$

On peut alors écrire d'après le théorème 4

$$k \leqslant \mathrm{li}\big(\theta(p_k)\big) + a\theta(p_k)^{1/2}$$

c.a.d.

$$\omega(N_k) \leqslant \mathrm{li}\big(\log(N_k)\big) + a(\log N_k)^{1/2} \qquad \forall k \geqslant 5.$$

On vérifie à la main pour $k = 4$.

Bibliographie

[1] P. T. Bateman, S. Chowla and P. Erdös, *Remarks on the size of* $L(1, \chi)$, Publ. Math. (Debrecen) 1(1950), pp. 165–182.

[2] W. E. L. Grimson and D. Hanson, *Estimates for the product of the primes not exceeding x*, Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Math. and Computing (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1977), pp. 407–416.

[3] D. Hanson, *On the products of primes*, Canad. Math. Bull. 15 (1972), pp. 33–37.

[4] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *The normal number of prime factors of a number n*, Quart. Journ. Math. 48 (1917), pp. 76–92 et S. Ramanujan, *Collected papers*, Chelsea, pp. 262–275.

[5] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1960.

[6] J. L. Nicolas, *Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan*, Canad. J. Math. 23 (1) (1971), pp. 116–130.

[7] J. L. Nicolas et G. Robin, *Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de n* (à paraître).

[8] K. Norton, *Numbers with small prime factors, and the least k-th power non residue*, Memoir of the Amer. Math. Soc. Numb. 106 (1971).

[9] — *On the number of restricted prime factors of an integer III*, preprint.

[10] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 14 (1915), pp. 347–400, *Collected papers*, Chelsea, pp. 78–128.

[11] G. Robin, *Majorations explicites du nombre de diviseurs d'un entier*, Publ. Dept. Math. Limoges, 2, 1980, 6 pages.

[12] J. B. Rosser, *The n-th prime is greather than n log n*, Proc. London Math. Soc. (2), 45 (1939), pp. 21–44.

[13] — *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. 63 (1941), pp. 211–232.

[14] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Journ. Math. 6 (1962), pp. 64–94.

[15] —, — *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$, Math. of Comp. Vol. 29, Numb. 129, Jan. 1975, pp. 243–269.

[16] L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$ *II*, ibid. Vol. 30, Numb. 134, April 1976, pp. 337–360.

U.E.R. DES SCIENCES DE LIMOGES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
123 rue Albert Thomas, 87060 Limoges Cédex, France

Reçu le 24.11.1981
et dans la forme modifiée le 7.4.1982 (1278)